6. *Подстригач Я. С.* Влияние инородных включений на распределение температурных полей и напряжений в упругих телах. — Концентрация напряжений, 1965, вып. 1, с. 207—218.
7. *Подстригач Я. С., Коляно Ю. М.* Обобщенная термомеханика. — Киев : Наук. думка, 1976.—310 с.
8. *Подстригач Я. С., Коляно Ю. М* . Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках. — Киев : Наук. думка, 1972.—308 с.
9. *Подстригач Я. С., Чернуха Ю. А., Войтович Н. И.* К определению температурных полей и напряжений в оболочках, сопряженных через стержень. — В кн.: Математические методы в термомеханике. Киев : Наук. думка, 1978, с. 3—11.
10. *Подстригач Я. С. Шевчук П. Р.* О напряженно-деформированном состоянии нагреваемых упругих тел, содержащих включения в виде тонких оболочек. — Прикл. механика, 1967, 3, № 6, с. 8—16.
11. *Подстригач Я. С., Швец Р. Н.* Термоупругость тонких оболочек. — Киев : Наук. думка, 1978.—343 с.
12. *Тимошенко С. П.* Сопротивление материалов: В 2-х т. — М. : Наука, 1965.— Т. 1. 363 с.

Ин-т прикладных проблем
механики и математики АН УССР.
Львов

Получено 15.02.84

УДК 539.377

В. С. Попович

УРАВНЕНИЯ ТЕРМОУПРУГОСТИ АРМИРОВАННЫХ ПЛАСТИНАМИ ИЗОТРОПНЫХ ТЕЛ

Рассмотрим тело, армированное слоями конечной толщины (рисунок). Физико-механические характеристики такого тела можно представить в виде [5]

$$p(z) = p_1 + (p_0 - p_1) \sum_{i=1}^{n} N_i(z), \tag{1}$$

где $N_i(z) = S_-(z - h_i + h) - S_+(z - h_i - h)$; p_1, p_0 — физико-механические характеристики основного материала и материала армирующих слоев; h_i — координата срединной плоскости i-го слоя; n — количество армирующих слоев; $S_\pm(\xi)$ — асимметричные единичные функции [2].

Подставив коэффициент теплопроводности $\lambda_t(z)$, удельную теплоемкость $c(z)$ и плотность $\rho(z)$, представленные в виде (1), в уравнение теплопроводности неоднородного тела [1], учитывая при этом, что в виде (1) представляется и любая комбинация характеристик, а коэффициенты Ляме $\lambda(z)$, $\mu(z)$ и температурный коэффициент линейного расширения $\alpha_t(z)$, представленные аналогично,— в уравнения движения неоднородного тела [1], после некоторых преобразований приходим к уравнениям термоупругости армированных тел с коэффициентами типа ступенчатых и импульсных функций:

$$\Delta t + \frac{\lambda_t^{(0)} - \lambda_t^{(1)}}{\lambda_t^{(1)}} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial t}{\partial z}\Big|_{z=h_i^-} \delta_-(z - h_i^-) - \frac{\partial t}{\partial z}\Big|_{z=h_i^+} \delta_+(z - h_i^+) \right] =$$

$$= \left[\frac{1}{a_1} + \left(\frac{1}{a_0} - \frac{1}{a_1} \right) \sum_{i=1}^{n} N_i(z) \right] \dot{t} - \left[\frac{1}{\lambda_t^{(1)}} + \left(\frac{1}{\lambda_t^{(0)}} - \frac{1}{\lambda_t^{(1)}} \right) \sum_{i=1}^{n} N_i(z) \right] w_t, \tag{2}$$

$$\Delta u + (1 + \omega_\lambda) \frac{\partial e}{\partial x} + \frac{\mu_0 - \mu_1}{\mu_1} \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)\Big|_{z=h_i^-} \delta_-(z - h_i^-) - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)\Big|_{z=h_i^+} \delta_+(z - h_i^+) \right] = \omega_\beta \frac{\partial \Theta}{\partial x} + \omega_\rho \ddot{u} \quad (x,\ u \rightleftarrows y,\ v),$$

