УДК 512.64+512.55

В. М. Петричкович[✉]

СТАНДАРТНІ ФОРМИ МАТРИЦЬ НАД КІЛЬЦЯМИ ВІДНОСНО РІЗНИХ ТИПІВ ЕКВІВАЛЕНТНОСТЕЙ І ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ В ТЕОРІЇ ФАКТОРИЗАЦІЇ МАТРИЦЬ І МАТРИЧНИХ РІВНЯНЬ

Наведено огляд результатів досліджень одного з напрямків, що стосується еквівалентності матриць, започаткованого П. С. Казімірським і продовженого та розвиненого його учнями. Сформульовано стандартні форми поліноміальних матриць і їх скінченних наборів відносно напівскалярної еквівалентності та узагальненої еквівалентності пар матриць над кільцями. Наведено застосування таких стандартних форм при побудові методів факторизації матриць, розв'язуванні матричних рівнянь, опису структури розв'язків цих рівнянь, зокрема матричних рівнянь типу Сильвестра, матричних лінійних діофантових рівнянь і в інших задачах.

***Ключові слова**: поліноміальне кільце, адекватне кільце, еквівалентність, напівскалярна еквівалентність, узагальнена еквівалентність, канонічна форма, стандартна форма, факторизація матриць, матричне рівняння.*

Вступ. Відомі канонічні форми матриць над багатьма кільцями відносно класичного поняття еквівалентності, зокрема, встановлена Г. Смітом у 1861 році канонічна форма для матриць над кільцем цілих чисел, названа нормальною формою Сміта. Ця форма поширена багатьма авторами для матриць над іншими кільцями: над поліноміальними кільцями, головних ідеалів, адекватними кільцями тощо. При дослідженні багатьох задач виникають інші типи еквівалентностей матриць. Такими є, наприклад, елементарна еквівалентність матриць над певними кільцями [9], скалярна [30] або строга [4] та напівскалярна еквівалентності поліноміальних матриць [22, 35]. Задача про еквівалентність пар матриць розв'язана лише для пар матриць над полями [57, 70]. При послабленій еквівалентності пар і скінченних наборів матриць над деякими кільцями вдається побудувати простіші форми, які використовуються при розв'язуванні багатьох задач.

У цій статті зроблено огляд результатів досліджень одного з напрямків щодо еквівалентності матриць над кільцями, започаткованого П. С. Казімірським і продовженого та розвиненого його учнями. Наведено стандартні форми поліноміальних матриць і їх скінченних наборів відносно напівскалярної еквівалентності та пар матриць над кільцями щодо узагальненої еквівалентності. Із застосуванням стандартної форми поліноміальних матриць описано факторизації поліноміальних матриць. Досліджено структуру розв'язків матричних поліноміальних рівнянь типу Сильвестра та матричних лінійних діофантових рівнянь, зокрема, встановлено межі для степенів розв'язків цих матричних рівнянь і наведено умови єдиності таких розв'язків. На основі стандартної форми пар матриць над кільцями головних ідеалів та адекватними кільцями відносно узагальненої еквівалентності описано факторизації матриць, запропоновано методи розв'язування матричних лінійних різнобічних рівнянь над цими кільцями. Наведено часткові розв'язки та формули загальних розв'язків матричних рівнянь, а також застосування стандартних форм матриць в інших задачах, зокрема, при вивченні мультиплікативних властивостей канонічної діагональної форми матриць, розв'язуванні відомої проблеми подібності пар матриць над полем, дослідженні стабільного рангу кілець матриць.

1. Напівскалярна еквівалентність поліноміальних матриць. У зв'язку із задачею про виділення регулярних множників із поліноміальних матриць

[✉] vas_petrych@yahoo.com

$A(\lambda)$ П. С. Казімірський ввів таку еквівалентність: $QA(\lambda)R(\lambda) = B(\lambda)$, де Q − скалярна оборотна матриця, тобто матриця з елементами з поля $\mathbb{F}$, а $R(\lambda)$ − оборотна матриця над кільцем поліномів $\mathbb{F}[\lambda]$. Зрозуміло, що з поліноміальної матриці $A(\lambda)$ виділяється регулярний множник тоді й тільки тоді, коли такий множник виділяється із матриці $QA(\lambda)R(\lambda)$. Тому виникає задача побудови простих форм для поліноміальних матриць відносно такої еквівалентності. У статті [18] П. С. Казімірський ввів поняття квазіунітальної матриці, яка є узагальненням відомої унітальної поліноміальної матриці, і встановив такий результат.

Теорема 1. *У кожному класі неособливих еквівалентних поліноміальних матриць існує квазіунітальна поліноміальна матриця. Іншими словами, для довільної неособливої поліноміальної матриці* $A(\lambda)$ *з елементами з кільця поліномів* $\mathbb{C}[\lambda]$ *над полем комплексних чисел існують такі оборотні матриці* Q *і* $R(\lambda)$ *відповідно над полем* $\mathbb{C}$ *і кільцем поліномів* $\mathbb{C}[\lambda]$, *що поліноміальна матриця* $QA(\lambda)R(\lambda)$ *є квазіунітальною такого вигляду*:

$$D(\lambda) = QA(\lambda)R(\lambda) = \begin{Vmatrix} d_{11}(\lambda) & d_{12}(\lambda) & \dots & d_{1n}(\lambda) \\ d_{21}(\lambda) & d_{22}(\lambda) & \dots & d_{2n}(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{n1}(\lambda) & d_{n2}(\lambda) & \dots & d_{nn}(\lambda) \end{Vmatrix}, \tag{1}$$

де

$$\deg d_{11} \le \deg d_{22} \le \dots \le \deg d_{nn},$$

$$\deg d_{ij} < \deg d_{ii}, \qquad \deg d_{ji} < \deg d_{ii}, \qquad i, j = 1, 2, \dots, n, \qquad j > i.$$

Означення 1. Матриці $A(\lambda)$ і $B(\lambda)$ з $M(m, n, \mathbb{F}[\lambda])$ називають *напівскалярно еквівалентними*, якщо існують такі скалярна (з елементами із поля $\mathbb{F}$) матриця $U \in GL(m, \mathbb{F})$ і поліноміальна матриця $V(\lambda) \in GL(n, \mathbb{F}[\lambda])$, що $A(\lambda) = UB(\lambda)V(\lambda)$.

У праці [22] встановлено спеціальну трикутну форму з інваріантними множниками на головних діагоналях відносно напівскалярної еквівалентності неособливих або максимальних рангів поліноміальних матриць і їх скінченних наборів над алгебрично замкненим полем характеристики нуль. Цю форму у [33, 42] узагальнено і поширено для будь-яких поліноміальних матриць над довільним полем. Наведемо цю форму.

Через $D^A(\lambda)$ будемо позначати канонічну діагональну форму матриці $A(\lambda) \in M(m, n, \mathbb{F}[\lambda])$, $m \le n$, тобто

$$D^A(\lambda) = U(\lambda)A(\lambda)V(\lambda) = \operatorname{diag}(\mu_1^A(\lambda), \dots, \mu_r^A(\lambda), 0, \dots, 0),$$

$$\mu_r^A(\lambda) \ne 0, \qquad \mu_i^A(\lambda)_i \mid \mu_{i+1}^A(\lambda), \qquad i = 1, \dots, r,$$

де $U(\lambda) \in GL(m, \mathbb{F}[\lambda])$, $V(\lambda) \in GL(n, \mathbb{F}[\lambda])$, а $\mu_i^A(\lambda)$, $i = 1, \dots, r$, − інваріантні множники матриці $A(\lambda)$.

Теорема 2. *Нехай*

(***i***) $\mathbb{F}$ − *нескінченне поле*;

(***ii***) *якщо* $\mathbb{F}$ − *скінченне поле і* $\mathbb{F}_{d_r^A}$ − *поле розкладу полінома* $d_r^A(\lambda)$, *тобто* $d_r^A(\lambda) = \prod_{j=1}^{s} (\lambda - \alpha_j)^{t_j}$, $\alpha_j \in \mathbb{F}_{d_r^A}$, *і* $s < |\mathbb{F}|$, *де* $|\mathbb{F}|$ − *потужність поля* $\mathbb{F}$.

Нехай $A(\lambda) \in M(m, n, \mathbb{F}[\lambda])$, $m \le n$, $\operatorname{rang} A(\lambda) = r$, *тобто найбільший* *спільний дільник* $d_r^A(\lambda)$ *мінорів* r *-го порядку відмінний від нуля:* $d_r^A(\lambda) \neq 0$. *Тоді матриця* $A(\lambda)$ *напівскалярно еквівалентна до трикутної матриці* $T^A(\lambda)$, *тобто існують верхня унітрикутна матриця* $U \in GL(m, \mathbb{F})$ *і оборотна матриця* $V(\lambda) \in GL(n, \mathbb{F}[\lambda])$ *такі, що* $T^A(\lambda) = UA(\lambda)V(\lambda)$, *де матриця* $T^A(\lambda)$ *має один з таких виглядів:*

1°) *якщо* $\operatorname{rang} A(\lambda) = m$, то

$$T^A(\lambda) = \begin{Vmatrix} \mu_1^A(\lambda) & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ t_{21}(\lambda)\mu_1^A(\lambda) & \mu_2^A(\lambda) & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{m1}(\lambda)\mu_1^A(\lambda) & t_{m2}(\lambda)\mu_2^A(\lambda) & \dots & \mu_m^A(\lambda) & 0 & \dots & 0 \end{Vmatrix}, \tag{2}$$

де $\deg t_{ij} < \deg \mu_i^A - \deg \mu_j^A$, *якщо* $t_{ij}(\lambda) \neq 0$, $\deg \mu_i^A - \deg \mu_j^A > 0$, *і* $t_{ij}(\lambda) \equiv$ $\equiv 0$, *якщо* $\deg \mu_i^A - \deg \mu_j^A = 0$, $i, j = 1, \dots, m$, $i > j$;

2°) *якщо* $\operatorname{rang} A(\lambda) = r$ *і* $r < m$, *то*

$$T^A(\lambda) = \begin{Vmatrix} \mu_1^A(\lambda) & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ t_{21}(\lambda)\mu_1^A(\lambda) & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{r-1,1}(\lambda)\mu_1^A(\lambda) & \dots & \mu_{r-1}^A(\lambda) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ t_{r1}(\lambda)\mu_1^A(\lambda) & \dots & t_{r,r-1}(\lambda)\mu_{r-1}^A(\lambda) & t_{rr}(\lambda)\mu_r^A(\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{m1}(\lambda)\mu_1^A(\lambda) & \dots & t_{m,r-1}(\lambda)\mu_{r-1}^A(\lambda) & t_{mr}(\lambda)\mu_r^A(\lambda) & 0 & \dots & 0 \end{Vmatrix}, \tag{3}$$

де $(t_{rr}(\lambda), t_{r+1,r}(\lambda), \dots, t_{mr}(\lambda)) = 1$ *і* $\deg t_{ij} < \deg \mu_i^A - \deg \mu_j^A$, *якщо* $t_{ij}(\lambda) \neq 0$, $\deg \mu_i^A - \deg \mu_j^A > 0$ *і* $t_{ij}(\lambda) \equiv 0$, *якщо* $\deg \mu_i^A - \deg \mu_j^A = 0$, $i, j = 1, \dots, r-1$, $i > j$.

