менение величины $|(1+1/\lambda)\sin(\gamma\pi)\lim\limits_{\rho\to 0}[T(\rho/l)]^{\gamma}|$, где T — напряжение на продолжении разреза за вершину; ρ — расстояние до вершины разреза; $\sigma_{13}^{(\infty)}=0$; $\sigma_{23}^{(\infty)}=1$.

1. *Григолюк Э. И., Грингауз М. Г., Фильштинский Л. А.* Об одном подходе к исследованию сингулярных полей напряжений в кусочно-однородной среде с ветвящимися разрезами. — Докл. АН СССР, 1981, **261**, № 3, с. 567—570.
2. *Долгих В. Н., Фильштинский Л. А.* Продольный сдвиг композиционного материала с дефектами. — Изв. АН СССР. Сер. Механика твердого тела, 1980, № 4, с. 103—110.
3. *Лаврентьев М. А.* О построении потока, обтекающего дугу заданной формы.— Тр. ЦАГИ, 1932, вып. 118.—58 с.
4. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. — М.: Наука, 1966.—708 с.
5. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения.— М.: Наука, 1968.— 512 с.
6. *Партон В. З., Перлин П. И.* Интегральные уравнения теории упругости. — М. : Наука, 1977.—312 с.
7. *Саврук М. П.* Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. — Киев : Наук. думка, 1981.—324 с.
8. *Черепанов Г. П.* Механика хрупкого разрушения. — М.: Наука, 1974.— 640 с.
9. *Ioakimidis N. I., Theocaris P. S.* A curvilinear crack along the interface of two plane isotropic elastic media. — Rev. Roum. Sci. Techn. Ser. Mec. Appl., 1978, **23**, N 4, p. 563—575.
10. *Sherman D. I.* On the problem of plane strain in non-homogeneous media. — In: Non-homogeneity in elasticity and plasticity. Pergamon press, 1959, p. 3—20.

Сумский филиал Харьковского политехнического ин-та

Получено 26.04.83.

УДК 530.12 : 531.18 : 537.8 : 514

Я. И. Комарницкий

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ УСКОРЕНИЙ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ ДЛЯ ПОСТУПАТЕЛЬНО-ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ПСЕВДОЕВКЛИДОВОЙ ПЛОСКОСТИ

В работе [1] изучен общий случай плоского движения плоской неизменяемой фигуры с использованием ускорений высших порядков. Под общим случаем плоского движения понимается поступательное и вращательное движения. В этой работе использовалась возможность зафиксировать обе координаты на евклидовой плоскости. Эта возможность обусловлена пространственностью обеих евклидовых координат. После изучения общего случая плоского движения неизменяемой фигуры изучаются некоторые общие свойства ускорений высших порядков точек неизменяемой фигуры при самом общем движении в пространстве.

В настоящей статье рассмотрен общий случай плоского движения псевдоевклидовой плоскости. Сформулированы некоторые общие свойства ускорений высших порядков точек этой плоскости. Некоторые результаты, относящиеся к движению псевдоевклидовой плоскости, отличаются от аналогичных результатов для движения евклидовой плоскости. На движущейся поступательно и вращательно псевдоевклидовой плоскости можно зафиксировать две координаты. Из-за этого она не совпадает с псевдоевклидной плоскостью Минковского, но ее рассмотрение имеет смысл в электродинамике с плотностями электрического и магнитного токов.

Развитие теории кулачковых механизмов, начавшееся в 30-х годах XX века, показало, что по крайней мере ускорения 2-го порядка являются необходимыми для обеспечения точной работы механизмов.

Рассмотрим две псевдоевклидовые плоскости, первая из которых является неподвижной, а вторая движется поступательно и вращательно. На первой плоскости введем ортогональную систему координат

$x0y$, а на второй — ортогональную систему координат $\overline{x0y}$. Связывающее их преобразование координат имеет вид

$$x = \xi + \bar{x}\,\mathrm{ch}\,\beta + \bar{y}\,\mathrm{sh}\,\beta, \quad y = \eta + \bar{x}\,\mathrm{sh}\,\beta + \bar{y}\,\mathrm{ch}\,\beta, \tag{1}$$

где ξ и η — координаты точки $\bar{0}$ в системе координат $x0y$; β — угол между осями $0x$ и $\overline{0x}$; функции ξ, η и β зависят от переменной p, которая может быть временем.

