УДК 539.3

Г. Е. Багдасарян

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ МАГНИТОУПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН

В работе исходя из основных положений асимптотического метода В. В. Болотина предложен способ исследования спектра частот магнитоупругих колебаний прямоугольных пластин в продольном магнитном поле.

1. Пусть упругая изотропная пластина постоянной толщины $2h$ отнесена к декартовой системе координат x_1, x_2, x_3 так, что срединная плоскость недеформированной пластины совпадает с координатной плоскостью x_1x_2. Пластина изготовлена из материала конечной постоянной электропроводностью σ и колеблется в вакууме при наличии постоянного магнитного поля с заданным вектором напряженности $\vec{H}(H_1, H_2, 0)$.

Рассматриваемые вопросы исследуются на основе предположений: а) магнитные и диэлектрические проницаемости материала пластины считаются равным единице; б) влияние токов смещения на характеристики магнитоупругих колебаний не учитывается; в) следующей гипотезы [2] о характере изменения упругих перемещений по толщине пластины и компонент индуцированного электромагнитного поля по толщине бесконечного слоя $|x_3|<h$:

$$u_1 = -x_3\frac{\partial w}{\partial x_1}, \quad u_2 = -x_3\frac{\partial w}{\partial x_2}, \quad u_3 = w \text{ при } |x_3|<h, \ (x_1, x_2)\in\Omega, \tag{1}$$
$$e_1=\varphi, \ e_2=\psi, \ h_3=f \text{ при } |x_3|<h, \ -\infty<(x_1, x_2)<\infty.$$

Здесь $w(x_1, x_2, t)$ — искомый прогиб пластины; (u_1, u_2, u_3) — компоненты вектора перемещений произвольной точки пластины; $\varphi(x_1, x_2, t)$, $\psi(x_1, x_2, t)$ — искомые тангенциальные компоненты индуцированного в бесконечном слое $|x_3|<h$ электрического поля $\vec{e}(e_1, e_2, e_3)$; $f(x_1, x_2, t)$ — искомая нормальная компонента индуцированного в бесконечном слое $|x_3|<h$ магнитного поля $\vec{h}$ (h_1, h_2, h_3); Ω — область плоскости $x_3=0$, ограниченная контуром Γ пластины.

Соотношения (1), когда $|x_3|<h$ и $(x_1, x_2)\in\Omega$, представляют математическую формулировку гипотезы магнитоупругости тонких тел [1].

На основе принятых предположений в работе [2], получена следующая система двумерных интегро-дифференциальных уравнений относительно искомых функций:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}+\delta\frac{4\pi\sigma}{c}\left(\psi+\frac{H_1}{c}\frac{\partial w}{\partial t}\right)=0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial x_1}+\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}=-\frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t},$$
$$\frac{\partial F}{\partial x_2}-\delta\frac{4\pi\sigma}{c}\left(\varphi-\frac{H_2}{c}\frac{\partial w}{\partial t}\right)=0, \tag{2}$$
$$D\Delta^2 w+2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\frac{2\sigma h}{c}\left[H_1\left(\psi+\frac{H_1}{c}\frac{\partial w}{\partial t}\right)-H_2\left(\varphi-\frac{H_2}{c}\frac{\partial w}{\partial t}\right)\right]=0,$$

причем в первых трех уравнениях $-\infty<x_1, x_2<\infty$, а в четвертом — $(x_1, x_2)\in\Omega$.

В уравнениях (2) $D=2Eh^3/3(1-\nu^2)$ — цилиндрическая жесткость; E — модуль упругости; ν — коэффициент Пуассона; ρ — плотность материала пластины; Δ — двумерный оператор Лапласа; c — скорость света в вакууме;

$$F=f+\frac{1}{2\pi h}\iint\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\xi_1, \xi_2, t)\,d\xi_1 d\xi_2}{\sqrt{(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2}}; \quad \delta=\begin{cases}1 & \text{при } (x_1, x_2)\in\Omega,\\ 0 & \text{при } (x_1, x_2)\bar{\in}\Omega.\end{cases} \tag{3}$$

К системе уравнений (2) в каждой конкретной задаче необходимо присоединить обычные условия закрепления краев пластины, начальные условия и условия на бесконечности.

Поскольку точное решение сформулированной задачи в общем случае сопряжено с почти непреодолимыми математическими трудностями, то для определения частот магнитоупругих колебаний пластины в основном следует применять приближенные методы. В случае диэлектрической пластины ($\sigma=0$) асимптотический метод В. В. Болотина [5, 6] оказался особенно удобным при исследовании всего спектра частот для широкого класса граничных условий. Поэтому следует ожидать, что и в случае проводящих пластин ($\sigma\neq0$) в присутствии магнитного поля указанный метод окажется эффективным.

