5. *Подстригач Я. С., Бурак Я. И., Кондрат В. Ф.* Магнитотермоупругость электропроводных тел. — Киев : Наук. думка, 1982.—296 с.

Московское высшее техническое
училище им. М. Э. Баумана

Получено 10.04.84

УДК 539.3

В. А. Осадчук, С. Я. Олейник

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ПОЛОГОЙ ИЗОТРОПНОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С СИСТЕМОЙ РАЗРЕЗОВ ПО МЕРИДИАНУ И ПАРАЛЕЛЛИ

В данной работе рассматривается задача об упругом равновесии пологой изотропной сферической оболочки с двумя взаимодействующими разрезами, один из которых расположен вдоль меридиана, другой — вдоль дуги окружности. Предполагается, что противоположные берега разрезов загружены одинаковыми по абсолютной величине и противоположно направленными усилиями и моментами и в процессе деформации не контактируют между собой. Путем моделирования оболочки с разрезами сплошной оболочкой с сосредоточенными на месте разрезов внутренними источниками напряжений, обусловливающими скачки перемещений и углов поворота на разрезах [2, 3], с применением аппарата обобщенных функций задача приводится к системе восьми сингулярных интегрально-дифференциальных уравнений.

Отнесем срединную поверхность рассматриваемой оболочки к полярной системе координат (ξ, β), где $\xi = r/R\sqrt{c}$ — безразмерный полярный радиус $(c = h/R\sqrt{3(1-\nu^2)})$; R и $2h$ — радиус и толщина оболочки; ν — коэффициент Пуассона; β — полярный угол. Тогда систему разрешающих дифференциальных уравнений, учитывающих наличие источников собственных напряжений, запишем в виде

$$\frac{1}{D_0Rc}\nabla^2\nabla^2\varphi - \nabla^2 w = -RF_1^0(\xi, \beta),$$
$$\nabla^2\varphi + \frac{D_1}{Rc}\nabla^2\nabla^2 w = -D_1RF_2^0(\xi, \beta). \tag{1}$$

Здесь φ и w — функции напряжений и прогибов;

$$F_1^0(\xi, \beta) = \nabla^2\varepsilon_{22}^0 - \left(\frac{1}{\xi}\partial_1 - \partial_2^2\right)(\varepsilon_{11}^0 - \varepsilon_{22}^0) - \left(\partial_1 + \frac{1}{\xi}\right)\partial_2\varepsilon_{12}^0;$$

$$F_2^0(\xi, \beta) = \nabla^2(\varkappa_{11}^0 + \nu\varkappa_{22}^0) + (1-\nu)\left[\left(\frac{1}{\xi}\partial_1 - \partial_2^2\right)(\varkappa_{11}^0 - \varkappa_{22}^0) + 2\left(\partial_1 + \frac{1}{\xi}\right)\partial_2\varkappa_{12}^0\right]; \tag{2}$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{\xi}\partial_1(\xi\partial_1) + \partial_2^2;\ \partial_1 = \frac{\partial}{\partial\xi};\ \partial_2 = \frac{1}{\xi}\frac{\partial}{\partial\beta};$$
$$D_0 = 2Eh;\ D_1 = D_0R^2c^2;$$

ε_{ij}^0, $\varkappa_{ij}^0$ $(i, j = 1, 2)$ — усредненные по толщине оболочки компоненты деформаций (дисторсий), обусловливающих собственные напряжения. При этом отдельные усилия и моменты в оболочке определяются формулами, приведенными в работе [2, 3].

Пусть расположены вдоль отрезков разрезы:

а) по меридиану $\beta = 0$, $\xi_1 \leqslant \xi \leqslant \xi_2$;

б) по дуге окружности $\xi = \xi_0$, $|\beta| \leqslant \beta_0$. (3)