Определение. Выражение $\vec{v}_0 = d\vec{r}/dp$, $\vec{v}_1 = d^2\vec{r}/dp^2$, $\vec{v}_2 = d^3\vec{r}/dp^3$, ..., $\vec{v}_n = d^{n+1}\vec{r}/dp^{n+1}$, где $\vec{r}$ — радиус-вектор на псевдоевклидовой плоскости, назовем ускорениями нулевого, первого, второго, ... n-го порядков.

При таком определении скорость можно рассматривать как ускорение нулевого порядка. Для фиксированной точки движущейся плоскости с координатами $\bar{x}$, $\bar{y}$

$$d\bar{x}/dp = 0, \quad d\bar{y}/dp = 0. \tag{2}$$

В дальнейшем производные будем обозначать штрихом и скобками. Продифференцировав (1) по p и учитывая условия (2), получим

$$v_{0,x} = \xi' + (y - \eta)\beta', \quad v_{0,y} = \eta' + (x - \xi)\beta'. \tag{3}$$

Преобразуем формулы (3) в тождества

$$(x - \xi)' = (y - \eta)\beta', \quad (y - \eta)' = (x - \xi)\beta'. \tag{4}$$

Последовательное дифференцирование (3) по p с учетом тождеств (4) приводит к новым формулам:

$$\begin{aligned} v_{1,x} &= \xi'' + (x - \xi)(\beta')^2 + (y - \eta)\beta'', \\ v_{1,y} &= \eta'' + (y - \eta)(\beta')^2 + (x - \xi)\beta''; \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} v_{2,x} &= \xi''' + (y - \eta)(\beta''' + (\beta')^3) + 3(x - \xi)\beta'\beta'', \\ v_{2,y} &= \eta''' + (x - \xi)(\beta''' + (\beta')^3) + 3(y - \eta)\beta'\beta''; \end{aligned} \tag{6}$$

$$\cdots$$

На основе (5) и (6) приходим к выводу, что выражения для компонент $v_{n,x}$, $v_{n,y}$ ускорения произвольного n-го порядка рассматриваемой точки движущейся псевдоевклидовой плоскости будут иметь вид

$$\begin{aligned} v_{n,x} &= \xi^{(n+1)} + B_n(x - \xi) + A_n(y - \eta), \\ v_{n,y} &= \eta^{(n+1)} + A_n(x - \xi) + B_n(y - \eta). \end{aligned} \tag{7}$$

Здесь A_n, B_n — определенные функции обыкновенных производных разных порядков от β по p, зависящие от индекса n. Доказательство равенств (7) производится методом математической индукции. При $n = 1$ формулы (7) верны. Допустим, что они верны для какого-либо $n - 1$:

$$\begin{aligned} v_{n-1,x} &= \xi^{(n)} + A_{n-1}(y - \eta) + B_{n-1}(x - \xi), \\ v_{n-1,y} &= \eta^{(n)} + A_{n-1}(x - \xi) + B_{n-1}(y - \eta). \end{aligned} \tag{8}$$

Продифференцировав (8) по p один раз и используя тождества (4), получим

$$\begin{aligned} v_{n,x} &= \xi^{(n+1)} + \left(A'_{n-1} + B_{n-1}\beta'\right)(y - \eta) + \left(B'_{n-1} + A_{n-1}\beta'\right)(x - \xi), \\ v_{n,y} &= \eta^{(n+1)} + \left(A'_{n-1} + B_{n-1}\beta'\right)(x - \xi) + \left(B'_{n-1} + A_{n-1}\beta'\right)(y - \eta). \end{aligned} \tag{9}$$