Трикутну матрицю $T^A(\lambda)$ вигляду (2) або (3) називають *стандартною формою* поліноміальної матриці $A(\lambda)$ відносно напівскалярної еквівалентності.

Наслідок 1. *Нехай* $A(\lambda) \in M(m, n, \mathbb{F}[\lambda])$, $m \leq n$, $\operatorname{rang} A(\lambda) = r$. *Якщо* $\deg d_r^A(\lambda) < |\mathbb{F}|$, *то матриця* $A(\lambda)$ *є напівскалярно еквівалентною до стандартної форми* $T^A(\lambda)$.

Зауважимо, що, коли $\mathbb{F}$ є скінченним полем і не виконуються умови (***ii***) теореми 2, то поліноміальна матриця $A(\lambda)$ може не зводитися напівскалярними еквівалентними перетвореннями до стандартної форми.

Встановлено також, що скінченний набір поліноміальних матриць спільними для всіх матриць набору лівими скалярними перетвореннями, тобто над полем $\mathbb{F}$, і окремими для кожної матриці набору правими еквівалентними перетвореннями над кільцем $\mathbb{F}[\lambda]$ зводиться до набору поліноміальних матриць стандартної форми.

Теорема 3. *Нехай задано набір поліноміальних матриць*

$$A_1(\lambda), \dots, A_k(\lambda), \tag{4}$$

де $A_i(\lambda) \in M(m, n_i, \mathbb{F}[\lambda])$, $m \leq n_i$, $\operatorname{rang} A_i(\lambda) = r_i$, $i = 1, \dots, k$.

Тоді за умов теореми 2 для кожної поліноміальної матриці з набору (4) *цей набір поліноміальних матриць напівскалярно еквівалентний до набору* $T^{A_1}(\lambda), \dots, T^{A_k}(\lambda)$ *матриць стандартної форми, тобто існують* *верхня унітрикутна матриця* $U \in GL(m,\mathbb{F})$ *і оборотні матриці* $V_i(\lambda) \in$ $\in GL(n_i,\mathbb{F}[\lambda])$ *такі, що* $T^{A_i}(\lambda) = UA_i(\lambda)V_i(\lambda)$, $i = 1,\ldots,k$, *є матрицями вигляду* (2) *або* (3).

Набагато пізніше (1999 р.) у [48] було розглянуто праву напівскалярну еквівалентність поліноміальних матриць і встановлено аналогічну трикутну форму для однієї поліноміальної матриці над нескінченним полем.

Зауважимо, що подібно до напівскалярної еквівалентності поліноміальних матриць у [26] введено поняття (z,k)-еквівалентності матриць і пар матриць над квадратичними кільцями $\mathbb{Z}[\sqrt{k}]$. У працях [14, 26, 59] встановлено, що матриці над квадратичними евклідовими кільцями та квадратичними кільцями головних ідеалів (z,k)-еквівалентними перетвореннями, тобто за допомогою елементарних рядкових операцій над кільцем цілих чисел $\mathbb{Z}$ і елементарних стовпцевих операцій над квадратичним кільцем $\mathbb{Z}[\sqrt{k}]$ зводяться до спеціальної нижньої трикутної форми з інваріантними множниками на головній діагоналі. Ця форма використана при розв'язуванні матричних лінійних різнобічних рівнянь над квадратичними кільцями.

2. Факторизація поліноміальних матриць. П. С. Казімірський, використовуючи квазіунітальну матрицю (1) і введене ним нове поняття – значення поліноміальної матриці на системі коренів полінома [15], розв'язав задачу розкладності на множники із заданими їх характеристичними поліномами матричних поліномів, коефіцієнтами яких є матриці n-го порядку над алгебрично замкненим полем характеристики нуль. Він встановив достатні умови існування лінійних унітальних дільників матричного полінома, а також довів, що ці умови є необхідними та достатніми, якщо характеристичні поліноми множників є взаємно простими або якщо їх найбільший спільний дільник є взаємно простим з найбільшим спільним дільником мінорів $(n-1)$-го порядку поліноміальної матриці. За цих самих умов він запропонував метод побудови унітальних дільників матричних поліномів і довів, що в цьому випадку унітальні дільники із заданими характеристичними поліномами визначаються єдиним чином і що ця єдиність має місце лише при вказаних умовах [5]. Отже, він цілком розв'язав задачу про виділення унітальних множників із матричного полінома у випадку, коли ці множники однозначно визначаються своїми характеристичними поліномами. У випадку неоднозначності унітальних дільників матричного полінома із заданими характеристичними поліномами задача про їх виділення залишалась нерозв'язаною. На основі встановленої спеціальної форми поліноміальних матриць і їх наборів над алгебрично замкненим полем характеристики нуль відносно напівскалярної еквівалентності [22] П. С. Казімірський розробив новий метод факторизації поліноміальних матриць над такими полями. Задача опису дільників матричного полінома звелася до задачі опису його дільників із наперед заданими їх канонічними діагональними формами. Сумісно з В. Р. Зеліском цю задачу вони розв'язали в часткових випадках, зокрема при певних обмеженнях на канонічні діагональні форми множників [12, 20, 21]. Остаточно задачу про виділення унітальних множників із матричних поліномів П. С. Казімірський розв'язав до кінця 70-х років минулого століття. При цьому він встановив критерій існування унітальних дільників із заданою канонічною діагональною формою для будь-якого матричного полінома над алгебрично замкненим полем характеристики нуль, а також запропонував метод безпосередньої побудови таких дільників. Як застосування цих результатів, він розробив метод розв'язування відповідних матричних поліноміальних рівнянь у загальному випадку [16, 19].

Як метод, що ґрунтується на поняттях власних і приєднаних векторів, що відповідають характеристичним кореням матричних поліномів і жорданових ланцюгів [54], так і метод, запропонований П. С. Казімірським, можна застосовувати до факторизацій матричних поліномів у випадку, коли основне поле є полем комплексних чисел чи будь-яким алгебрично замкненим полем характеристики нуль. Розв'язання задач факторизації матричних поліномів над довільним полем вимагало розробки принципово нових методів.

На основі встановленої стандартної форми поліноміальних матриць щодо напівскалярної еквівалентності у [36, 37, 42] запропоновано метод факторизації поліноміальних матриць над довільним полем.

Нехай $T^A(\lambda) = UA(\lambda)V(\lambda) = U(\lambda)D^A(\lambda)$ − стандартна форма вигляду (2) неособливої матриці $A(\lambda)$, де $U(\lambda)$ − нижня унітрикутна матриця. Очевидно, що матриця $A(\lambda)$ розкладається у добуток регулярних, зокрема унітальних множників, тоді й тільки тоді, коли такою є її трикутна форма $T^A(\lambda)$, а ліві унітальні дільники матриць $A(\lambda)$ і $T^A(\lambda)$ з перетворювальною матрицею U є подібними.

Нехай канонічна діагональна форма $D^A(\lambda)$ матриці $A(\lambda)$ зображується у вигляді добутку

$$D^A(\lambda) = \Phi(\lambda)\Psi(\lambda) = \operatorname{diag}(\varphi_1(\lambda), \ldots, \varphi_n(\lambda))\Psi(\lambda),$$

$$\varphi_i \mid \varphi_{i+1}, \qquad i = 1, \ldots, n, \qquad \sum_{i=1}^{n} \deg \varphi_i = sn, \tag{5}$$

і нехай $K(\lambda)$ − нижня унітрикутна параметрична матриця [11, 35]:

$$K(\lambda) = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \dfrac{\mu_2(\lambda)}{\mu_1(\lambda)} k_{21}(\lambda) & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\mu_n(\lambda)}{\mu_1(\lambda)} k_{n1}(\lambda) & \dfrac{\mu_n(\lambda)}{\mu_2(\lambda)} k_{n2}(\lambda) & \ldots & 1 \end{Vmatrix}.$$

Тут $k_{ij}(\lambda) = k_{ij}^{(r_{ij})}\lambda^{r_{ij}} + k_{ij}^{(r_{ij}-1)}\lambda^{r_{ij}-1} + \ldots + k_{ij}^{(0)}$, $r_{ij} = \deg \varphi_i - \deg \varphi_j - 1$, якщо $\psi_j(\lambda)$ не ділить $\psi_i(\lambda)$, $i > j$, і $k_{ij}(\lambda) \equiv 0$, якщо $\psi_j(\lambda)$ ділить $\psi_i(\lambda)$, $i > j$, де $k_{ij}^{(r_{ij})}$ − незалежні змінні. Отже, $K(\lambda)$ − матриця над кільцем $\mathbb{F}(k)[\lambda]$, де $\mathbb{F}(k)$ − розширення поля $\mathbb{F}$, одержане приєднанням до поля $\mathbb{F}$ параметрів $k_{ij}^{(r_{ij})}$, $i, j = 1, \ldots, n$, $i > j$.

