Для изотропных тел функция W_* может быть записана как функция от скалярных инвариантов совокупности указанных тензоров. Если учитывать только тензоры $\vec{\nabla}\hat{\sigma}$, $\vec{\nabla}\times\hat{\sigma}$ и $\frac{d}{d\tau}\hat{\sigma}$, пренебречь различием между субстанциональными и локальными производными по времени $\left(\frac{d\hat{\sigma}}{d\tau}\approx\frac{\partial\hat{\sigma}}{\partial\tau}\right)$ и ограничиться скалярными инвариантами не выше второго порядка, то функция W_* является функцией следующих инвариантов:

$$I_1^{(1)} = \mu_i{}^{jk}\mu^i{}_{jk}, \quad I_2^{(1)} = \mu_i{}^{jk}\mu_{kj}{}^i, \quad I_3^{(1)} = \mu_i{}^{ik}\mu_k{}^j{}_j,$$

$$I_4^{(1)} = \mu_i{}^{ik}\mu_j{}^j{}_k, \quad I_5^{(1)} = \mu_i{}^i{}_j\mu^j{}_k{}^k;$$

$$I_1^{(2)} = \eta_i{}^i, \quad I_2^{(2)} = \eta_i{}^j\eta_j{}^i, \quad I_3^{(2)} = \eta^{ij}\eta_{ij};$$

$$I_1^{(3)} = \frac{\partial\sigma^i{}_i}{\partial\tau}, \quad I_2^{(3)} = \frac{\partial\sigma^i{}_j}{\partial\tau}\frac{\partial\sigma^j{}_i}{\partial\tau},$$

$$I^{(2,3)} = \epsilon_{nki}\sqrt{g}\mu^{nki}\frac{\partial\sigma^i{}_j}{\partial\tau}. \qquad (16)$$

Здесь ϵ_{ijk} — символ Леви — Чивита; $g = \mathrm{Det}\,\|g_{ij}\|$;

$$\mu_i{}^{jk} \equiv \frac{\partial\sigma^{jk}}{\partial x^i} + \sigma^{lk}\Gamma^j_{li} + \sigma^{jl}\Gamma^k_{li}; \quad \eta_i{}^j \equiv (\vec{\nabla}\times\hat{\sigma})_i{}^j = \sqrt{g}\,\epsilon_{nki}\mu^{nkj};$$

$$\mu^{nkj} = \mu_m{}^{kj}g^{nm};$$

$I_{i_1}^{(1)}$, $I_{i_2}^{(2)}$, $I_{i_3}^{(3)}$ — скалярные инварианты тензоров $\vec{\nabla}\hat{\sigma}$, $\vec{\nabla}\times\hat{\sigma}$ и $\frac{\partial}{\partial\tau}\hat{\sigma}$ соответственно; $I^{(2,3)}$ — скалярный инвариант, общий для тензоров $\vec{\nabla}\hat{\sigma}$ и $\frac{\partial}{\partial\tau}\hat{\sigma}$; $i_1 = \overline{1,5}$; $i_2 = \overline{1,3}$; $i_3 = 1, 2$.

Отметим, что дальнейшая конкретизация критериев W и W_* должна выполняться с учетом специфики решаемых задач оптимизации, вида и характера внешних воздействий, условий существования решений формулируемых экстремальных задач термоупругости.

1. *Бурак Я. И., Зозуляк Ю. Д., Гера Б. В.* Оптимизация переходных процессов в термоупругих телах. — Киев : Наук. думка, 1984.—160 с.
2. *Григолюк Э. И., Бурак Я. И., Кручкевич В. Ю., Подстригач Я. С.* К определению режимов локальной термообработки цилиндрических оболочек с остаточными напряжениями. — Физ.-хим. механика материалов, 1969, № 3, с. 361—369.
3. *Григолюк Э. И., Подстригач Я. С., Бурак Я. И.* Оптимизация нагрева оболочек и пластин. — Киев : Наук. думка, 1979.—364 с.
4. *Коваленко А. Д.* Введение в термоупругость. — Киев : Наук. думка, 1965.— 204 с.
5. *Підстригач Я. С., Ярема С. Я.* Температурні напруження в оболонках. — К. : Вид-во АН УРСР, 1961.—212 с.