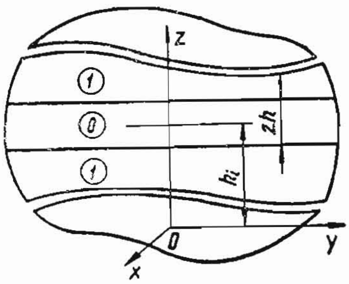
$$\Delta w + (1+\omega_\lambda)\frac{\partial e}{\partial z} + 2\,\frac{\mu_0-\mu_1}{\mu_1}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial w}{\partial z}\bigg|_{z=h_i^-}\delta_-\left(z-h_i^-\right) -\right.$$

$$\left. - \frac{\partial w}{\partial z}\bigg|_{z=h_i^+}\delta_+\left(z-h_i^+\right)\right] + \frac{\lambda_0-\lambda_1}{\mu_1}\sum_{i=1}^{n}\left[e\Big|_{z=h_i^-}\delta_-\left(z-h_i^-\right) -\right.$$

$$\left. - e\Big|_{z=h_i^+}\delta_+\left(z-h_i^-\right)\right] = \omega_\beta\frac{\partial\theta}{\partial z} + \omega_\rho\ddot{w} +$$

$$+ \frac{\beta_0-\beta_1}{\mu_1}\sum_{i=1}^{n}\left[\Theta\Big|_{z=h_i^-}\delta_-\left(z-h_i^-\right) - \Theta\Big|_{z=h_i^+}\delta_+\left(z-h_i^+\right)\right], \tag{3}$$

где $\omega_\alpha = \frac{\alpha_1}{\mu_1} + \left(\frac{\alpha_0}{\mu_0} - \frac{\alpha_1}{\mu_1}\right)\sum_{i=1}^{n} N_i(z)$ $(\alpha = \lambda,\ \beta,\ \rho)$; $a_j\,(j = 0,\ 1)$ — коэффициенты температуропроводности;



$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2};\quad \delta_\pm(\xi) = \frac{dS_\pm(\xi)}{d\xi};$$

$$h_i^\pm = h_i \pm h;$$

$e = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$ — объемная деформация; $\beta_j = (2\mu_j + 3\lambda_j)\,\alpha_t^{(j)}$; $\Theta = t - t_0$ — приращение температуры тела; t_0 — температура естественного состояния тела; w_t — плотность источников тепла; точкой сверху обозначена производная по времени.

В случае, когда основной и армирующий материалы являются металлами [3] или их коэффициенты Пуассона ν_j незначительно отличаются друг от друга, выражение ω_λ сильно упрощается и принимает вид $\omega_\lambda = (1 - 2\nu)^{-1}$.

Рассмотрим теперь случай армирования тела тонкими пластинками. Поскольку толщина армирующих пластин мала по сравнению с другими размерами рассматриваемого кусочно-однородного тела, то, осуществив в представлениях коэффициента теплопроводности $\lambda_t(z)$, объемной теплоемкости $c_v(z) = c(z)\rho(z)$, коэффициентов Ляме $\mu(z)$, $\lambda(z)$, плотности $\rho(z)$ и $\beta(z)$ предельный переход при $h\to 0$ [4], учитывая также, что

$$\lim_{h\to 0}\frac{S_-(z-h_i+h) - S_+(z-h_i-h)}{2h} = \delta(z-h_i),$$

и сохраняя приведенную теплопроводность армирующих пластин $\Lambda_0 = 2h\lambda_t^{(0)}$, плотность $\Omega_0 = 2h\rho_0$ и жесткость армирующих пластин на растяжение — сжатие $g_0 = 2hE_0$ (E — модуль Юнга), получим

$$\lambda_t(z) = \lambda_t^{(1)} + \Lambda_0(1-K_\lambda)\sum_{i=1}^{n}\delta(z-h_i),\quad c_v(z) = c_v^{(1)} + C_0(1-K_c)\ \times$$

$$\times\sum_{i=1}^{n}\delta(z-h_i), \tag{4}$$

$$\mu(z) = \mu_1 + M_0(1-K_\mu)\sum_{i=1}^{n}\delta(z-h_i),\quad \lambda(z) = \lambda_1 + L_0(1-K_L)\sum_{i=1}^{n}\delta(z-h_i),$$

$$\beta(z) = \beta_1 + B_0(1-K_\beta)\sum_{i=1}^{n}\delta(z-h_i),\quad \rho(z) = \rho_1 + \Omega_0(1-K_\rho)\sum_{i=1}^{n}\delta(z-h_i), \tag{5}$$

где

$$C_0 = c_0\Omega_0;\quad M_0 = \frac{g_0}{2(1+\nu_0)};\quad L_0 = \frac{\nu_0 g_0}{(1+\nu_0)(1-2\nu_0)};\quad B_0 = \frac{g_0\alpha_t^0}{1-2\nu_0};$$

$$K_\lambda = \frac{\lambda_t^{(1)}}{\lambda_t^{(0)}};\quad K_c = \frac{c_v^{(1)}}{c_v^{(0)}};\quad K_\mu = \frac{\mu_1}{\mu_0};\quad K_L = \frac{\lambda_1}{\lambda_0};\quad K_\rho = \frac{\rho_1}{\rho_0};\quad K_\beta = \frac{\beta_1}{\beta_0}.$$