Теорема 4. *Для матриці $A(\lambda)$ існує факторизація $A(\lambda) = B(\lambda)C(\lambda)$ з унітальною матрицею $B(\lambda)$, паралельна до факторизації* (5) *її канонічної діагональної форми $D^A(\lambda)$, тобто така, що $D^B(\lambda) = \Phi(\lambda)$, а матриця $C(\lambda)$ еквівалентна до $\Psi(\lambda)$, тоді й тільки тоді, коли матриця $U(\lambda)K(\lambda)\Phi(\lambda)$ регуляризується справа при деяких значеннях параметрів $k_{ij}^{(r_{ij})}$, $i, j = 1, \ldots, n$, $i > j$, матриці $K(\lambda)$, тобто існує матриця $V(\lambda) \in GL(n, P[\lambda])$ така, що $U(\lambda)K(\lambda)\Phi(\lambda)V(\lambda) = L(\lambda)$ є регулярною, зокрема унітальною матрицею. Якщо $L(\lambda)$ є унітальною матрицею, то $B(\lambda) = U^{-1}L(\lambda)U$ − лівий унітальний дільник матриці $A(\lambda)$.*

У [40] наведено досить простий спосіб регуляризації поліноміальних матриць стандартної форми над довільним полем і спосіб побудови регуляризованих матриць. Встановлено також умови єдиності паралельних факторизацій та унітальних дільників поліноміальних матриць над довільним полем.

Теорема 5. *Нехай* $A(\lambda) \in M(n, P[\lambda])$, $\operatorname{rang} A(\lambda) = r$. *Тоді*

(***i***) *факторизація* $A(\lambda) = B(\lambda)C(\lambda)$ *матриці* $A(\lambda)$ *з унітальним множником* $B(\lambda)$, *паралельна до факторизації* (5) *її канонічної діагональної форми* $D^A(\lambda)$ *є єдиною тоді й тільки тоді, коли* $\Psi(\lambda)$ *із факторизації* (5) *є* d*-матрицею*;

(***ii***) *унітальний дільник* $B(\lambda)$ *з канонічною діагональною формою* $D^B(\lambda) = \Phi(\lambda) = \operatorname{diag}(\varphi_1(\lambda), \ldots, \varphi_n(\lambda))$ *матриці* $A(\lambda)$ *є єдиним тоді й тільки тоді, коли* $(\mu_i^A, \varphi_n) = \varphi_i$, $i = 1, \ldots, r-1$.

Для факторизацій поліноміальних матриць над алгебрично замкненим полем характеристики нуль умови єдиності унітальних дільників із їх заданими характеристичними поліномами наведено в [5], а для унітальних дільників з канонічними діагональними формами − у [13].

3. Узагальнена еквівалентність пар матриць. Задача про еквівалентність пар матриць (A, B), тобто їх класифікація, встановлення канонічної форми відносно одних і тих самих еквівалентних перетворень для обох матриць A і B пари розв'язана лише для пар матриць над полем. K. Weierstrass [70] і L. Kronecker [57] встановили для таких пар нормальні форми. М. П. Кравчук [23, 24] розробив елементарний метод зведення пари матриць над полем до канонічної форми Кронекера. Ця задача для пар матриць над кільцями, як показав П. М. Гудивок [6], зводиться до відомої проблеми про подібність пар матриць над полем, тобто є «дикою» і її розв'язання є складним. Проте багато задач, зокрема про факторизацію матриць, в теорії зображень груп і скінченновимірних алгебр тощо, потребують вивчення еквівалентності пар і скінченних наборів матриць лише зі спільною односторонньою перетворювальною матрицею.

У [49] встановлено канонічну форму пари комплексних матриць (A_1, A_2) щодо наступного типу узагальненої еквівалентності − перетворення (Q, P_1, P_2), яке діє на пару матриць таким чином: $(A_1, A_2)(Q, P_1, P_2) = (QA_1P_1^{-1}, QA_2P_2^{-1})$, де Q − комплексна матриця, P_1, P_2 − дійсні оборотні матриці. Тому природно виникло поняття узагальненої еквівалентності пар і наборів матриць.

Надалі через R будемо позначати адекватне кільце, тобто R − область цілісності, в якій кожний скінченно породжений ідеал є головним і для кожного ненульового елемента $a \in R$ і кожного елемента $b \in R$ існують такі елементи $c, d \in R$, що $a = cd$, до того ж елемент c є взаємно простим із b, а кожний необоротний дільник d_i елемента d має необоротний спільний дільник із b [55].

Означення 2. Набори матриць $(A_1, \ldots, A_k)$ і $(B_1, \ldots, B_k)$, де $A_i, B_i \in M(m, n_i, R)$, $i = 1, \ldots, k$, називають *узагальнено еквівалентними*, якщо $A_i = UB_iV_i$ для деяких матриць $U \in GL(m, R)$ і $V_i \in GL(n_i, R)$, $i = 1, \ldots, k$.

У випадку, коли $n_1 = n_2 = \ldots = n_k = n$ і $V_1 = V_2 = \ldots = V_k = V$, це означення співпадає з класичним означенням еквівалентності наборів, зокрема пар матриць [4, 6].

Задача про узагальнену еквівалентність пар матриць над кільцями, як і задача про еквівалентність пар матриць, є «дикою» [6, 50]. Тому її повне розв'язання можливе лише в окремих випадках. У працях [31, 42, 63, 64] визначено простіші форми пар і наборів матриць щодо узагальненої еквівалентності та проілюстровано деякими застосуваннями. Наведемо їх.

Теорема 6. *Нехай* $A \in M(m, n_1, R)$, $B \in M(m, n_2, R)$, *і*

$$D^A = \operatorname{diag}(\mu_1^A, \ldots, \mu_r^A, 0, \ldots, 0), \qquad \mu_r^A \neq 0,$$

$$D^B = \operatorname{diag}(\mu_1^B, \ldots, \mu_s^B, 0, \ldots 0), \qquad \mu_s^B \neq 0$$

– канонічні діагональні форми матриць A *та* B, *і нехай* R_δ *– повна множина лишків за модулем* δ. *Без обмеження загальності можемо вважати, що* $s \geq r$. *Тоді пара матриць* (A, B) *узагальнено еквівалентна до пари* (D^A, T^B), *тобто* $UAV_1 = D^A$, $UAV_2 = T^B$, *для деяких матриць* $U \in GL(m, R)$ *та* $V_i \in GL(n_i, R)$, $i = 1, 2$, *де матриця* T^B *має один з таких виглядів*:

1°) *якщо* $s = r = m$, *то*

$$T^B = \begin{Vmatrix} \mu_1^B & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ t_{21}\mu_1^B & \mu_2^B & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ t_{m1}\mu_1^B & t_{m2}\mu_2^B & \ldots & \mu_m^B & 0 & \ldots & 0 \end{Vmatrix}, \tag{6}$$

і $t_{ij} \in R'_{\delta_{ij}}$, *де* $\delta_{ij} = \left(\frac{\mu_i^A}{\mu_j^A}, \frac{\mu_i^B}{\mu_j^B} \right)$, $i, j = 1, \ldots m$, $i > j$;

2°) *якщо* $r < s \leq m$, *то*

$$T^B = \begin{Vmatrix} \mu_1^B & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ t_{21}\mu_1^B & \mu_2^B & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ t_{r1}\mu_1^B & t_{r2}\mu_2^B & \ldots & \mu_r^B & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ t_{r+1,1}\mu_1^B & t_{r+1,2}\mu_2^B & \ldots & t_{r+1,r}\mu_r^B & \mu_{r+1}^B & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ t_{s1}\mu_1^B & t_{s2}\mu_2^B & \ldots & t_{sr}\mu_r^B & 0 & \ldots & \mu_s^B & 0 & \ldots & 0 \\ t_{s+1,1}\mu_1^B & t_{s+1,2}\mu_2^B & \ldots & t_{s+1,r}\mu_r^B & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ t_{m1}\mu_1^B & t_{m2}\mu_2^B & \ldots & t_{mr}\mu_r^B & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{Vmatrix}, \tag{7}$$

і $t_{ij} \in R'_{\delta_{ij}}$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, r$, $i > j$, *де*

$$\delta_{ij} = \begin{cases} \left(\frac{\mu_i^A}{\mu_j^A}, \frac{\mu_i^B}{\mu_j^B} \right), & i, j = 1, \ldots, r, \quad i > j, \\ \frac{\mu_i^B}{\mu_j^B}, & i = r+1, r+2 \ldots, s, \quad j = 1, \ldots, r, \\ 0, & i = s+1, s+2 \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, r; \end{cases}$$

3°) *якщо* $r = s < m$, *тоді*

$$T^B = \begin{Vmatrix} \mu_1^B & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ t_{21}\mu_1^B & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{r-1,1}\mu_1^B & \dots & \mu_{r-1}^B & 0 & 0 & \dots & 0 \\ t_{r1}\mu_1^B & \dots & t_{r,r-1}\mu_{r-1}^B & t_{rr}\mu_r^B(\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{m1}\mu_1^B & \dots & t_{m,r-1}\mu_{r-1}^B & t_{mr}\mu_r^B(\lambda) & 0 & \dots & 0 \end{Vmatrix}, \tag{8}$$

де $(t_{rr}, t_{r+1,r}, \dots, t_{mr}) = 1$, $t_{ij} \in R'_{\delta_{ij}}$, $\delta_{ij} = \left(\frac{\mu_i^A}{\mu_j^A}, \frac{\mu_i^B}{\mu_j^B}\right)$, $i, j = 1, \dots, r-1$, $i > j$.

Пару матриць (D^A, T^B), означену в теоремі 6, називаємо *стандартною формою пари матриць* (A, B) або *стандартною парою матриць*.

Із теореми 6 випливає, що стандартною формою пари матриць (A, B), для якої $(d_m^A, d_m^B) = 1$, є пара діагональних матриць (D^A, D^B) і ця стандартна форма є єдиною. У [64] наведено інші випадки, коли стандартна форма пари матриць визначається однозначно.

Якщо пара матриць (A, B) узагальнено еквівалентна до пари діагональних матриць (D^A, D^B), то кажемо, що пара (A, B) є *діагоналізовною* або має властивість діагональної редукції.

Наведемо умови узагальненої еквівалентності пар матриць.