Ин-т прикладных проблем
механики и математики АН УССР,
Львов

Получено 21.12.83

УДК 539.3

Н. В. Баничук, В. И. Герман, В. В. Кобелев

АНАЛИЗ ОПТИМАЛЬНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ АРМИРУЮЩЕГО МАТЕРИАЛА В КОНСТРУКЦИЯХ ИЗ КОМПОЗИТА

Анализ оптимальных неоднородных распределений армирующего материала в конструкциях из композита может быть проведен с использованием различных расчетных схем. По способу введения управляющих функций расчетные схемы в задачах оптимизации делятся на схемы с применением феноменологического подхода и схемы, основанные на понятии эффективных модулей. В первой группе схем предполагается непосредственное использование уравнений теории упругости анизотропного композиционного материала. Тензор упругих постоянных C_{ijkl} определяется из испытаний образцов армированных материалов. Во второй группе схем тензор упругих постоянных C_{ijkl} определяется механическими и геометрическими характеристиками фаз (внутренними свойствами) композита.

По степени анизотропии композиционные материалы делятся на группы изотропных и анизотропных композитов. К первой группе относятся хаотически армированные гранулированные и коротковолокнистые композиты, ко второй — слоистые, волокнистые и текстурированные композиты. Эффективные модули композиционных материалов зависят от формы, размеров, ориентации армирующих включений и для конкретных типов материалов определяются методами микромеханики композитов [2, 3]. Считается, что модули упругости составляющих фаз композита (арматуры и матрицы) заданы. Основной характеристикой, определяющей величины эффективных упругих постоянных композиционного материала, является концентрация армирующих включений $\eta(x_1, x_2)$, $(x_1, x_2) \in \Omega$, Ω — область, занимаемая рассматриваемым элементом конструкции. Для анизотропных композитов можно ввести дополнительную управляющую функцию, а именно: угол $\alpha(x_1, x_2)$, который образуют локальные оси анизотропии с введенной системой координат $0x_1x_2$. В случае, когда направления укладки волокон разориентированы относительно преимущественного направления укладки $\alpha(x_1, x_2)$ и по некоторому фиксированному закону распределены в конусе с углом раствора $\beta(x_1, x_2)$ (текстурированный композит), в качестве управляющей функции принимается также угол текстуры $\beta(x_1, x_2)$.

Подчеркнем, что управляющие функции $\eta(x_1, x_2)$, $\alpha(x_1, x_2)$, $\beta(x_1, x_2)$, определяющие эффективные модули упругости композита, изменяются в области Ω, занимаемой материалом элемента конструкции.

В реальных условиях работы конструкции реализуется сильно неоднородное напряженно-деформированное состояние, которое характеризуется наличием областей концентрации напряжений. Снижения концентрации напряжений можно добиться путем рационального армирования, т. е. создания такой внутренней структуры материала, которая в наибольшей степени отвечала бы требованиям обеспечения несущей способности конструкции в целом. Перемещение материала из областей конструкции с малой интенсивностью напряжений в области, воспринимающие основную нагрузку (управление концентрацией включений), и подкрепление сильно нагруженных направлений (управление углом укладки и текстурой) на практике могут быть реализованы путем использования неоднородных и анизотропных материалов.

1. Постановка и основные соотношения задачи минимизации податливости. Рассмотрим задачу минимизации податливости слоисто-волокнистой упругой композиционной пластины, которая представляет собой квазиоднородный пакет, состоящий из монослоев, армированных высокомодульными волокнами, и прослойки из связующего. Пластина занимает область Ω плоскости x_1x_2, ограниченную кривой $\Gamma = \Gamma_q + \Gamma_u$. На части границы Γ_u пластина закреплена ($u_1 = 0$, $u_2 = 0$), а на части Γ_q заданы усилия q_1 и q_2. Минимизируемый функционал (податливость) определяется интегралом $\mathcal{J} = \int q_i u_i d\Gamma_q$, и рассматривается задача

$$\mathcal{J}^* = \min_{\eta,\, \alpha,\, \beta} \mathcal{J}. \tag{1}$$

Здесь минимум отыскивается на множестве управляющих функций $\{\eta(x_k), \alpha(x_k), \beta(x_k)\}$, $k = 1, 2$, удовлетворяющих ограничениям

$$0 \leqslant \eta_{\min} \leqslant \eta(x_1, x_2) \leqslant \eta_{\max} \leqslant 1, \quad -\pi \leqslant \alpha(x_1, x_2) \leqslant \pi,$$
$$0 \leqslant \beta_{\min} \leqslant \beta(x_1, x_2) \leqslant \beta_{\max} \leqslant \pi/2. \tag{2}$$