Для применения асимптотического метода целесообразно из первых трех уравнений системы (2) путем применения интегрального преобразования Фурье определить функции φ, ψ, f, выраженные через прогиб пластины [3]. Здесь при определении компонент φ, ψ, f индуцированного электромагнитного поля принимается, что пластина бесконечна. В этом случае прогиб пластины представляется в виде

$$w = w_0 e^{i\omega t} e^{-i(\bar{k}_1 x_1 + \bar{k}_2 x_2)}, \tag{4}$$

где ω — частота магнитоупругих колебаний; $\bar{k}_1 = \operatorname{Re} k_1$; $\bar{k}_2 = \operatorname{Re} k_2$; k_1, k_2 — комплексные волновые числа.

Подставляя (4) в первые три уравнения системы (2), для функций φ и ψ найдем выражения

$$\varphi = \frac{1}{ck}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{4\pi\sigma H_2}{c^2}\frac{\partial w}{\partial t} - \alpha\frac{\partial}{\partial x_1}\left(H_2\frac{\partial w}{\partial x_1} - H_1\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)\right],$$

$$\psi = \frac{1}{ck}\frac{\partial}{\partial t}\left[\alpha\frac{\partial}{\partial x_2}\left(H_1\frac{\partial w}{\partial x_2} - H_2\frac{\partial w}{\partial x_1}\right) - \frac{4\pi\sigma H_1}{c^2}\frac{\partial w}{\partial t}\right], \tag{5}$$

$$k = \frac{4\pi\sigma}{c^2} i\omega + \alpha(\bar{k}_1^2 + \bar{k}_2^2), \quad \alpha = 1 + [h(\bar{k}_1^2 + \bar{k}_2^2)]^{-1}. \tag{6}$$

После подстановки (5) в неиспользованное четвертое уравнение системы (2) задача магнитоупругих колебаний пластины приводится к решению следующего уравнения:

$$D\Delta^2 w + 2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{2\sigma h}{c^2 k}\frac{\partial}{\partial t}\left(H_1^2\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + 2H_1H_2\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} + H_2^2\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right) = 0 \tag{7}$$

(в которое входят неизвестные волновые числа k_1, k_2) при обычных условиях закрепления краев пластины.

В случае идеально проводящей пластины ($\sigma \to \infty$) уравнение (7) в силу (6) принимает вид

$$D\Delta^2 w + 2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{1}{2\pi}\left(h + \frac{1}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}}\right)\left(H_1^2\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + 2H_1H_2\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} + H_2^2\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right) = 0, \tag{8}$$

где волновые числа k_1 и k_2 вследствие отсутствия диссипации являются действительными.

2. До сих пор при получении уравнения (7) или (8) волновые числа k_1 и k_2 считались заданными. Найдем эти величины и частоты магнитоупругих колебаний пластины путем применения асимптотического метода, развитого в работах [5—7]. Для простоты и наглядности в дальнейшем указанный метод будем применять относительно уравнения (8) (случай идеального проводника). Рассмотрим магнитоупругие колебания прямоугольной в плане идеально проводящей пластины со сторонами a и b в магнитном поле $\vec{H}(H_1, 0, 0)$.

Условия на контуре пластины будем пока считать произвольными. Уравнение колебаний пластины (8) в этом случае имеет вид

$$\Delta^2 w - \gamma H_1^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{2\rho h}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad \gamma = \frac{1}{2\pi D}\left(h + \frac{1}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}}\right). \tag{9}$$

Подстановкой

$$w(x_1, x_2, t) = W(x_1, x_2)\, e^{i\omega t},$$

где ω — частота магнитоупругих колебаний, уравнение (9) приводим к виду

$$\Delta^2 W - \gamma H_1^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} - \frac{2\rho h}{D}\, \omega^2 W = 0. \tag{10}$$

Рассмотрим выражение [3—5]

$$W = A \sin k_1 (x_1 - \xi_{11}) \sin k_2 (x_2 - \xi_{21}), \tag{11}$$

в котором A, ξ_{11}, ξ_{21} — некоторые постоянные. Это выражение удовлетворяет уравнению (10) и соответствует частоте

$$\omega^2 = \frac{D}{2\rho h}\left[(k_1^2 + k_2^2)^2 + \frac{H_1^2 k_1^2}{2\pi D}\left(h + \frac{1}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}}\right)\right], \tag{12}$$

но, вообще говоря, не удовлетворяет граничным условиям.