Теорема 7. *Нехай* (D, T_1) *і* (D, T_2) *– пари матриць із* $M(n, R)$ *в стандартній формі, тобто* $D = \operatorname{diag}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$, $\varphi_n \neq 0$, $\varphi_i \mid \varphi_{i+1}$, $i = 1, \dots, n$, *а* T_1, T_2 *– нижні трикутні матриці з головними діагоналями*

$$\Psi = \operatorname{diag}(\psi_1, \dots, \psi_s, 0, \dots, 0), \quad \psi_i \mid \psi_{i+1}, \qquad i = 1, \dots, s.$$

Тоді пари матриць (D, T_1) *і* (D, T_2) *є узагальнено еквівалентними в тому й тільки тому випадку, коли матриці* $(\operatorname{adj} D)T_1$ *і* $(\operatorname{adj} D)T_2$ *еквівалентні, тобто* $F(\operatorname{adj} D)T_1 = (\operatorname{adj} D)T_2 Q$, *де* $F \in {}_{\Phi}GL(n, R)$ *і* $Q \in GL(n, R)$, *де* ${}_{\Phi}GL(n, R)$ *– підгрупа групи* $GL(n, R)$ *матриць* F *таких, що* $\Phi F = H\Phi$, $H \in GL(n, R)$, $\Phi = \operatorname{diag}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$.

У наступній теоремі сформулюємо критерій діагональної редукції пари матриць [35].

Теорема 8. *Нехай* $A, B \in M(n, R)$ *і* A *– неособлива матриця. Пара матриць* (A, B) *має властивість діагональної редукції щодо узагальненої еквівалентності тоді й тільки тоді, коли матриці* $(\operatorname{adj} A)B$ *і* $(\operatorname{adj} D^A)D^B$ *еквівалентні.*

4. Факторизація матриць над кільцями. Особливу увагу дослідників привертали факторизації матриць над поліноміальними кільцями $\mathbb{F}[\lambda]$, де $\mathbb{F}$ – поле, тобто факторизації поліноміальних матриць або, що теж саме, матричних поліномів. Розглядалися регулярні та унітальні дільники матричних поліномів та їх факторизації з регулярними і унітальними множниками. Це пов’язано з використанням таких факторизацій у багатьох розділах математики, зокрема в теорії диференціальних [28, 29] і матричних рівнянь [19, 42, 54]. Так, наявність лінійних унітальних дільників у характеристичній поліноміальній матриці матричного поліноміального рівняння свідчить про існування розв’язків цього матричного рівняння. Тому методи таких факторизацій поліноміальних матриць застосовують при розв’язуванні матричних поліноміальних рівнянь.

Методи факторизації матриць над іншими кільцями мало розроблені. З. І. Боревич [2] запропонував описувати факторизації матриць над кільцями головних ідеалів з множниками із заданими їх канонічними діагональними формами з точністю до асоційовності. Він встановив умови однозначності з точністю до асоційовності таких факторизацій матриць. У [45, 69] розглянуто факторизації матриць над кільцями елементарних дільників.

На основі встановленої стандартної форми пар матриць над кільцями головних ідеалів і адекватними кільцями, діагоналізації пар матриць відносно введеного поняття узагальненої еквівалентності, викладених у **п. 3**, у [7, 31, 39, 42] описано з точністю до асоційовності факторизації матриць над цими кільцями, зокрема паралельні до факторизацій канонічних діагональних форм матриць або (Φ,Ψ)-факторизації.

Нехай R – адекватне кільце, $A \in M(m,n)$, $m \le n$, $D^A = \operatorname{diag}(\mu_1^A,\dots,\mu_r^A,0,\dots 0)$, $\mu_r^A \ne 0$, – канонічна діагональна форма матриці A. Нехай матриця A розкладається на множники: $A = BC$, де $B \in M(m,k,R)$, $C \in M(k,n,R)$. Тоді цій факторизації матриці A відповідає така факторизація її канонічної діагональної форми D^A:

$$D^A = \Phi\Psi = \operatorname{diag}(\varphi_1,\dots,\varphi_s,0,\dots,0)\Psi\ ,$$

де Φ – є d-матрицею, тобто $\varphi_i \mid \varphi_{i+1}$, $i=1,\dots,s$, і $D^B = \operatorname{diag}(\varphi_1,\dots,\varphi_s,0,\dots 0)$. Очевидно, матриця B із цієї факторизації матриці A є еквівалентною до матриці Φ. Якщо ж і матриця C еквівалентна до матриці Ψ, то таку факторизацію матриці A називають *паралельною* до факторизації її канонічної діагональної форми D^A або (Φ,Ψ)-факторизацією.

У [39] наведено умови, коли кожна факторизація матриці A є (Φ,Ψ)-факторизацією. Цю властивість мають досить широкі класи матриць. Такими є, зокрема, матриці простої структури, тобто матриці, елементарні дільники яких є простими, матриці над областями головних ідеалів, визначники яких розкладні на прості множники степенів не більших, ніж два, тощо.

У наступній теоремі наведено вигляд (Φ,Ψ)-факторизацій матриці A.

Теорема 9. *Нехай $A \in M(m,n,R)$ і D^A – її канонічна діагональна форма*

$$D^A = UAV = \operatorname{diag}(\mu_1^A,\dots,\mu_r^A,0,\dots 0), \qquad \mu_r^A \ne 0\ , \tag{9}$$

де $U \in GL(m,R)$, $V \in GL(n,R)$. Нехай D^A зображена у вигляді добутку

$$D^A = \Phi\Psi = \operatorname{diag}(\varphi_1,\dots,\varphi_s,0,\dots,0)\operatorname{diag}(\psi_1,\dots,\psi_r,0,\dots,0)\ , \tag{10}$$

де $\Phi \in M(m,R)$ є d-матрицею, тобто $\varphi_i \mid \varphi_{i+1}$, $i=1,\dots,s$, і $\Psi \in M(m,n,R)$. Тоді факторизації $A = B_iC_i$ матриці A, де $B_i = U_i^{-1}\Phi$, $C_i = \Psi V_i^{-1}$ і U_i, V_i – матриці, що задовольняють співвідношення (9), *є всі, з точністю до асоційовності, (Φ,Ψ)-факторизаціями матриці A, відповідними до факторизації* (10) *її канонічної діагональної форми D^A.*

У наступному твердженні встановлено критерій єдиності (Φ,Ψ)-факторизацій матриць.

Теорема 10. *Нехай $A \in M(m,n,R)$, $\operatorname{rang} A = r$, і канонічна діагональна форма D^A матриці A розкладається на множники*:

$$D^A = \Phi\Psi = \operatorname{diag}(\varphi_1,\dots,\varphi_r,\varphi_{r+1},\dots,\varphi_m)\operatorname{diag}(\psi_1,\dots,\psi_r,\psi_{r+1},\dots,\psi_m), \tag{11}$$

де $\Phi \in M(m,R)$ є d-матрицею, тобто $\varphi_i \mid \varphi_{i+1}$, $i = 1,\dots,s-1$, $\varphi_s \ne 0$, і $\varphi_{s+1} = \varphi_{s+2} = \ldots = \varphi_m = 0$, $r \le s \le m$, $\Psi \in M(m,n,R)$.

(Φ, Ψ)*-факторизація* $A = BC$ *матриці* A, *відповідна до факторизації* (11) *її канонічної діагональної форми* D^A, *є єдиною, з точністю до асоційовності, тоді й тільки тоді, коли у факторизації* (11) *її канонічної діагональної форми* D^A *матриця* Ψ *є* d*-матрицею, крім того,*

$$\varphi_{s+1} = \varphi_{s+2} = \ldots = \varphi_m, \qquad \psi_{r+1} = \psi_{r+2} = \ldots = \psi_m.$$

У працях [6, 64] розглянуто паралельні факторизації кліткових матриць над кільцями скінченно породжених головних ідеалів з діагональною редукцією матриць. Встановлено умови існування факторизацій клітково-трикутних матриць залежно від факторизацій їх діагональних кліток. Описано Δ_i- та D_i-паралельні факторизації клітково-трикутних матриць, тобто паралельні до факторизацій визначників Δ_i та факторизацій канонічних діагональних форм D_i діагональних кліток. Наведено умови однозначності з точністю до асоційовності таких факторизацій.

5. Матричні поліноміальні рівняння. У багатьох прикладних задачах виникають та використовуються різні типи матричних рівнянь як лінійних, так і вищих степенів [56, 58, 74]. Зокрема, добре відоме своїми застосуваннями алгебричне рівняння Ріккаті [60] у певних випадках зводиться до розв'язування матричного поліноміального рівняння другого степеня. Загальної теорії матричних поліноміальних рівнянь не розроблено. На основі узагальненої теореми Безу для матричних поліномів [4] розроблені у [19, 42, 54] методи факторизації матричних поліномів використовуються при розв'язуванні таких матричних поліноміальних рівнянь.

Нехай

$$A_0 X^m + A_1 X^{m-1} + \cdots + A_{m-1} X + A_m = 0 \tag{12}$$

− матричне поліноміальне рівняння, де A_i, $i = 0, 1, \ldots, m$, − $n \times n$-матриці над алгебрично замкненим полем $\mathbb{F}$ характеристики нуль. Матрицю

$$A(\lambda) = A_0 \lambda^m + A_1 \lambda^{m-1} + \cdots + A_{m-1}\lambda + A_m$$

називають характеристичною матрицею рівняння (12), поліном $\Delta(\lambda) = \det A(\lambda)$ − характеристичним поліномом, а його корені − характеристичними коренями матриці $A(\lambda)$ і матричного рівняння (12) (див. [19]).

Надалі будемо вважати, що матричне рівняння (12) є зведеним, тобто $A_0 = I$ − одинична матриця. Таке матричне рівняння може не мати розв'язків або ж мати нескінченне, або скінченне число розв'язків. Розв'язність матричного рівняння (12) залежить від кратностей його характеристичних коренів. У [34] встановлено, що, коли характеристичні корені цього рівняння є кратностей один, то воно має k розв'язків, де k задовольняє умови $m^n \le k \le \binom{mn}{n}$. Зауважимо, що цей самий результат набагато пізніше формулюється у праці [62]. Із результатів праці [17] випливає, що матричне рівняння (12) має розв'язки, коли його характеристичні корені є кратностей, не більших ніж два. У [41] встановлено можливе число розв'язків матричного поліноміального рівняння (12) і структуру його характеристичної матриці $A(\lambda)$ залежно від цього числа. Одержано такий результат.