В этом случае с использованием соотношений, устанавливающих связь между деформациями и перемещениями, и с учетом того, что перемещения

u, v, w и углы поворота θ_1, θ_2 претерпевают скачки при переходе через линии разрезов, путем дифференцирования последних как обобщенных функций для компонент деформаций ε_{ij}^0, $\varkappa_{ij}^0$ получаем выражения: когда разрез расположен на линии $\xi = \xi_0$, $|\beta| \leqslant \beta_0$ —

$$\varepsilon_{11}^0(\xi, \beta) = \varepsilon_1(\beta)\delta(\xi - \xi_0), \quad \varepsilon_{12}^0(\xi, \beta) = \varepsilon_3(\beta)\delta(\xi - \xi_0);$$

$$\varkappa_{11}^0(\xi, \beta) = \varkappa_1(\beta)\delta(\xi - \xi_0) + \xi_0\varkappa_4(\beta)\partial_1\delta(\xi - \xi_0),$$

$$\varkappa_{22}^0(\xi, \beta) = \varkappa_4(\beta)\delta(\xi - \xi_0),$$

$$\varkappa_{12}^0(\xi, \beta) = \varkappa_3(\beta)\delta(\xi - \xi_0) \text{ при } |\beta| < \beta_0; \tag{4}$$

$$\varepsilon_{ij}^0 = (\xi, \beta) = \varkappa_{ij}^0(\xi, \beta) = 0 \text{ при } |\beta| \geqslant \beta_0 \ (i, j = 1, 2), \varepsilon_{22}^0(\xi, \beta) = 0,$$

где

$$\varepsilon_1(\beta) = \frac{1}{R\sqrt{c}}[u(\beta)]; \ \varepsilon_3(\beta) = \frac{1}{R\sqrt{c}}[v(\beta)];$$

$$\varkappa_1(\beta) = -\frac{1}{R\sqrt{c}}[\theta_1(\beta)]; \ \varkappa_3(\beta) = -\frac{1}{R\sqrt{c}}[\theta_2(\beta)];$$

$$\varkappa_4(\beta) = \int \varkappa_3(\beta)d\beta; \ [f(\beta)] = f^+(\xi_0 + 0, \beta) - f^-(\xi_0 - 0, \beta);$$

когда разрез расположен на линии $\beta = 0$, $\xi_1 \leqslant \xi \leqslant \xi_2$ —

$$\varepsilon_{22}^0(\xi, \beta) = \varepsilon_5(\xi)\delta(\beta), \ \varepsilon_{12}^0(\xi, \beta) = \varepsilon_7(\xi)\delta(\beta), \ \varkappa_{12}^0(\xi, \beta) = \varkappa_7(\xi)\delta(\beta),$$

$$\varkappa_{22}^0(\xi, \beta) = \varkappa_5(\xi)\delta(\beta) + \varkappa_8(\xi)\partial_2\delta(\beta) \text{ при } \xi_1 < \xi < \xi_2; \tag{5}$$

$$\varepsilon_{22}^0(\xi, \beta) = \varepsilon_{12}^0(\xi, \beta) = \varkappa_{12}^0(\xi, \beta) = \varkappa_{22}^0(\xi, \beta) = 0 \text{ при } \xi_2 \leqslant \xi \leqslant \xi_1,$$

$$\varepsilon_{11}^0(\xi, \beta) = \varkappa_{11}^0(\xi, \beta) = 0,$$

где

$$\varepsilon_5(\xi) = \frac{1}{R\sqrt{c}}\frac{1}{\xi}[v(\xi)]; \ \varepsilon_7(\xi) = \frac{1}{R\sqrt{c}}\frac{1}{\xi}[u(\xi)];$$

$$\varkappa_5(\xi) = -\frac{1}{R^2c}\frac{1}{\xi}[\theta_2(\xi)]; \ \varkappa_7(\xi) = -\frac{1}{R^2c}\frac{1}{\xi}\left([\theta_1(\xi)] - \frac{1}{\xi}[w(\xi)]\right);$$

$$\varkappa_8(\xi) = \int \varkappa_7(\xi)d\xi; \quad [f(\xi)] = f^+(\xi, +0) - f^-(\xi, -0).$$

Знаками $+$ и $-$ отмечены граничные значения функций на берегах разреза $x + 0$ и $x - 0$ соответственно.