Полное количество армирующего материала (волокон) фиксировано:

$$I \equiv \int \eta(x_1, x_2)\, d\Omega = \text{const}. \tag{3}$$

Действительное распределение смещений u_i, $i = 1, 2$, реализует минимум функционала

$$\Pi = \int C_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}d\Omega - 2\int q_l u_l d\Gamma_q, \quad \varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2. \tag{4}$$

То обстоятельство, что для минимума функционала (4) имеем $\mathcal{J} = -\Pi$, позволяет свести задачу (1) к последовательному отысканию минимума и максимума функционала Π:

$$\mathcal{J}^* = -\max_{\eta,\,\alpha,\,\beta}\min_{u}\Pi \tag{5}$$

с учетом ограничений (2), (3).

Входящие в (4) приведенные модули упругости C_{ijkl} даются формулами

$$C_{ijkl} = (1-\chi)\,C'_{ijkl} + \chi\int_{-\pi/2}^{\pi/2} C''_{mnpr}n_{mi}n_{nj}n_{pk}n_{rl}\,p\,(\alpha+\Theta)\,d\Theta,$$

где n_{ij} — компоненты тензора поворота ($n_{11} = n_{22} = \cos\Theta$, $n_{12} = -n_{21} = \sin\Theta$); $\chi = N_a/N$ — коэффициент армирования; $N = N_a + N_c$ — полное число слоев квазиоднородного по толщине пакета; N_a — число армированных волокнами монослоев; N_c — число слоев связующего; $p(\Theta)$ — функция текстуры; C'_{ijkl}, C''_{ijkl} — приведенные модули упругости слоев связующего и армированных монослоев. Последние вычисляются по формулам

$$C''_{1111} = AE_{11},\ C''_{2222} = AE_{22},\ C''_{1212} = \mu_{12},$$
$$C''_{1122} = C''_{2211} = A\nu_{21}E_{11},\quad A = 1 - \nu_{12}\nu_{21}.$$

Усредненные технические постоянные монослоя зависят от концентрации армирующих волокон $\eta(x_1, x_2)$ и даются формулами [2]

$$E_{11} = \eta E_f + (1-\eta)E_m,\quad E_{22} = E_fE_m/[\eta E_m + (1-\eta)E_f],$$
$$\nu_{21} = \nu_{12}E_{11}/E_{22} = \eta\nu_f + (1-\eta)\nu_m,\quad \mu_{12} = G_fG_m/[\eta G_m + (1-\eta)G_f].$$

В приведенных ниже расчетах использовались следующие значения модулей Юнга и коэффициентов Пуассона волокна и матрицы:

$$E_f = 4{,}13\cdot 10^{11}\ \text{Па},\ \nu_f = 0{,}2,\ E_m = 3{,}45\cdot 10^{9}\ \text{Па},\ \nu_m = 0{,}34.$$

Внутренняя структура текстурированного слоистого композита характеризуется разбросом углов ориентации волокон в монослоях относительно преимущественного направления $\alpha(x_k)$. Функция текстуры $p(\Theta)$ равна вероятности отклонения элементарного волокна на угол Θ от преимущественного направления укладки. Число армированных монослоев, направления волокон в которых лежат в интервале $(\alpha + \Theta - d\Theta/2,\ \alpha + \Theta + d\Theta/2)$, равно $dN_a = N_a p\,(\alpha + \Theta)\,d\Theta$.

Ниже в конкретных расчетах использовалась ступенчатая функция распределения $p(\Theta)$ в виде

$$p(\Theta) = \begin{cases} 0, & \Theta \notin [-\beta,\ \beta], \\ (2\beta(x_1,\ x_2))^{-1}, & \Theta \in [-\beta,\ \beta], \end{cases}$$

где β имеет смысл угла текстуры. Если $\beta = 0$, то $p(\Theta) = \delta(\Theta)$ ($\delta(\Theta)$ — функция Дирака).