Приближенное решение задачи будет найдено [5—7], если окажется возможным построение четырех решений уравнения (10) (в котором ω определяется согласно (12)), каждое из которых будет удовлетворять двум граничным условиям на одной из границ пластины и будет приближаться к «внутреннему» решению (11) по мере удаления от границы.

Решение, удовлетворяющее граничным условиям при $x_1 = 0$, будем искать в виде [5—7]

$$W_{11} = X_{11}(x_1) \sin k_2 (x_2 - \xi_{21}). \tag{13}$$

Подстановка выражения (13) в (10) с учетом (12) приводит к уравнению

$$\frac{d^4 X_{11}}{dx_1^4} - \left(2k_2^2 + \gamma H_1^2\right) \frac{d^2 X_{11}}{dx_1^2} - k_1^2 \left(k_1^2 + 2k_2^2 + \gamma H_1^2\right) X_{11} = 0,$$

общее решение которого имеет вид

$$X_{11} = c_{11} \exp\left[-x_1 \left(k_1^2 + 2k_2^2 + \gamma H_1^2\right)^{1/2}\right] + a_{11} \sin k_1 (x_1 - \xi_{11}) + $$
$$+ b_{11} \exp\left[x_1 \left(k_1^2 + 2k_2^2 + \gamma H_1^2\right)^{1/2}\right]. \tag{14}$$

Потребуем, чтобы решение (13) стремилось при $x_1 \to \infty$ к «внутреннему» решению (11). Требование это будет удовлетворено, если в (14) положить $b_{11} = 0$ и $a_{11} = A$. Тогда решение (13) принимает вид

$$W_{11} = \{c_{11} \exp\left[-x_1 \left(k_1^2 + 2k_2^2 + \gamma H_1^2\right)^{1/2}\right] + $$
$$+ A \sin k_1 (x_1 - \xi_{11})\} \sin k_2 (x_2 - \xi_{21}). \tag{15}$$

С возрастанием x_1 решение (15) приближается к «внутреннему» решению (11), а входящие в него две константы c_{11} и ξ_{11} позволяют удовлетворить двум условиям на границе $x_1 = 0$. Тем же путем можно получить следующее решение:

$$W_{12} = \{c_{12} \exp\left[-(a - x_1)\left(k_1^2 + 2k_2^2 + \gamma H_1^2\right)^{1/2}\right] + $$
$$+ A \sin k_1 (a - x_1 - \xi_{12})\} \sin k_2 (x_2 - \xi_{21}), \tag{16}$$

удовлетворяющее граничным условиям при $x_1 = a$ и стремящееся к «внутреннему» решению (11) по мере удаления от этой границы.

Аналогичным образом записываются решения W_{21} и W_{22}, удовлетворяющие граничным условиям на остальных сторонах контура и приближающиеся к решению (11) во внутренней области пластины.

Неизвестные волновые числа k_1 и k_2, отвечающие рассматриваемой задаче, можно найти, «склеивая» решения, удовлетворяющие граничным условиям на противоположных сторонах контура пластины [5—7]. С точностью до затухающего экспоненциального члена условия «склеивания» решений (15) и (16), а также W_{21} и W_{22} запишутся в виде [5—7]

$$k_1 a = k_1(\xi_{11} + \xi_{12}) + n\pi, \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$
$$k_2 b = k_2(\xi_{21} + \xi_{22}) + m\pi, \quad m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{17}$$

Величины ξ_{ik}, входящие в уравнения (17), определяются из граничных условий на контуре пластины. Имея эти величины, волновые числа k_1 и k_2 найдутся из решения системы уравнений (17). Подставляя полученные таким путем значения волновых чисел в формулу (12), вычисляем соответствующую частоту магнитоупругих колебаний.