Решение системы дифференциальных уравнений (2) будем искать в виде

$$f = f_1 + f_2 \ (f = \varphi, w), \tag{6}$$

где функции φ_1, w_1 — решение этой системы, соответствующее полю деформаций (4), а φ_2, w_2 — полю (5). Воспользовавшись далее фундаментальным решением разрешающей системы уравнений [2] и операцией свертки, для разрешающих функций φ_i, w_i ($i = 1, 2$) получим следующие интегральные представления:

$$q_i = \frac{c_i}{2\pi}\int_{-\beta_0}^{\beta_0}\{-\varepsilon_1(\theta)\Phi_i(\xi, \eta) + \varepsilon_3(\theta)\Phi_{i+2}(\xi, \eta) +$$

$$+ Rc[\varkappa_1(\theta)F_i(\xi, \eta) + \varkappa_3(\theta) F_{i+2}(\xi, \eta)]\}\xi_0 d\theta, \tag{7}$$

$$p_i = \frac{c_i}{2\pi}\int_{\xi_1}^{\xi_2}\{\varepsilon_5(\zeta)\Phi_{i+4}(\xi - \zeta, \beta) + \varepsilon_7(\zeta)\Phi_{i+6}(\xi - \zeta, \beta) +$$

$$+ Rc[\varkappa_5(\zeta)F_{i+4}(\xi - \zeta, \beta) + \varkappa_7(\zeta)F_{i+6}(\xi - \zeta, \beta)]\}d\zeta \quad (i = 1, 2),$$

где $q_1 = w_1$; $q_2 = \varphi_1$; $p_1 = w_2$; $p_2 = \varphi_2$;

$$c_2 = D_1/c; \quad c_1 = R; \quad \Phi_i(\xi, \eta) = \psi_i(r_0)g_1 - \psi_{i+2}(r_0);$$

$$\Phi_{i+2}(\xi, \eta) = \psi_i(r_0)g_2; \ \Phi_{i+4}(\xi - \zeta, \beta) = (-1)^i\psi_{i+5}(\rho) +$$

$$+\psi_i(\rho)g_3-\psi_{i+2};\quad \Phi_{i+6}=\psi_i(\rho)g_4;$$

$$F_i(\xi,\ \eta)=\psi_{11-i}(r_0)+(-1)^{i+1}\mu(\psi_{3-i}(r_0)g_1-\psi_{5-i}(r_0));$$

$$F_{i+2}(\xi,\ \eta)=(-1)^i\mu\psi_{3-i}(r_0)g_2+\int\limits_0^\eta\left[\frac{d\psi_{11-i}(r_0)}{dr_0}g_5\right]d\eta;$$

$$F_{i+4}(\xi-\zeta,\ \beta)=\nu\psi_{11-i}(\rho)+(-1)^i(\psi_{3-i}(\rho)-\psi_{5-i}(\rho));$$

$$F_{i+6}(\xi-\zeta,\ \beta)=(-1)^i\mu\psi_{3-i}(\rho)g_4-\int\limits_\xi^\zeta\left[\frac{d\psi_{11-i}(\rho)}{d\rho}g_6\right]d\zeta;$$

$$\psi_1(x)=\frac{1}{x^2}+\frac{2\ker' x}{x}+\operatorname{kei} x;\ \psi_2(x)=\frac{2\operatorname{kei}' x}{x}-\ker x;\ \psi_3(x)=\frac{1}{x^2}+\frac{\ker' x}{x};$$

$$\psi_4(x)=\frac{\operatorname{kei}' x}{x};\quad \psi_9(x)=\operatorname{kei} x;\quad \psi_{10}(x)=\ker x;$$

$$g_1=\frac{\xi^2\sin^2\eta}{r_0^2};\ g_2=\frac{(\xi^2\cos\eta-\xi\xi_0)\sin\eta}{r_0^2};\ g_3=\frac{\xi^2\sin^2\beta}{\rho^2};$$

$$g_4=\frac{(\xi^2\cos\beta-\xi\zeta)\sin\beta}{\rho^2};\ g_5=\frac{\xi\xi_0\cos\eta-\xi_0^2}{r_0};\ g_6=\frac{\xi\sin\beta}{\rho};$$

$$r_0^2=\xi^2+\xi_0^2-2\xi\xi_0\cos\eta;\ \rho^2=\xi^2+\zeta^2-2\xi\zeta\cos\beta;$$

$$\eta=\beta-\theta;\ \mu=1-\nu;\ \operatorname{kei}' x=\frac{d}{dx}\operatorname{kei}x;\ \ker' x=\frac{d}{dx}\ker x;$$

$\operatorname{kei} x$, $\ker x$ — функции Кельвина.

Подставляя теперь выражения (7) в (6), а затем в формулы для усилий и моментов [2,3], получим значения затухающих на «бесконечности» усилий и моментов в произвольной точке оболочки, обусловленные суммарным воздействием скачков перемещений и углов поворота на линиях разрезов.