Соотношения (9) имеют форму равенств (8). Из сравнения формул (9) и (7) получим рекуррентные соотношения

$$A_n = A'_{n-1} + B_{n-1}\beta', \quad B_n = B'_{n-1} + A_{n-1}\beta', \tag{10}$$

позволяющие найти A_n, B_n по известным A_{n-1}, B_{n-1}, A'_{n-1}, B'_{n-1}, β'. A_0, B_0 содержатся в соотношениях (3), A_1, B_1 — в (5). Подставляя выражения для A_2, B_2 из (6) в (10), получим выражения для A_3, B_3:

$$A_3 = \beta^{(4)} + 6(\beta')^2\beta'', \quad B_3 = 4\beta'\beta''' + 3(\beta'')^2 + (\beta')^4.$$

Рассмотрим вращательное движение псевдоевклидовой плоскости вокруг неподвижной точки $\xi = 0$, $\eta = 0$. Соотношения (7) в этом случае принимают вид

$$v_{n,x} = B_n x + A_n y, \quad v_{n,y} = B_n y + A_n x. \tag{11}$$

Отсюда получаем

$$|\vec{v}_n| = r k_n, \tag{12}$$

где

$$|\vec{v}_n| = \sqrt{v_{n,x}^2 - v_{n,y}^2}; \; r = \sqrt{x^2 - y^2}; \; k_n = \sqrt{B_n^2 - A_n^2}.$$

Так как A_n, B_n зависят от p, то k_n также является функцией от p. Для каждого фиксированного p из (12) вытекает

Свойство 1. Во всех точках гиперболы $x^2 - y^2 = a^2$ на вращающейся псевдоевклидовой плоскости в данный момент времени модуль вектора ускорения n-го порядка один и тот же.

В соответствии с [2] угол между векторами $\vec{v}_n$ и $\vec{r}$ определяется формулой

$$\operatorname{ch}(\vec{v}_n, \vec{r}) = |\vec{v}_n \vec{r}| / \sqrt{\vec{v}_n^2 \vec{r}^2}. \tag{13}$$

Подставляя соотношения (11) и (12) в формулу (13), получим

$$\operatorname{ch}(\vec{v}_n, \vec{r}) = |B_n r^2| / \sqrt{r^2 k_n^2 r^2}. \tag{14}$$

Согласно [2], $\vec{v}_n \vec{r}$, $\vec{v}_n^2$, $\vec{r}^2$ должны быть одного знака. Это равносильно тому, что $B_n r^2$, $r^2 k_n^2$, r^2 тоже одного знака, соблюдение чего ведет к неравенствам

$$B_n > 0, \; |B_n| > |A_n|. \tag{15}$$

С учетом первого неравенства из (15) и некоторых упрощений (14) преобразуется к виду

$$\operatorname{ch}(\vec{v}_n, \vec{r}) = B_n / \sqrt{B_n^2 - A_n^2}. \tag{16}$$

Из формулы (14) следует, что угол между $\vec{v}_n$ и изотропным вектором $\vec{r}$ неопределен. Из формулы (16) находим

$$\operatorname{th}[\pm(\vec{v}_n, \vec{r})] = |A_n/B_n|, \tag{17}$$

где A_n, B_n зависят от p. Зафиксировав p, на основании (17) сформулируем

Свойство 2. Если выполнены условия (15), то для фиксированного значения p угол между вектором ускорения n-го порядка $\vec{v}_n$ и радиусом вектором $\vec{r}$ с точностью до знака один и тот же на всей вращающейся псевдоевклидовой плоскости, за исключением изотропных прямых, где он неопределен.

1. *Лигин В. Н.* Заметка об ускорениях высших порядков в движении неизменяемой системы. — Одесса, 1973.—23 с.
2. *Рашевский П. К.* Риманова геометрия и тензорный анализ. — М.: Наука, 1967.— 664 с.

Ин-т прикладных проблем
механики и математики АН УССР,
Львов

Получено 10.05.84