Теорема 11. *Нехай характеристичні корені матричного рівняння* (12) *є кратностей два, тобто*

$$\det A(\lambda) = \prod_{i=1}^{r} (\lambda - \lambda_i)^2,$$

де $\lambda_i \ne \lambda_j$, *якщо* $i \ne j$, $i, j = 1, \ldots, r$, *і елементарні дільники характеристичної матриці* $A(\lambda)$ *є попарно взаємно простими. Тоді матричне рів-*

няння (12) *має* k *розв'язків, причому*

$$1 \le k \le \sum_{i=0}^{n-s} \binom{n-i}{i} \binom{r}{n-i}, \qquad s = \begin{cases} q, & n = 2q, \\ q+1, & n = 2q+1. \end{cases}$$

Зауважимо, що матричне рівняння (12) з умовами, як у теоремі 11, має мінімальне число розв'язків, $k = 1$, у тому й тільки тому випадку, коли:

1°) степінь матричного рівняння (12), а отже, його характеристичної матриці $A(\lambda)$, дорівнює два: $m = 2$;

2°) його характеристичні корені є кратності два;

3°) характеристична матриця $A(\lambda)$ цього рівняння подібна до матриці діагонального вигляду, тобто для деякої неособливої матриці $T \in GL(n, \mathbb{F})$ маємо

$$TA(\lambda)T^{-1} = \begin{Vmatrix} (\lambda - \lambda_1)^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (\lambda - \lambda_2)^2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & (\lambda - \lambda_n)^2 \end{Vmatrix},$$

де $\lambda_i \ne \lambda_j$, якщо $i \ne j$, $i, j = 1, \ldots, n$.

Зауважимо, що в теоремі 11 можна зняти обмеження про те, що елементарні дільники характеристичної матриці $A(\lambda)$ матричного рівняння (12) є попарно взаємно простими. Коли елементарні дільники матриці $A(\lambda)$ є довільними, k означатиме число класів розв'язків матричного рівняння (12), де клас розв'язків $\{B_i\}$ складається із матриць B_i з тим самим характеристичним поліномом $\det(I\lambda - B_i) = \varphi(\lambda)$. Кожний такий клас містить або один розв'язок, або нескінченне число розв'язків.

Відомо, що кліткова структура поліноміальної матриці $A(\lambda)$ без кратних характеристичних коренів залежить від числа її лінійних унітальних дільників. Зокрема, встановлено [34], що, коли це число мінімальне: $k = m^n$, то матриця $A(\lambda)$ діагоналізується, тобто подібна до діагональної матриці, а коли це число максимальне: $k = \binom{mn}{n}$, то перетвореннями подібності матриця $A(\lambda)$ не зводиться до жодного клітково-трикутного вигляду. У випадку наявності у матриці $A(\lambda)$ кратних характеристичних коренів ця залежність порушується. Тоді матриця $A(\lambda)$ може бути діагоналізована перетвореннями подібності як при мінімальному, так і при максимальному числі лінійних унітальних дільників.

6. Матричні лінійні поліноміальні рівняння Сильвестра. Матричні рівняння типу Сильвестра над різними областями, зокрема матричні поліноміальні рівняння $A(\lambda)X(\lambda) + Y(\lambda)B(\lambda) = C(\lambda)$, виникають у різноманітних областях математики і відіграють фундаментальну роль у багатьох задачах теорії керування і динамічних систем [56, 58, 74]. Для їх розв'язання необхідні методи побудови розв'язків таких рівнянь і опис їх структури.

Якщо таке матричне поліноміальне рівняння є розв'язним, очевидно, що воно має розв'язки необмежених зверху степенів. Отже, виникає наступне природне запитання: який мінімальний степінь розв'язків матричного поліноміального рівняння? Відповідь на це запитання є тільки у окремих випадках. У [53] і [32] наведено оцінки степенів розв'язків матричного поліноміального рівняння з регулярними поліноміальними матрицями-коефіцієнтами та встановлено умови єдиності таких розв'язків.

У працях [8, 52] на основі стандартних форм поліноміальних матриць відносно напівскалярної еквівалентності описано структуру розв'язків матричного поліноміального рівняння Сильвестра і наведено оцінку степенів його розв'язків. Сформулюємо деякі результати.

Розглянемо матричне рівняння

$$A(\lambda)X(\lambda) + Y(\lambda)B(\lambda) = C(\lambda), \qquad (13)$$

де $A(\lambda), B(\lambda), C(\lambda) \in M(n, \mathbb{F}[\lambda])$ − відомі матриці, а $X(\lambda), Y(\lambda) \in M(n, \mathbb{F}[\lambda])$ − невідомі матриці. Нехай пара матриць $(A(\lambda), B(\lambda))$ з матричного рівняння (13) напівскалярно еквівалентна до пари стандартних форм

$$(T^A(\lambda) = UA_i(\lambda)V_A(\lambda), T^B(\lambda) = UB(\lambda)V_B(\lambda)),$$

де $U \in GL(n, \mathbb{F})$, $V_A(\lambda), V_B(\lambda) \in GL(n, \mathbb{F}[\lambda])$. Тоді з матричного рівняння (13) одержимо таке рівняння:

$$T^A(\lambda)H(\lambda) + W(\lambda)T^B(\lambda) = \tilde{C}(\lambda), \qquad (14)$$

де

$$H(\lambda) = V_A^{-1}(\lambda)X(\lambda)V_B(\lambda), \;\; W(\lambda) = UY(\lambda)U^{-1}, \;\; \tilde{C}(\lambda) = UC(\lambda)V_B(\lambda). \qquad (15)$$

Рівняння (13) і (14) еквівалентні. Це означає, що рівняння (13) розв'язне тоді й тільки тоді, коли розв'язним є рівняння (14), і кожному розв'язку $X(\lambda)$, $Y(\lambda)$ рівняння (13) відповідає розв'язок $H(\lambda)$, $W(\lambda)$ рівняння (14), і навпаки, згідно зі співвідношеннями (15).

Із матричного рівняння (14) одержуємо достатньо просту систему лінійних рівнянь над кільцем поліномів $\mathbb{F}[\lambda]$, розв'язування якої зводиться до послідовного розв'язування лінійних двочленних поліноміальних діафантових рівнянь. Спосіб розв'язування таких рівнянь наведено, наприклад, у [58]. Із розв'язків цієї системи складаємо розв'язки матричного рівняння (14), а за співвідношеннями (15) − розв'язки матричного рівняння (13).

Таким чином, опис розв'язків матричного рівняння (13) зведено до опису розв'язків еквівалентного матричного рівняння (14).

Надалі через $\operatorname{row}_i(A)$ і $\operatorname{col}_j(A)$ будемо позначати i-й рядок і j-й стовпець матриці $A(\lambda)$, відповідно. Степенем нуля будемо вважати мінус нескінченність: $\deg 0 = -\infty$.

Встановимо межі для степенів розв'язків матричних рівнянь.

Зауважимо, що згідно з критерієм Рота [66] матричне рівняння (13) має розв'язок тоді й тільки тоді, коли матриці

$$\begin{Vmatrix} A(\lambda) & C(\lambda) \\ 0 & B(\lambda) \end{Vmatrix} \quad \text{і} \quad \begin{Vmatrix} A(\lambda) & 0 \\ 0 & B(\lambda) \end{Vmatrix}$$

є еквівалентними. Аналогічний критерій можна сформулювати для розв'язності матричного рівняння (14).

Теорема 12. *Нехай матричне рівняння* (14) *розв'язне. Тоді воно має розв'язки* $H(\lambda)$, $W(\lambda)$ *такі, що* $\deg \operatorname{row}_i(W(\lambda)) < \deg \mu_i^A(\lambda)$, $i = 1, \ldots, n$, *де* $\mu_i^A(\lambda)$, $i = 1, \ldots, n$, − *інваріантні множники матриці* $A(\lambda)$.

Матриця $H(\lambda)$ з розв'язку $H(\lambda)$, $W(\lambda)$ матричного рівняння (14) має таку структуру.

Наслідок 2. *Нехай канонічна діагональна форма матриці* $A(\lambda)$ *із матричного рівняння* (13) *має вигляд*

$$D^A(\lambda) = \operatorname{diag}(\mu_1^A(\lambda), \ldots, \mu_p^A(\lambda), \mu_{p+1}^A(\lambda), \ldots, \mu_{p+q}^A(\lambda), \mu_{p+q+1}^A(\lambda), \ldots, \mu_n^A(\lambda)),$$

де $\deg \mu_i^A(\lambda) = 0$, *тобто* $\mu_i^A(\lambda) = 1$, *коли* $i = 1, \ldots, p$, $\deg \mu_i^A(\lambda) = 1$, *коли* $i = p + 1, \ldots, p + q$, *і* $\deg \mu_i^A(\lambda) > 1$, *коли* $i = p + q + 1, \ldots, n$. *Тоді розв'язне матричне рівняння* (9) *має такі розв'язки* $H(\lambda)$, $W(\lambda)$, *що рядки* $\operatorname{row}_1 W(\lambda), \ldots$,

$\mathrm{row}_p W(\lambda)$ *матриці* $W(\lambda)$ *є нульовими, рядки* $\mathrm{row}_{p+1}W(\lambda),\ldots,\mathrm{row}_{p+q}W(\lambda)$ *– скалярними, тобто їх елементи є з поля* $\mathbb{F}$, *а степені рядків* $\deg \mathrm{row}_{p+q+1}W(\lambda),\ldots,\ \deg \mathrm{row}_n W(\lambda)$ *є меншими, ніж степені інваріантних множників* $\deg \mu^A_{p+q+1}(\lambda),\ldots,\deg \mu^A_n(\lambda)$ *матриці* $A(\lambda)$, *відповідно.*

Враховуючи співвідношення (15) між розв'язками $X(\lambda)$, $Y(\lambda)$ і $H(\lambda)$, $W(\lambda)$ матричних рівнянь (13) і (14), одержимо оцінку степенів розв'язків $X(\lambda)$, $Y(\lambda)$ матричного рівняння (13).