Удовлетворяя затем граничным условиям на берегах разрезов, получаем систему сингулярных интегрально-дифференциальных уравнений для определения неизвестных плотностей скачков перемещений и углов поворота на линиях разрезов:

$$\begin{gathered}\int\limits_{-\beta_0}^{\beta_0}\left[-\frac{d\Psi_j(\theta)}{d\theta}a_jS_1(\eta)+\sum_{i=1}^{4}\Psi_i(\theta)K_{ji}\right]\xi_0 d\theta+\\+\int\limits_{\xi_1}^{\xi_2}\left[\sum_{i=5}^{8}\Psi_i(\zeta)K_{ji}\right]d\zeta=l_j(\beta)\quad (j=\overline{1,\ 4}),\\ \int\limits_{-\beta_0}^{\beta_0}\left[\sum_{i=1}^{4}\Psi_i(\theta)K_{ji}\right]\xi_0 d\theta+\int\limits_{\xi_1}^{\xi_2}\left\{-\frac{d\Psi_i(\zeta)}{d\zeta}a_iS_2(\xi-\zeta)+\right.\\ \left.+\sum_{i=5}^{8}\Psi_i(\zeta)K_{ji}\right\}d\zeta=l_j(\xi)\quad (j=\overline{5,\ 8}).\end{gathered}\tag{8}$$

Здесь обозначено:

$$\Psi_1(\theta)=\varepsilon_1(\theta);\quad \Psi_2(\theta)=\varepsilon_3(\theta);\quad \Psi_3(\theta)=\varkappa_1(\theta);$$

$$\Psi_4(\theta)=\varkappa_3(\theta);\quad \Psi_5(\zeta)=\varepsilon_5(\zeta);\quad \Psi_6(\zeta)=\varepsilon_7(\zeta);$$

$$\Psi_7(\zeta)=\varkappa_5(\zeta);\quad \psi_8(\zeta)=\varkappa_7(\zeta);\quad S_1(\eta)=\operatorname{ctg}\frac{\eta}{2};$$

$$S_2(\xi-\zeta)=\frac{1}{\xi-\zeta};\ a_1=a_2=\frac{1}{4\xi_0^2};\ a_3=a_4=\frac{Rca}{4\xi_0^2};$$

$$a_5=a_6=\frac{1}{2};\ a_7=a_8=\frac{1}{2}Rca;\ a=3-2\nu-\nu^2;$$

$$K_{12}=\frac{1}{4\xi_0^2}\operatorname{ctg}\frac{\eta}{2}+K_{12}^0;\ K_{21}=-K_{12};$$

$$K_{34}=\frac{aRc}{4\xi_0^2}\operatorname{ctg}\frac{\eta}{2}+RcK_{34}^0;\ K_{43}=-K_{34};$$

$$K_{ij}=K_{ij}^0\ (i=\overline{1,\ 8},\ j=1,\ 2,\ 5,\ 6);$$

$$K_{ij}=RcK_{ij}^0\ \ (i=\overline{1,\ 8},\ \ j=3,\ 4,\ 7,\ 8);$$

$$l_1(\beta)=b_1f_1^{(1)}(\beta);\ l_2(\beta)=b_1f_2^{(1)}(\beta);\ l_3(\beta)=b_2f_3^{(1)}(\beta);$$

$$l_4(\xi)=b_2f_4^{*(1)}(\beta)+c_1;\ \ l_5(\xi)=b_1f_1^{(2)}(\xi);\ \ l_6(\xi)=b_1f_2^{(2)}(\xi);$$

$$l_7(\xi)=b_2f_3^{(2)}(\xi);\ \ \ l_8(\xi)=b_2f_4^{*(2)}(\xi)+c_2;$$

$$b_1=2\pi/D_0;\ \ \ b_2=2\pi/D_0Rc;\ \ \ f_4^{*(1)}(\beta)=\int f_4^{(1)}(\beta)\,\xi_0 d\beta;$$

$$f_4^{*(2)}(\xi)=\int f_4^{(2)}(\xi)\,d\xi.$$

Ядра $K_{ij}^0(i,\ j=\overline{1,\ 8})$ — непрерывные функции, которые определяются формулами:
при $\xi=\xi_0$ —

$$K_{i,j}^0=(-1)^iL_i\Phi_{2j}^*,\ \ \ K_{i,j+2}^0=L_iF_{2j},\ \ \ K_{i+4,j}^0=L_i\Phi_{2j+4},$$