3. В качестве примера рассмотрим колебания по цилиндрической поверхности удлиненной пластины, длинные стороны которой жестко защемлены ($b \to \infty$, $k_2 = 0$). В этом случае, удовлетворяя граничным условиям, для неизвестных ξ_{11} и ξ_{12} найдем

$$\xi_{11} = \xi_{12}, \quad \operatorname{tg} k_1 \xi_{11} = k_1 \left[k_1^2 + \frac{H_1^2}{2\pi D}\left(h + \frac{1}{k_1}\right)\right]^{-1/2}. \tag{18}$$

Подставляя (18) в уравнение (17), получим следующие уравнения относительно волнового числа k_1:
для симметричных форм колебаний

$$\operatorname{ctg} \frac{k_1 a}{2} = -k_1 \left[k_1^2 + \frac{H_1^2}{2\pi D}\left(h + \frac{1}{k_1}\right)\right]^{-1/2}, \tag{19}$$

для антисимметричных форм колебаний

$$\operatorname{tg} \frac{k_1 a}{2} = k_1 \left[k_1^2 + (H_1^2/\, 2\pi D)\left(h + \frac{1}{k_1}\right)\right]^{-1/2}. \tag{20}$$

Численные значения $2^{-1} \cdot k_1 a$ корней уравнений (19) и (20) приведены в табл. 1, в которой $\alpha = 10^{-4} H_1$, а m определяет форму колебания пластины. Для расчета принято $E = 7 \cdot 10^{11}$ дин/см^2, $\nu = 0{,}36$ (отожженный алюминий).

Таблица 1

m	$\frac{2h}{a} = 10^{-3}$			$\frac{2h}{a} = 5 \cdot 10^{-3}$			$\frac{2h}{a} = 10^{-2}$		
	α								
	0	0,5	1	0	0,5	1	0	0,5	1
1	2,35	1,59	1,58	2,35	1,90	1,72	2,35	2,24	2,03
2	3,92	3,21	3,17	3,92	3,76	3,54	3,92	3,90	3,83
3	5,49	4,84	4,77	5,49	5,43	5,29	5,49	5,48	5,46
4	7,06	6,48	6,38	7,06	7,03	6,95	7,06	7,06	7,05
5	8,63	8,12	7,99	8,63	8,62	8,57	8,63	8,63	8,62

Из табл. 1 видно, что зависимость волнового числа k_1 от напряженности магнитного поля является существенной в случае тонких пластин и это влияние более ощутимо для низших форм колебаний. При $m \geqslant 4$ и $2h/a \geqslant 10^{-2}$ этим влиянием можно пренебрегать и использовать следующие известные решения уравнений (19) и (20) в случае диэлектрической пластины [5]:

$$k_1 = \frac{2m+1}{2}\pi/a. \tag{21}$$

Подставляя (21) в (12), получим формулу для определения частот высших форм магнитоупругих колебаний защемленной пластины-полосы. Эта формула с точностью $1+h/a \approx 1$ имеет вид

$$\omega_m = \omega_{0m}\left[1+\frac{48(1-\nu^2)}{\pi^4 E}\left(\frac{a}{2h}\right)^3 \frac{H_1^2}{(2m+1)^3}\right]^{1/2},$$

$$\omega_{0m} = \frac{\pi^2}{a^2}\left(m+\frac{1}{2}\right)^2 \sqrt{\frac{Eh^2}{3\rho(1-\nu^2)}}, \tag{22}$$

где ω_{0m} — частоты собственных колебаний в отсутствие магнитного поля [5].

Формула (22) показывает, что чем выше форма колебаний, тем меньше влияние магнитного поля.

Для сравнения в табл. 2 приведены значения величины $\omega_1[\rho h a^4/8D]^{1/2}$ (где ω_1 — первая частота магнитоупругих колебаний пластины), найденные на основе точного решения [4], по формуле (12), в которой учитывается зависимость волнового числа от напряженности магнитного поля, и по формуле (22), не учитывающей указанной зависимости. Приведены также расхождения между результатами точного решения и по формулам (12) и (22).

Таблица 2

Решение и расхождение в решениях	$\frac{2h}{a} = 10^{-2}$			$\frac{2h}{a} = 5\cdot 10^{-3}$		
	$10^{-4}\,H$, Э					
	0,5	1,0	3,0	0,5	1,0	3,0
Точное	6,38	8,31	19,28	10,33	18,27	52,54
По формуле (12)	6,21	8,09	19,40	10,19	18,37	52,69
По формуле (22)	6,70	9,33	22,50	11,97	21,93	63,88
Расхождение между точным решением и по (12), %	2,66	2,65	0,62	1,35	0,56	0,28
Расхождение между точным решением и по (22), %	5,02	12,27	16,70	15,88	20,03	21,58

Примечание. Для всех случаев $m = 1$.

Табл. 2 свидетельствует, во-первых, о необходимости учета влияния зависимости волнового числа от напряженности магнитного поля и, во-вторых, о достаточной точности асимптотической формулы (12) для расчета частот магнитоупругих колебаний.