Теорема 13. *Розв'язне матричне рівняння* (13) *має такі розв'язки* $X(\lambda)$, $Y(\lambda)$, *що* $\deg Y(\lambda) < \deg D^A(\lambda)$.

Розв'язки обмежених степенів матричних рівнянь можуть бути єдиними. Наступна теорема встановлює критерій єдиності таких розв'язків.

Теорема 14. *Розв'язок* $H(\lambda)$, $W(\lambda)$ *матричного рівняння* (14) *такий, що* $\deg \mathrm{row}_i(W(\lambda)) < \deg \mu^A_i(\lambda)$, *є єдиним тоді й тільки тоді, коли* $(\mu^A_n(\lambda), \mu^B_n(\lambda)) = 1$, *де* $\mu^A_n(\lambda)$, $\mu^B_n(\lambda)$ *– інваріантні множники матриць* $A(\lambda)$ *і* $B(\lambda)$ *із матричного рівняння* (13).

Зауважимо, що побудовою стандартної форми поліноміальних матриць відносно напівскалярної еквівалентності подібним чином, як і вище, задаємо ефективний спосіб розв'язування матричних поліноміальних діофантових рівнянь $A(\lambda)X(\lambda) + B(\lambda)Y(\lambda) = C(\lambda)$, а також опис структури розв'язків цих рівнянь.

7. Матричні лінійні різнобічні рівняння від двох змінних над кільцями. Наведена у теоремі 6 стандартна форма пари матриць відносно узагальненої еквівалентності використовується для побудови методів розв'язування матричних лінійних різнобічних рівнянь над певними кільцями та опису структури їх розв'язків [51]. Сформулюємо деякі з них.

Нехай R – адекватне кільце. Розглянемо матричне діофантове рівняння

$$AX + BY = C, \tag{16}$$

де $A, B, C \in M(n, R)$ – відомі матриці і $X, Y \in M(n, R)$ – невідомі матриці. Пару матриць (A, B) з рівняння (16) зведемо узагальнено еквівалентними перетвореннями до стандартної форми (D^A, T^B), де $D^A = UAV_1 = \Phi = \mathrm{diag}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ і $T^B = UBV_2$ – нижня трикутна форма з головною діагоналлю $D^B = \Psi = \mathrm{diag}(\psi_1, \ldots, \psi_n)$, для деяких матриць $U, V_1, V_2 \in GL(n, R)$. Тоді з матричного рівняння (16) одержимо таке рівняння:

$$D^A H + T^B W = \tilde{C}, \tag{17}$$

де $H = V_1^{-1}X = \left\| h_{ij} \right\|_1^n$, $W = V_2^{-1}Y = \left\| w_{ij} \right\|_1^n$ і $\tilde{C} = UC$. Рівняння (17) еквівалентне до рівняння (16). Із матричного рівняння (17) одержується система рівнянь, у тому числі двочленних діофантових рівнянь

$$\varphi_i h_{ij} + \psi_i w_{ij} = \tilde{c}_{ij}, \qquad i, j = 1, \ldots, n. \tag{18}$$

Розв'язування цієї системи рівнянь зводиться до розв'язування діофантових рівнянь вигляду (18). Частковий розв'язок h^0_{ij}, w^0_{ij} рівняння (18) знаходиться як частковий розв'язок h^0_{ij} конгруенції $\varphi_i h_{ij} \equiv \tilde{c}_{ij} \pmod{\psi_i}$, $h^0_{ij} \in R_{\psi_i}$ і $w^0_{ij} = \dfrac{\tilde{c}_{ij} - \varphi_i h^0_{ij}}{\psi_i}$, де R_{ψ_i} – повна система лишків за модулем ψ_i.

Із цих розв'язків рівняння (18) складаємо частковий розв'язок $H^0 = \left\| h_{ij}^0 \right\|_1^n$, $W^0 = \left\| w_{ij}^0 \right\|_1^n$, де $h_{ij}^0 \in R_{\psi_i}$, $i, j = 1, \ldots, n$, матричного рівняння (17).

Наступна теорема формулює критерій єдиності часткового розв'язку матричного рівняння (17).

Теорема 15. *Матричне рівняння* (17) *має єдиний частковий розв'язок* $H^0 = \left\| h_{ij}^0 \right\|_1^n$, $W^0 = \left\| w_{ij}^0 \right\|_1^n$ *такий, що* $h_{ij}^0 \in R_{\psi_i}$, $i, j = 1, \ldots, n$, *тоді й тільки тоді, коли* $(\det D^A, \det T^B) = 1$.

Загальні розв'язки матричних рівнянь (16) і (17) мають такий вигляд.

Теорема 16. *Нехай* $H^0 = \left\| h_{ij}^0 \right\|_1^n$, $W^0 = \left\| w_{ij}^0 \right\|_1^n$, *де* $h_{ij}^0 \in R_{\psi_i}$, $i, j = 1, \ldots, n$, – *єдиний частковий розв'язок матричного рівняння* (17). *Тоді загальний розв'язок цього рівняння є таким*:

$$H = H^0 + \Psi K, \qquad W = W^0 - \Phi K,$$

де $\Phi = D^A$, $\Psi = D^B$ – *канонічні діагональні форми матриць* A *і* B *з матричного рівняння* (16), K – *довільна матриця із кільця матриць* $M(n, R)$.

Загальним розв'язком матричного рівняння (16) *є пара матриць*

$$(X = V_1 H, Y = V_2 W).$$

Стандартною парою пари матриць може бути пара діагональних матриць, тобто пара матриць, що діагоналізується узагальнено еквівалентними перетвореннями. Умови діагоналізовності пар матриць наведено у теоремі 8. Запишемо загальні розв'язки матричних рівнянь з діагоналізовними парами матриць.

Нехай пара матриць (A, B) з матричного рівняння (16) діагоналізовна, тобто

$$UAV_1 = D^A = \Phi = \operatorname{diag}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n),$$
$$UAV_2 = D^B = \Phi = \operatorname{diag}(\psi_1, \ldots, \psi_n) \tag{19}$$

для деяких матриць $U, V_1, V_2 \in GL(n, R)$. Тоді матричне рівняння (16) еквівалентне до такого матричного рівняння:

$$\Phi H + \Psi W = \tilde{C}, \tag{20}$$

де $H = V_1^{-1} X$, $W = V_2^{-1} Y$ і $\tilde{C} = UC$. Із цього рівняння одержуємо систему діофантових двочленних рівнянь вигляду (18). Розв'язавши її, одержимо частковий розв'язок $H^0 = \left\| h_{ij}^0 \right\|_1^n$, $W^0 = \left\| w_{ij}^0 \right\|_1^n$, $h_{ij}^0 \in R_{\psi_i}$, $i, j = 1, \ldots, n$, матричного рівняння (19). Загальний розв'язок рівняння (20) є такий.

Теорема 17. *Нехай пара матриць* (A, B) *з матричного рівняння* (16) *діагоналізовна і її стандартна пара* (Φ, Ψ) *має вигляд* (19), *а* H^0, W^0 *є частковим розв'язком матричного рівняння* (20). *Тоді загальний розв'язок рівняння* (20) *є таким*:

$$H = H^0 + \operatorname{diag}\left(\frac{\varphi_1}{d_{11}} r_1, \ldots, \frac{\varphi_n}{d_{nn}} r_n\right) L + \Psi K,$$

$$W = W^0 - \operatorname{diag}\left(\frac{\psi_1}{d_{11}} r_1, \ldots, \frac{\psi_n}{d_{nn}} r_n\right) L - \Phi K,$$

де $d_{ii} = (\varphi_{ii}, \psi_{ii}) = 1$; r_i – *довільний елемент із* $R_{d_{ii}}$, $i = 1, \ldots, n$; $L = \left\| \ell_{ij} \right\|_1^n$, $\ell_{ij} = 1$, $i, j = 1, \ldots, n$; K – *довільна матриця із кільця матриць* $M(n, R)$.

Загальним розв'язком матричного рівняння (16) *є* $X = V_1 H$, $Y = V_2 W$.

З використанням стандартної форми пари матриць відносно узагальненої еквівалентності подібним чином пропонується простий метод розв'язування матричних рівнянь типу Сильвестра $AX + YB = C$ над адекватними кільцями та описуються їх розв'язки.

Зауважимо, що матричні лінійні різнобічні рівняння над квадратичними кільцями розглянуто у працях [25−27]. Запропоновано критерії розв'язності цих матричних рівнянь і наведено спосіб знаходження їх розв'язків [27]. Описано цілочислові розв'язки матричних рівнянь, тобто розв'язки з елементами з кільця цілих чисел. Наведено критерії існування цілочислових розв'язків матричних рівнянь і їх єдиності [25]. На основі спеціальної трикутної форми матриць відносно (z,k)-еквівалентності запропоновано простий спосіб розв'язування матричних рівнянь типу Сильвестра над квадратичними евклідовими кільцями та описано структуру їх розв'язків. Встановлено існування розв'язків з обмеженими евклідовими нормами. Доведено, що таких розв'язків матричне рівняння над квадратичними евклідовими уявними кільцями має скінченну кількість [26].

8. Застосування стандартних форм матриць в інших задачах. У попередніх пунктах наведено застосування стандартних форм матриць у задачах факторизації матриць над різними кільцями при розробці методів розв'язування різного типу матричних рівнянь та опису їх розв'язків. Проте стандартні форми матриць використовуються і в інших задачах. Наведемо коротко деякі з них.

8. 1. Подібність наборів матриць над полем. Напівскалярна еквівалентність поліноміальних матриць (матричних поліномів) тісно пов'язана з подібністю пар і наборів числових матриць. У праці [22] встановлено такий результат.