2. Метод решения задачи оптимизации. Задача оптимизации (5) является самосопряженной, условия оптимальности выписываются с помощью известных методов [1] и из-за краткости изложения здесь не приводятся. Для численного решения задачи (5) используется один из вариантов метода последовательной оптимизации [1], в котором «прямая» задача отыскания внутреннего минимума в (5) решалась методом конечных элементов, а улучшающие вариации управляющих функций формировались по методу градиента. Ограничения (2) снимались с помощью преобразования Валентайна [1]. Алгоритм допускает отображение сложной исходной области на каноническую квадратную. Квадратная область разбивалась на 169 четырехугольных полностью согласованных комбинированных элементов, каждый из которых состоит из 16 треугольных симплексов. Аппроксимация функционала (4), полученная с помощью описанного выше конечного элемента, использовалась для нахождения приближенного минимума (4) методом ускоренного покоординатного спуска. Заметим, что этот метод в терминах решения системы линейных уравнений совпадает с методом последовательной верхней релаксации. Указанный алгоритм реализован в виде программы на языке ФОРТРАН. Характерное время расчета варианта задачи (5), достаточное для получения оптимальных распределений управляющих функций с точностью не менее 10^{-4}, составляло 30 мин на ЭВМ типа ЕС-1055.

3. Результаты расчетов. На рис. 1 представлены результаты расчетов для случая, когда функции $\alpha(x_k)$, $\beta(x_k)$ фиксированы ($\alpha\equiv\equiv0$, $\beta=\pi/2$, $\chi=1$), а $\eta(x_k)$ $(0\leqslant\eta\leqslant0{,}5)$ является искомой управляющей функцией. В этом случае пакет монослоев изотропен в плоскости x_1x_2.

Изолиниями показано оптимальное распределение концентраций армирующих волокон для четверти сечения квадратного образца, в котором реализовано напряженно-деформированное состояние с граничными условиями в перемещениях $u_1(0,\ x_2)=-u_1(a,\ x_2)=1-2x_2/a$, $u_2(0,x_2)=u_2(a,\ x_2)=0$, а стороны $x_2=0$, $x_2=a$ свободны.

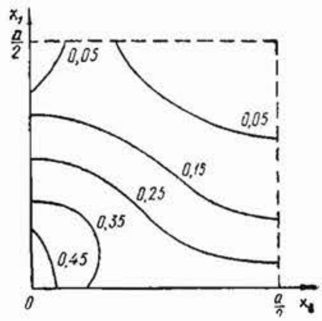

Рис. 1.

На рис. 2 показаны оптимальные направления укладки армирующих волокон в половине квадратной пластины, когда функции $\beta(x_k)$ и $\eta(x_k)$ зафиксированы ($\beta\equiv0$, $\eta=\chi=0{,}5$). Пластина жестко закреплена в области вырезов и нагружена в малой области (на элементарной ячейке).

Выигрыш от оптимизации рассчитывался по формуле $\delta=1-\mathcal{J}^*/\mathcal{J}_0$, где $\mathcal{J}^*$, $\mathcal{J}_0$— значения функционала податливости для оптимального и армированного однонаправленными ($\alpha=\pi/2$) волокнами образцов. В рассматриваемой задаче выигрыш от оптимизации составил 45,8 %.

Для анализа возможности оптимизации с учетом фактора текстуры рассматривалась параметрическая задача минимизации функционала (3). В данном случае управляющим являлся параметр текстуры β (т. е. текстура постоянна во всей области Ω). Оказывается, что оптимальным выбором параметра β можно снизить значение функционала податливости. Так, для пластины, нагруженной, как показано на рис. 2, оптимальный угол текстуры β (для однородного распределения $\alpha=\pi/2$) равен 55°. При этом выигрыш за счет оптимизации составил 27 %.

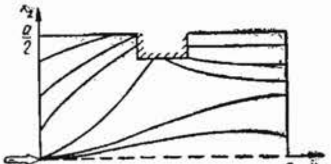

Рис. 2.

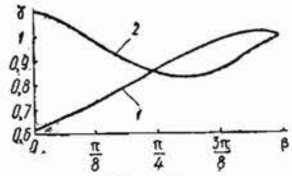

Рис. 3.