$$K_{i,j+6}^0=L_iF_{2j+4}\ \ (i=1,\ 2),\ \ K_{ij}^0=(-1)^iL_i\Phi_{2j-1},\ \ K_{i,j+2}^0=L_iF_{2j-1}^*,$$

$$K_{i,j+4}^0=L_i\Phi_{2j+3},\ \ \ K_{i,j+6}^0=L_iF_{2j+3}\ \ (i=3,\ 4);$$

при $\beta=0$ —

$$K_{i,j}^0=(-1)^iL_i\Phi_{2j},\ \ \ K_{i,j+2}^0=L_iF_{2j},\ \ K_{i,j+4}^0=L_i\Phi_{2j+4}^*,$$

$$K_{i,j+6}^0=L_iF_{2j+4}\ \ (i=5,\ 6),\ \ K_{ij}^0=(-1)^iL_i\Phi_{2j-1},\ \ K_{i,j+2}^0=L_iF_{2j-1},$$

$$K_{i,j+4}^0=L_i\Phi_{2j+3},\ \ K_{i,j+6}^0=L_iF_{2j+3}^*\ \ (i=7,\ 8;\ j=1,\ 2),$$

$$L_1=\frac{1}{\xi}\,\partial_1+\partial_2^2,\ \ L_2=\frac{1}{\xi}\,\partial_2-\partial_1\partial_2,\ \ L_3=-(L_5+\nu L_1),$$

$$L_4=(1-\nu)\,L_2-\int\limits_0^\beta[\partial_1\nabla^2]\,\xi_0 d\beta,\ \ L_5=\partial_1^2,\ \ \ L_6=L_2,\ \ \ L_7=-(L_1+\nu L_5),$$

$$L_8=(1-\mu)\,L_2-\int\limits_\zeta^\xi[\partial_2\nabla^2]\,d\xi,$$

$$\Phi_i^*=\Phi_i-\Phi_i^0,\ \ \ F_i^*=F_i-F_i^0,\ \ \ \Phi_2^0=\frac{1}{2}\,(g_1+\ln r_0),$$

$$\Phi_4^0=\frac{1}{2}\,g_2,\ \ F_1^0=-\ln r_0+\mu\Phi_2^0,\ \ F_3^0=-\mu\Phi_4^0-\int\limits_0^\beta g_5 d\beta,$$

$$\Phi_6^0=\ln\rho-\frac{1}{2}\,(g_3+\ln\rho),\ \ \Phi_8^0=\frac{1}{2}\,g_4,$$

$$F_5^0=-\nu\ln\rho-\frac{\mu}{2}\,(g_3+\ln\rho),\ \ F_7^0=-\frac{\mu}{2}\,g_4+\int\limits_0^\zeta g_6 d\zeta.$$

Постоянные c_1, c_2 находим из условий однозначности углов поворота

$$\int\limits_{-\beta_0}^{\beta_0}\varkappa_3(\theta)\,d\theta=0,\ \ \ \int\limits_{\xi_1}^{\xi_2}\zeta\varkappa_7(\zeta)\,d\zeta=0 \tag{9}$$

В новых переменных $s=\frac{1}{\lambda}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2},\ t=\frac{1}{\lambda}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2},$

$$x=k\xi+\alpha,\ y=k\xi+\alpha, \tag{10}$$

где $\lambda=\operatorname{tg}\frac{\beta_0}{2};\ \ \ k=2/(\xi_2-\xi_1);\ \alpha=\frac{\xi_1+\xi_2}{\xi_2-\xi_1},$

система интегрально-дифференциальных уравнений (8) принимает вид

$$\frac{P(s)}{4\xi_0}\int_{-1}^{1}\frac{\Psi_1'(t)}{t-s}dt-\frac{1}{2\xi_0}\int_{-1}^{1}\frac{\Psi_2(t)}{t-s}dt+\int_{-1}^{1}\left[\sum_{i=1}^{4}\Psi_i(t)K_{1i}(t,s)\right]dt+$$

$$+\int_{-1}^{1}\left[\sum_{i=5}^{8}\Psi_i(y)K_{1i}(s,\ y)\right]dy=l_1[\omega(s,\ 0)],$$