Теорема 18. *Унітальні матричні поліноми*

$$A(\lambda) = I\lambda^m + A_1\lambda^{m-1} + \cdots + A_m, \tag{21}$$

$$B(\lambda) = I\lambda^m + B_1\lambda^{m-1} + \cdots + B_m, \tag{22}$$

де I *− одинична матриця,* $A_i, B_i \in M(n,\mathbb{F})$, $i = 1,\ldots,m$, *є подібними, тобто* $A(\lambda) = PB(\lambda)P^{-1}$, $P \in GL(n,\mathbb{F})$, *тоді й тільки тоді, коли вони напівскалярно еквівалентні, тобто їхні стандартні форми* T^A *і* T^B *є напівскалярно еквівалентними.*

Звідси випливає такий

Наслідок 3. *Набори матриць*

$$A_1, \ldots, A_m, \qquad\qquad B_1, \ldots, B_m$$

є подібними, тобто $A_i = PB_iP^{-1}$, $i = 1,\ldots,m$, *для деякої неособливої матриці* $P \in GL(n,\mathbb{F})$ *тоді й тільки тоді, коли відповідні їм матричні поліноми* (21) *і* (22) *є напівскалярно еквівалентними, тобто їх стандартні форми* T^A *і* T^B *є напівскалярно еквівалентними.*

Таким чином, стандартні форми поліноміальних матриць щодо напівскалярної еквівалентності можна використати при розв'язуванні відомої проблеми про подібність пар і скінченних наборів матриць над полями [1, 50, 67]. Наприклад, трикутна форма щодо напівскалярної еквівалентності для певних класів поліноміальних матриць, зокрема з простими характеристичними коренями, з одним елементорним дільником, з попарно різними елементарними дільниками тощо, є достатньо простою і можна встановити умови їх напівскалярної еквівалентності та канонічну форму, а отже, розв'язувати задачу про подібність відповідних скінченних наборів і пар матриць над полями.

У працях [43, 44, 68] розглянуто напівскалярну еквівалентність поліноміальних матриць в окремих випадках, зокрема для поліноміальних матриць без кратних характеристичних коренів, з рівними інваріантними множниками, з обмеженнями на порядок матриць тощо, а також подібність відповідних пар і скінченних наборів числових матриць. Встановлено системи інваріантів поліноміальних матриць і наборів матриць над полем відносно цих перетворень, побудовано деякі їх канонічні форми і наведено умови напівскалярної еквівалентності поліноміальних матриць і подібності наборів числових матриць.

***8. 2. Мультиплікативні властивості канонічної діагональної форми матриць* (*нормальної форми Сміта*).** Задача про мультиплікативні властивості канонічних діагональних форм матриць полягає в описі зв'язків між канонічними діагональними формами і інваріантними множниками матриць B і C та їх добутку $A = BC$, зокрема, у встановленні умов, при яких канонічна діагональна форма добутку матриць дорівнює добутку канонічних діагональних форм співмножників. У цьому випадку кажуть, що матриці B і C мають властивість мультиплікативності їх канонічних діагональних форм.

Нехай R − адекватне кільце, $B \in M(m,k,R)$, $C \in M(k,n,R)$ і $BC = A$, де $A \in M(m,n,R)$. Нехай (D^A, T^B) − стандартна форма пари матриць (A,B) щодо узагальненої еквівалентності, де T^B − нижня трикутна матриця з головною діагоналлю D^B. Тоді з рівності $A = BC$ одержуємо таку рівність:

$$D^A = T^B C_1, \tag{23}$$

де C_1 − нижня трикутна матриця з головною діагоналлю Ψ. З рівності (23) випливає, що $D^A = D^B \Psi$. Це означає, що канонічна діагональна форма D^B дільника B матриці A є дільником канонічної діагональної форми D^A матриці A. Такий результат встановлено у [61] лише для неособливих матриць над кільцем головних ідеалів. У цій же праці показано також, що коли $A = BC$, де A, B і C − матриці n-го порядку над кільцем головних ідеалів і $(\det B, \det C) = 1$, то $D^A = D^B D^C$.

На основі стандартної форми пари матриць з використанням співвідношення (23) встановлено [32, 35, 42, 63] набагато ширші класи матриць над поліноміальними кільцями, кільцями головних ідеалів, адекватними кільцями, які мають властивість мультиплікативності їх канонічних діагональних форм. Зокрема, такими є:

1°. Канонічна діагональна форма добутку матриць $BC = A$, де $B \in M(m,k,R)$, $C \in M(k,n,R)$, $A \in M(m,n,R)$, дорівнює добутку канонічних діагональних форм матриць B і C, тобто $D^A = D^B D^C$, тоді й тільки тоді, коли пара матриць (A,B) діагоналізовна, тобто

$$UAV_1 = D^A, \qquad UBV_2 = D^B, \tag{24}$$

де $U \in GL(m,R)$, $V_1 \in GL(n,R)$, $V_2 \in GL(k,R)$, і існують такі матриці V_1, V_2 зі співвідношення (24), що матриця

$$V_2^{-1} C V_1 = \Psi = \operatorname{diag}(\psi_1, \ldots, \psi_\ell, 0, \ldots 0), \qquad \psi_\ell \neq 0,$$

є d-матрицею, тобто $\psi_i \mid \psi_{i+1}$, $i = 1, \ldots, \ell - 1$.

2°. Нехай $A = BC$, де $B \in M(m,R)$, $C \in M(m,n,R)$, $\det B \neq 0$, $\operatorname{rang} C = r$. Якщо $(\mu_i^A, \mu_m^B) = \mu_i^B$, $i = 1, \ldots, r$, то $D^A = D^B D^C$.

8. 3. Стабільний ранг кілець матриць. Поняття стабільного рангу, введене Х. Бассом [46], використовується в K-теорії, в теорії кілець, зокрема, в задачах діагональної редукції матриць.

Нагадаємо означення стабільного рангу кільця. Нехай R − адекватне кільце. Стабільним рангом кільця R називають найменше натуральне число m таке, що для довільного унімодулярного рядка $\|a_1\ a_2\ \ldots\ a_1\ a_{m+1}\|$ довжини $m+1$ з елементами з кільця R, тобто такого, що $(a_1, a_2, \ldots, a_m, a_{m+1}) = 1$, існують такі елементи $b_1, b_2, \ldots, b_m \in R$, що рядок довжини m

$$\|a_1 + a_{m+1}b_1 \quad a_2 + a_{m+1}b_2 \quad \ldots \quad a_m + a_{m+1}b_m\|$$

є унімодулярним. Якщо такого натурального числа не існує, то вважають, що стабільний ранг кільця дорівнює нескінченності [3].

Зауважимо, що в праці [47] розглянуто деяке розширене поняття стабільного рангу кільця: вводяться і вивчаються кільця стабільного дробового рангу 1.5, в той час, як відомими є кільця класичного стабільного рангу один, два тощо.

У працях [71−73] на основі стабільного рангу виділено нові класи кілець з діагональною редукцією матриць. Важливим питанням є встановлення зв'язків стабільного рангу кільця $M(n, R)$ матриць порядку n над R і стабільного рангу кільця R. У [3] наведено формулу, якою встановлюється цей зв'язок між стабільним рангом кільця матриць $M(n, R)$ і стабільного рангу кільця R. З неї випливає, що, коли стабільний ранг кільця R дорівнює один або два, то стабільний ранг кільця матриць $M(n, R)$ теж дорівнює відповідно один або два.

У [10] встановлено умови, коли адекватне кільце є стабільного рангу 1. З використанням стандартної форми пари матриць щодо узагальненої еквівалентності у кільці $M(n, R)$ матриць над адекватним кільцем R виділено клас матриць стабільного рангу 1, коли кільце R може бути стабільного рангу більшого, ніж 1. Таким є клас $M'(2, R)$ матриць $\|a_{ij}\|_1^2$ другого порядку таких, що $(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}) = 1$.

Теорема 19. *Нехай* R *− адекватне кільце і пара матриць* (A, B) $A, B \in M'(2, R)$, *є простою, тобто* $AU + BV = I$ *для деяких матриць* $U, V \in M(2, R)$, I *− одинична матриця. Тоді існує матриця* $P \in M(2, R)$ *така, що* $AP + B = Q$*, де* $Q \in GL(2, R)$ *є оборотною матрицею.*

Це означає, що клас матриць $M'(2, R)$ є стабільного рангу один.

1. *Бондаренко В. М.* Зображення гельфандових графів. − Київ: Ін-т математики НАН України, 2005. − 228 с.
2. *Боревич З. И.* О факторизации матриц над кольцом главных идеалов // III Всесоюз. симп. по теории колец, алгебр и модулей, Тарту, 21−24 сент. 1976 г.: Тез. докл. − Тарту: Тарт. ун-т, 1976. − С. 19.
3. *Васерштейн Л. Н.* Стабильный ранг колец и размерность топологических пространств // Функц. анализ и его приложения. − 1971. − **5**, № 2. − С. 17−27.
   Те саме: *Vasershtein L. N.* Stable rank of rings and dimensionality of topological spaces // Funct. Analysis its Appl. − 1971. − **5**, No. 2. − P. 102−110.
4. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. − Москва: Наука, 1988. − 552 с.
   Те саме: *Gantmacher F. R.* The theory of matrices. − New York: Chelsea Publ. Co., 1959. − Vol. 1: x+377 p.; Vol. 2: x+277 p.
   − http://science.sciencemag.org/content/131/3408/1216.2.
5. *Грига Б. С., Казімірсъкий П. С.* До питання єдиності виділення унітального множника з матричного многочлена // Доп. АН УРСР. Сер. А. − 1976. − № 4. − С. 293−295.