На рис. 3 показаны графики зависимости величины $\gamma=\mathcal{J}(\beta)/\mathcal{J}\left(\frac{\pi}{2}\right)$ от параметра β. Здесь $\mathcal{J}(\beta)$ — значение функционала, соответствующее углу текстуры β. Кривая *1* соответствует оптимальному распределению $\alpha(x_k)$, приведенному на рис. 2, кривая *2* — ориентации всех волокон под углом $\alpha=\pi/2$. Как видно, наличие текстуры в данном случае только ухудшает значение функционала. При углах текстуры, превышающих 45°, оптимальный при $\beta = 0$ проект становится неэффективным.

1. *Баничук Н. В.* Оптимизация форм упругих тел. — М.: Наука, 1980.—256 с.
2. *Болотин В. В., Новичков Ю. Н.* Механика многослойных конструкций. — М.: Машиностроение, 1980.—375 с.
3. *Кристенсен Р.* Введение в механику композитов. — М.: Мир, 1982.—336 с.

Ин-т проблем механики
АН СССР, Москва

Получено 17.07.84

УДК 539.377 : 629.13.01 : 624.072.4

Н. И. Войтович

УСЛОВИЯ НЕИДЕАЛЬНОГО ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКОГО КОНТАКТА СОПРЯЖЕННЫХ ОБОЛОЧЕК

Условия неидеального теплового контакта двух твердых тел, сопряженных с помощью тонкого промежуточного слоя, были получены Я. С. Подстригачем [4, 5]. В дальнейшем он и его ученики, основываясь на изложенных в этих работах идеях, предложили различные обобщения условий неидеального как теплового, так и термомеханического контактов двух тел, сопряженных через элемент типа промежуточного слоя [6, 7, 10], а также двух сопряженных встык пластин [3, 8]. В настоящей работе условия неидеального термомеханического контакта получены в случае, когда количество сопрягаемых тонкостенных элементов (оболочек, пластин) произвольно, сопрягающий элемент имеет произвольное поперечное сечение, взаимное размещение срединных поверхностей оболочек (пластин) и оси сопрягающего их стержня также достаточно произвольно.

Рассмотрим систему, состоящую из n оболочек (пластин) и сопрягающего их плоского криволинейного стержня произвольного поперечного сечения под воздействием тепловых и силовых факторов. Общий вид системы изображен на рис. 1; на рис. 2 представлено ее нормальное к оси стержня сечение. Стержень отнесем к смешанной системе коорди-

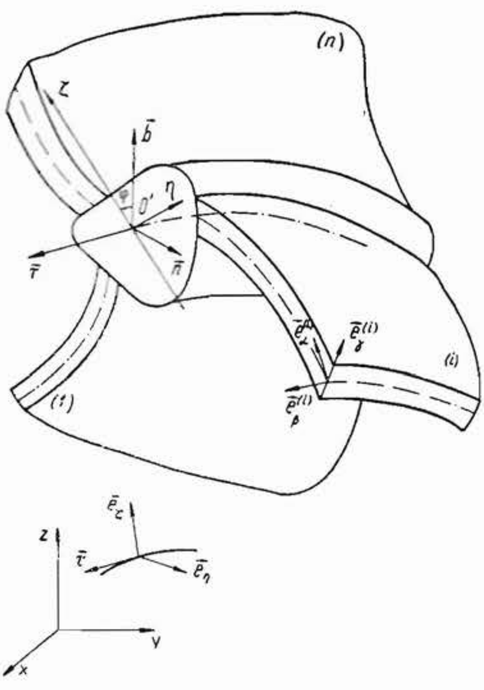

Рис. 1.

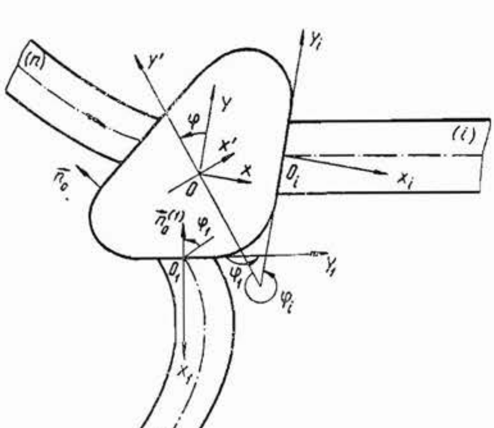

Рис. 2.