$$\frac{P(s)}{4\xi_0}\int_{-1}^{1}\frac{\Psi_2'(t)}{t-s}dt+\frac{1}{2\xi_0}\int_{-1}^{1}\frac{\Psi_1(t)}{t-s}dt+\int_{-1}^{1}\left[\sum_{i=1}^{4}\Psi_i(t)K_{2i}(t,\ s)\right]dt+$$

$$+\int_{-1}^{1}\left[\sum_{i=5}^{8}\Psi_i(y)K_{2i}(s,\ y)\right]dy=l_2[\omega(s,\ 0)], \tag{11}$$

$$\frac{RcaP(s)}{4\xi_0}\int_{-1}^{1}\frac{\Psi_3'(t)}{t-s}dt-\frac{Rca}{2\xi_0}\int_{-1}^{1}\frac{\Psi_4(t)}{t-s}dt+\int_{-1}^{1}\left[\sum_{i=1}^{4}\Psi_i(t)K_{3i}(t,\ s)\right]dt+$$

$$+\int_{-1}^{1}\left[\sum_{i=5}^{8}\Psi_i(y)K_{3i}(s,\ y)\right]dy=l_3[\omega(s,\ 0)],$$

$$\frac{RcaP(s)}{4\xi_0}\int_{-1}^{1}\frac{\Psi_4'(t)\,dt}{t-s}+\frac{Rca}{2\xi_0}\int_{-1}^{1}\frac{\Psi_3(t)}{t-s}dt+\int_{-1}^{1}\left[\sum_{i=1}^{4}\Psi_i(t)K_{4i}(t,\ s)\right]dt+$$

$$+\int_{-1}^{1}\left[\sum_{i=5}^{8}\Psi_i(y)K_{4i}(s,\ y)\right]dy=l_4[\omega(s,\ 0)],$$

$$\int_{-1}^{1}[\Psi_i(t)K_{ji}(x,\ t)]dt+a_jk\int_{-1}^{1}\frac{\Psi_j'(y)}{y-x}dy+\int_{-1}^{1}\left[\sum_{i=5}^{8}\Psi_i(y)K_{ji}(x,\ y)\right]dy=l_i(x)$$

$$(j=\overline{5,\ 8}).$$

Здесь

$$\Psi_i(t)=\Psi_i[\omega(0,\ t)]\ \ (i=1,\ 4);\ \ P(s)=\frac{1+\lambda^2s^2}{\lambda};$$

$$r(t)=\frac{2\lambda\xi_0}{1+\lambda^2t^2};\ f(t)=\frac{\lambda^2t}{1+\lambda^2t^2}\frac{1}{2\xi_0};\ \omega(s,\ t)=2\mathrm{arctg}\frac{\lambda(s-t)}{1+\lambda^2st}.$$

Если ввести обозначения $K_{ji}^0=r(t)K_{ji}^0$ $(j=\overline{1,8},\ i=\overline{1,4})$, то ядра можно записать так:

$$K_{12}=f(t)+K_{12}^0,\quad K_{34}=Rc\left(af(t)+K_{34}^0\right),$$

$$K_{ij}^0=\frac{1}{k}K_{ij}^0\ \ (j=\overline{1,8},\ i=\overline{5,8}),$$

где в выражениях K_{ji}^0 $(i,\ j=\overline{1,8})$ из (8) сделана замена переменных (10). При этом условия (9) в новых переменных имеют вид

$$\int_{-1}^{1}\Psi_4[\omega(0,\ t)]\frac{1}{1+\lambda^2t^2}dt=0,\quad \int_{-1}^{1}(y-\alpha)\Psi_8(y)\,dy=0. \tag{12}$$

Решение системы (11) построим с использованием метода механических квадратур [1]. С этой целью искомые функции выразим так:

$$\Psi_i(x)=\sqrt{1-x^2}\Psi_{0i}(x), \tag{13}$$

где $\Psi_{0i}(x)$ — ограниченные функции, которые представляются в виде разложений по полиномам Чебышева 2-го рода [1]:

$$\Psi_{0i}(x)=\frac{2}{n+1}\sum_{m=1}^{n}A_m^iU_{m-1}(x),$$

где $U_{m-1}(x)$ — многочлен Чебышева 2-го рода;

$$A_m^{(i)}=\sum_{\nu=1}^{n}\Psi_i(x,\ \nu)\sin\theta_\nu\ \ (i=\overline{1,\ 8}).$$