В заключение отметим, что ширина области динамического краевого эффекта, а также неувязка «склеивания» решений (15) и (16) в рассматриваемом случае имеют порядок

$$\exp\left\{-k_1 x_1\left[1+\frac{3(1-\nu^2)H_1^2}{4\pi E}\left(\frac{a}{2h}\right)^3\left(\frac{2}{k_1 a}\right)^3\right]^{1/2}\right\}. \tag{23}$$

Используя данные табл. 1, из (23) легко заметить, что при помощи магнитного поля можно существенно уменьшить ширину области динамического краевого эффекта и более точно удовлетворить условию «склеивания» соответствующих решений.

1. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.* Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. — М. : Наука, 1977.—272 с.
2. *Багдасарян Г. Е.* О приведении трехмерной задачи магнитоупругости тонких пластин к двумерной. — Учен. зап. Ерев. ун-та, 1977, № 2, с. 32—48.

3. *Багдасарян Г. Е.* Об уравнениях магнитоупругости тонких пластин в постоянном магнитном поле. — Там же, 1983, № 3, с. 47—52.
4. *Багдасарян Г. Е., Акопян П. З.* Магнитоупругие колебания проводящей пластинки в постоянном магнитном поле. — В кн.: Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред. Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1984, с. 17—22.
5. *Болотин В. В.* Динамический краевой эффект при упругих колебаниях пластинок. — Инж. сб., 1960, 31, с. 3—14.
6. *Болотин В. В., Макаров Б. П., Мишенков Г. В., Швейко Ю. Ю.* Асимптотический метод исследования спектра собственных частот упругих пластинок. — Расчеты на прочность, 1960, вып. 6, с. 231—253.
7. *Кудравцев Е. П.* Применение асимптотического метода для исследования собственных колебаний упругих прямоугольных пластин. — Там же, 1964, вып. 10, с. 352—362.

Ин-т механики
АН АрмССР, Ереван

Получено 23.07.84

УДК 539.3 : 538.569

А. Р. Гачкевич, Р. Ф. Терлецкий

МЕХАНИЧЕСКИЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ПРЕДВАРИТЕЛЬНО ПОДОГРЕТОЙ ПЛАСТИНЕ НИЗКОЙ ЭЛЕКТРОПРОВОДИМОСТИ ВО ВНЕШНЕМ ГАРМОНИЧЕСКОМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

Определяются температурные поля и напряжения в пластине низкой электропроводимости, находящейся в электрическом поле плоского конденсатора, между обкладками которого поддерживается разность потенциалов $\varphi|_{z=1} - \varphi|_{z=-1} = U_0 e^{i\omega t}$, где z — безразмерная координата, отнесенная к полутолщине пластины h; U_0 — напряжение; ω — круговая частота; t — время. Пластина предварительно подогрета, и начальное распределение температуры по толщине является заданным $(T|_{t=0} = f(z))$.

Примем, что механические напряжения обусловлены начальным неоднородным распределением температуры, а также усредненными по периоду колебаний электромагнитной волны тепловыделениями, вызванными поляризацией в переменном электромагнитном поле, и джоулевыми тепловыделениями. В связи с наибольшей чувствительностью к изменению температуры электрофизических характеристик будем считать, что зависят от температуры лишь эти характеристики, а теплофизические и физико-механические — постоянны и равны приведенным. При этом электрофизические характеристики считаем также функциями частоты, известными из эксперимента. В такой постановке определение искомых величин сводится к совместному решению уравнений электродинамики и теплопроводности при известных тепловых источниках [1] и дальнейшему нахождению напряженного состояния из уравнений квазистатической термоупругости.

Отличную от нуля составляющую напряженности электрического поля в пластине находим в квазиустановившемся приближении, т. е. в виде $E = E_0(z, t) e^{i\omega t}$, где $E_0(z, t)$ – малоизменяющаяся на периоде колебания $T = 2\pi/\omega$ функция [2]. Тогда исходная система уравнений вынужденной электростатики [6], описывающая электрическое поле плоского конденсатора, будет

$$E = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}, \ \frac{\partial D}{\partial z} = 0, \tag{1}$$

где $D = \varepsilon E$ — электрическая индукция [5]; $\varepsilon = \varepsilon' - i\varepsilon''^{\circ}$; $\operatorname{tg}{}^{\circ}\delta = \varepsilon''^{\circ}/\varepsilon'$ — тангенс угла диэлектрических потерь, связанных лишь с поляризацией в переменном электромагнитном поле. Выражение для усредненной по периоду колебаний электромагнитной волны мощности тепловых источников, полученное на основании теоремы Пойнтинга в комплексной форме [5], с учетом представления E, а также малой изменяемости