Подставив выражение (4) в уравнение теплопроводности неоднородного тела [1], а (5) — в соотношения Дюгамеля — Неймана [3], а затем полученный результат — в уравнения движения неоднородного тела [1], после некоторых преобразований приходим к следующим уравнениям термоупругости с сингулярными коэффициентами для тел, армированных тонкими пластинками:

$$\Delta t + \Lambda \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \right) \Big|_{z=h_i} \delta (z - h_i) = \frac{1}{a_1} \dot{t} +$$

$$+ C \sum_{i=1}^{n} \dot{t} \Big|_{z=h_i} \delta (z - h_i) - \Lambda \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial t}{\partial z} \Big|^{*}_{z=h_i} \delta' (z - h_i) - \frac{w_t}{\lambda_t^{(1)}}. \tag{6}$$

$$\mu_1 \Delta u + (\lambda_1 + \mu_1) \frac{\partial e}{\partial x} + M \sum_{i=1}^{n} \left[\left(2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) \Big|^{*}_{z=h_i} \delta (z - h_i) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \Big|^{*}_{z=h_i} \delta' (z - h_i) \right] + L \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial e}{\partial x} \Big|^{*}_{z=h_i} \delta (z - h_i) =$$

$$= \rho \ddot{u} + \Omega \sum_{i=1}^{n} \ddot{u} \Big|_{z=h_i} \delta (z - h_i) + B \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Theta}{\partial x} \Big|_{z=h_i} \delta (z - h_i) +$$

$$+ \beta_1 \frac{\partial \Theta}{\partial x} (x,\ u \rightleftarrows y,\ v),$$

$$\mu_1 \Delta w + (\lambda_1 + \mu_1) \frac{\partial e}{\partial z} + M \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \Big|^{*}_{z=h_i} \delta (z - h_i) + \right.$$

$$\left. + 2 \frac{\partial w}{\partial z} \Big|^{*}_{z=h_i} \delta' (z - h_i) \right] + L \sum_{i=1}^{n} e \Big|^{*}_{z=h_i} \delta' (z - h_i) = \rho_1 \ddot{w} + \beta_1 \frac{\partial \Theta}{\partial z} +$$

$$+ \Omega \sum_{i=1}^{n} \ddot{w} \Big|_{z=h_i} \delta (z - h_i) + B \sum_{i=1}^{n} \Theta \Big|_{z=h_i} \delta' (z - h_i). \tag{7}$$

Здесь введены обозначения:

$$\Lambda = \frac{\Lambda_0}{\lambda_t^{(1)}} (1 - K_\lambda); \quad C = \frac{c_0}{\lambda_t^{(1)}} (1 - K_c); \quad M = M_0 (1 - K_\mu); \quad L = L_0 (1 - K_L);$$

$$\Omega = \Omega_0 (1 - K_\rho); \quad B = B_0 (1 - K_\beta); \quad \varphi \Big|^{*}_{z=l} = \frac{1}{2} [\varphi |_{z=l+0} + \varphi |_{z=l-0}];$$

$\delta (\xi)$, $\delta' (\xi)$ — функция Дирака и ее производная.

Уравнения (2), (3) или (6), (7) с соответствующими краевыми и начальными условиями представляют собой систему уравнений, позволяющую ставить и решать задачу термоупругости для изотропных тел, армированных слоями конечной толщины или тонкими пластинками.

1. *Коляно Ю. М., Попович В. С.* Термоупругость многослойных тел. — Докл. АН УССР. Сер. А, 1975, № 12, с. 1112—1117.
2. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. — М. : Наука, 1973.—832 с.
3. *Мелан Э., Паркус Г.* Температурные напряжения, вызываемые стационарными температурными полями. — М. : Физматгиз, 1958.—167 с.
4. *Подстригач Я. С., Коляно Ю. М.* Уравнения обобщенной термоупругости для тел с тонкими включениями. — Докл. АН СССР, 1975, **224**, № 4, с. 794—797.
5. *Попович В. С.* Термоупругость кусочно-однородных тел с плоско-параллельными границами раздела : Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. — Львов, 1978.— 21 с.

Ин-т прикладных проблем
механики и математики АН УССР,
Львов

Получено 16.05.84