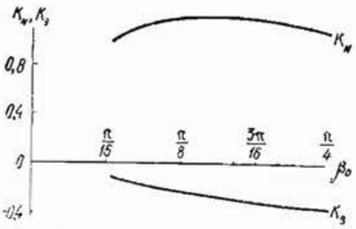
Используя далее квадратурные формулы

$$\int_{-1}^{1} \frac{\Psi_i'(\tau)\,d\tau}{x-\tau} = \frac{2}{n+1} \sum_{\nu=1}^{n} \Psi_i(x_\nu) \sum_{m=1}^{n} \frac{m \sin n\theta_\nu \sin m\theta}{\sin\theta},$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{\Psi_i(\tau)\,d\tau}{x-\tau} = \frac{2}{n+1} \sum_{\nu=1}^{n} \Psi_i(x_\nu) \sum_{m=1}^{n} \sin m\theta_\nu \cos m\theta,$$

где $\theta = \arccos x$, и применяя к регулярным интегралам формулу Гаусса, задачу о нахождении решения интегральных уравнений сводим к системе линейных алгебраичных уравнений.

Численный анализ задачи проведен при различных длинах трещин для следующих значений параметров оболочки: $R = 0{,}15$ м, $2h = 0{,}003$ м, $\nu = 0{,}3$. На рисунке графически изображена зависимость нормализованных коэффициентов интенсивности усилий $K_N = 1/(N_0 \sqrt{l}) \lim\limits_{r\to 0} \sqrt{2r} N$, $K_S = 1/(N_0 \sqrt{l}) \lim\limits_{r\to 0} \sqrt{2r}\, S$ (l — длина трещины) от длины круговой трещины в случае, когда ее берега загружены нормальными усилиями постоянной интенсивности ($f_1^{(1)}(\beta) = -N_0$).



Как видно из рисунка, значения коэффициента интенсивности нормальных усилий K_N значительно превышают значения коэффициента интенсивности сдвигающих усилий K_S. С увеличением длины криволинейной трещины величина коэффициента интенсивности сдвигающих усилий возрастает.

1. *Каландия А. И.* Математические методы двумерной упругости. — М.: Наука, 1973.—304 с.
2. *Осадчук В. А.* Напряженно-деформированное состояние и предельное равновесие оболочек с разрезами. — Киев: Наук. думка, 1985.—312 с.
3. *Подстригач Я. С., Осадчук В. А., Федюк Е. М., Николишин М. М.* Метод дисторсий в теории тонких оболочек с трещинами. — Мат. методы и физ.-мех. поля, 1975, вып. 1, с. 29—41.

Ин-т прикладных проблем
механики и математики АН УССР, Львов

Получено 09.01.85.

УДК 539.3

А. М. Краснов, Г. Я. Попов

ИЗГИБ И КРУЧЕНИЕ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОЙ КОНИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Полную систему уравнений, описывающую осесимметричное напряженное состояние конической оболочки, можно записать в виде [1]

$$\frac{d}{ds}(sN_s) - N_\theta = sq_s, \quad \frac{d}{ds}(sQ_s) - \frac{N_\theta}{\operatorname{ctg}\varphi} = sq_n, \quad \frac{d}{ds}(sM_s) - M_\theta + sQ_s = 0, \tag{1}$$

$$N_\theta = G\left[\nu \frac{du}{ds} + \frac{1}{s}(u + w \operatorname{tg}\varphi)\right], \; N_s = G\left[\frac{du}{ds} + \frac{\nu}{s}(u + w \operatorname{tg}\varphi)\right], \tag{2}$$

$$M_\theta = D\left(\nu \frac{d^2w}{ds^2} + \frac{1}{s}\frac{dw}{ds}\right), \; M_s = D\left(\frac{d^2w}{ds^2} + \frac{\nu}{s}\frac{dw}{ds}\right), \tag{3}$$

$$\frac{d}{ds}(sN_\theta) + N_\theta = sq_\theta, \; N_\theta = G(1-\nu)\, s \frac{d}{ds}\left(\frac{v}{s}\right), \tag{4}$$

$$G = Eh/(1-\nu^2), \; D = Eh^3/(1-\nu^2).$$

Здесь N_s, N_θ — продольные силы; Q_s — поперечная; M_s, M_θ — изгибающие моменты; u, v, w — перемещения в продольном, радиальном и нормальном направлениях соответственно; q_s, q_θ, q_n — функции, описывающие нагрузку,