6. *Гудивок П. М.* Об эквивалентности матриц над коммутативными кольцами // Бесконечные группы и примыкающие алгебр. структуры. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1993. – С. 431–437.
7. *Джалюк Н. С., Петричкович В. М.* Паралельні факторизації матриць над кільцями та їх зв'язки // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2010. – Вип. 8. – С. 7–17.
8. *Джалюк Н., Петричкович В.* Напівскалярна еквівалентність поліноміальних матриць та розв'язування матричних поліноміальних рівнянь Сильвестра // Мат. вісн. НТШ. – 2012. – **9**. – С. 81–88.
9. *Забавський Б. В., Романів О. М.* Кільця з елементарною редукцією матриць // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 12. – С. 1641–1649.
   Те саме: *Zabavskii B. V., Romaniv O. M.* Rings with elementary reduction of matrices // Ukr. Math. J. – 2000. – **52**, No. 12. – P. 1872–1881.
10. *Забавський Б. В., Петричкович В. М.* Про стабільний ранг кілець матриць // Укр. мат. журн. – 2009. – **61**, № 11. – С. 1575–1578.
   Те саме: *Zabavs'kyi B. V., Petrychkovych V. M.* On the stable range of matrix rings // Ukr. Math. J. – 2009. – **61**, No. 11. – P. 1853–1857.
11. *Зелиско В. Р.* О разложении матричного многочлена в произведение линейных множителей // Укр. мат. журн. – 1980. – **32,** № 6. – С. 807–810.
12. *Зелиско В. Р.* О строении одного класса обратимых матриц // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1980. – Вып. 12. – С. 14–21.
13. *Зеліско В. Р.* Єдиність унітальних дільників матричного многочлена // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1988. – Вип. 30. – С. 36–38.
14. *Зеліско В. Р., Ладзоришин Н. Б., Петричкович В. М.* Про еквівалентність матриць над квадратичними евклідовими кільцями // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2006. – Вип. 4. – С. 16–21.
15. *Казимирский П. С.* К разложению квадратной полиномиальной матрицы в произведение линейных множителей // Укр. мат. журн. – 1965. – **17,** № 5. – С. 115–119.
16. *Казимирский П. С.* Решение проблемы выделения регулярного множителя из матричного многочлена // Укр. мат. журн. – 1980. – **32**, № 4. – С. 483–498.
17. *Казимирский П. С., Петричкович В. М.* Разложимость полиномиальных матриц на линейные множители // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1978. – Вып. 8. – С. 3–9.
18. *Казімірський П. С.* Квазіунітальні та супровідні матриці матричних многочленів // Теорет. та прикл. питання алгебри і диференц. рівнянь. – Київ: Наук. думка, 1977. – С. 29–52.
19. *Казімірський П. С.* Розклад матричних многочленів на множники. – Львів: Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2015. – 282 с.
20. *Казімірський П. С., Зеліско В. Р.* Про виділення з поліноміальної матриці регулярного множника з наперед заданою формою Сміта // Теорет. та прикл. питання алгебри і диференц. рівнянь. – Київ: Наук. думка, 1977. – С. 52–61.
21. *Казімірський П. С., Зеліско В. Р.* Про виділення лінійного множника з матричного многочлена // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1976. – № 11. – С. 968–970.
22. *Казімірський П. С., Петричкович В. М.* Про еквівалентність поліноміальних матриць // Теорет. та прикл. питання алгебри і диференц. рівнянь. – Київ: Наук. думка, 1977. – С. 61–66.
23. *Кравчук М. П.* Вибрані математичні праці / Упорядник Н. Вірченко. – Київ–Нью Йорк: Укр. вільна акад. у США – Нац. акад. наук України, 2002. – 792 с.
24. *Кравчук М. П., Гольдбаум Я. С.* Об эквивалентности особенных пучков матриц // Тр. Киев. авиац. ин-та. – 1928. – № 6. – С. 5–27.
25. *Ладзоришин Н. Б.* Цілочислові розв'язки матричних лінійних односторонніх і різносторонніх рівнянь над квадратичними кільцями // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2015. – **58**, № 2. – С. 47–54.
   Те саме: *Ladzoryshyn N. B.* The integral solutions of matrix linear unilateral and bilateral equations over quadratic rings // J. Math. Sci. – 2017. – **223**, No. 1. – P. 50–59. – doi:10.1007/s10958-017-3337-0.
26. *Ладзоришин Н. Б., Петричкович В. М.* Стандартна форма матриць над квадратичними кільцями відносно (z,k)-еквівалентності та структура розв'язків матричних двобічних лінійних рівнянь // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2018. – **61**, № 2. – С. 49–56.

27. *Ладзоришин Н., Петричкович В.* Матричні лінійні одно- та двобічні рівняння над квадратичними кільцями // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2018. – Вип. 85. – С. 32–40.
28. *Лопатинский Я. Б.* О некоторых свойствах полиномиальных матриц // Краевые задачи мат. физики. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1979. – С. 108–116.
29. *Лопатинский Я. Б.* Разложение полиноминальной матрицы на множители // Науч. зап. Львов. политехн. ин-та. Сер. физ.-мат. – 1957. – Вып. 38, № 2. – С. 3–7.
30. *Мальцев А. И.* Основы линейной алгебры. – Москва: Наука, 1970. – 400 с.
31. *Петричкович В. М.* Звідність пар матриць узагальнено еквівалентними перетвореннями до трикутних і діагональних форм та їх застосування // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2000. – **43,** № 2. – С. 15–22.
32. *Петричкович В. М.* Клеточно-треугольная и клеточно-диагональная факторизация клеточно-треугольных и клеточно-диагональных многочленных матриц // Мат. заметки. – 1985. – **37**, № 6. – С. 789–796.
    Те саме: *Petrichkovich V. M.* Cell-triangular and cell-diagonal factorizations of cell-triangular and cell-diagonal polynomial matrices // Math. Notes. – 1985. – **37**, No. 6. – P. 431–435.
33. *Петричкович В. М.* Критерій діагоналізовності пари матриць над кільцем головних ідеалів спільними рядковими і різними стовпцевими перетвореннями // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 6. – С. 860–862.
    Те саме: *Petrychkovych V. M.* A criterion of diagonalizability of a pair of matrices over the ring of principal ideals by common row and separate column transformations // Ukr. Math. J. – 1997. – **49**, No. 6. – P. 963–965.
34. *Петричкович В. М.* О линейных делителях и приводимости многочленных матриц // Укр. мат. журн. – 1984. – **36**, № 2. – С. 195–200.
    Те саме: *Petrychkovich V. M.* Linear divisors and reducibility of polynomial matrices // Ukr. Math. J. – 1984. – **36**, No. 2. – P. 176–181.
35. *Петричкович В. М.* О полускалярной эквивалентности и нормальной форме Смита многочленных матриц // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1987. – Вып. 26. – С. 13–16.
    Те саме: *Petrychkovich V. M.* Semiscalar equivalence and the Smith normal form of polynomial matrices // J. Sov. Math. – 1993. – **66**, No. 1. – P. 2030–2033.
36. *Петричкович В. М.* Паралельні факторизації многочленних матриць // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, № 9. – С. 1228–1233.
    Те саме: *Petrychkovych V. M.* Parallel factorizations of polynomial matrices // Ukr. Math. J. – 1992. – **44**, No. 9. – P. 1123–1127.
37. *Петричкович В. М.* Полускалярная эквивалентность и факторизация многочленных матриц // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 5. – С. 644–649.
    Те саме: *Petrychkovich V. M.* Semiscalar equivalence and the factorization of polynomial matrices // Ukr. Math. J. – 1990. – **42**, No. 5. – P. 570–574.
38. *Петричкович В. М.* Про кратності характеристичних коренів, степені елементарних дільників і факторизацію многочленних матриць // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2005. – **48,** № 2. – С. 7–17.
39. *Петричкович В. М.* Про паралельні факторизації матриць над кільцями головних ідеалів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1997. – **40,** № 4. – С. 96–100.
40. *Петричкович В. М.* Про подільність та факторизацію матриць // Мат. студії. – 2004. – **22,** № 2. – С. 115–120.
41. *Петричкович В. М.* Про розв'язки матричних многочленних рівнянь та їх число // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2009. – Вип. 7. – С. 52–56.
42. *Петричкович В. М.* Узагальнена еквівалентність матриць і їх наборів та факторизація матриць над кільцями. – Львів: Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2015. – 312 с.
43. *Шаваровский Б. З.* О некоторых «ручных» и «диких» аспектах проблемы полускалярной эквивалентности многочленных матриц // Мат. заметки. – 2004. – **76**, № 1. – С. 119–132.
    Те саме: *Shavarovskii B. Z.* On some «tame» and «wild» aspects of the problem of semiscalar equivalence of polynomial matrices // Math. Notes. – 2004. – **76**, No. 1-2. – P. 111–123.
44. *Шаваровский Б. З.* О подобии пар матриц четного порядка // Мат. заметки. – 2007. – **81**, № 3. – С. 448–463.
    Те саме: *Shavarovskii B. Z.* On the similarity of matrices of even order // Math. Notes. – 2007. – **81**, No. 3. – P. 392–407.

45. *Щедрик В. П.* Факторизація матриць над кільцями елементарних дільників. – Львів: Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2017. – 304 с.
46. *Bass H.* K-theory and stable algebra // Publ. Math. I.H.É.S. – 1964. – **22.** – P. 5–60.
47. *Bovdi V. A., Shchedryk V. P.* Commutative Bezout domains of stable range 1.5 // Linear Algebra Appl. – 2019. – **568.** – P. 127–134.
– https://doi.org/10.1016/j.laa.2018.06.012.
48. *Dias da Silva J. A., Laffey T. J.* On simultaneous similarity of matrices and related questions // Linear Algebra Appl. – 1999. – **291**. – P. 167–184.
49. *Dlab V., Ringel C. M.* Canonical forms of pairs of complex matrices // Linear Algebra Appl. – 1991. – **147.** – P. 387–410. – doi:10.1016/0024-3795(91)90240-W.
50. *Drozd Yu. A.* Tame and wild matrix problems // Lect. Notes Math. – 1980. – **832.** – P. 242–258.
51. *Dzhaliuk N. S., Petrychkovych V. M.* The matrix linear unilateral and bilateral equations with two variables over commutative rings // Int. Scholarly Research Notices. ISRN Algebra. – **2012**. – Article ID 205478. – 14 pages.
– http://dx.doi.org/10.5402/2012/205478.
52. *Dzhaliuk N. S., Petrychkovych V. M.* Solutions of the matrix linear bilateral polynomial equation and their structure // Algebra Discrete Math. – 2019. – **27**. No. 2. – P. 243–251.
53. *Feinstein J., Bar-Ness Y.* On the uniqueness minimal solution of the matrix polynomial equation $A(\lambda)X(\lambda)+Y(\lambda)B(\lambda)=C(\lambda)$ // J. Franklin Inst. – 1980. – **310**, No. 2. – P. 131–134. – doi: 10.1016/0016-0032(78)90012-1.
54. *Gohberg I., Lancaster P., Rodman L.* Matrix polynomials. – New York: Acad. Press, 1982. – 409 p.
55. *Helmer O.* The elementary divisor theorem for certain rings without chain conditions // Bull. Amer. Math. Soc. – 1943. – **49**, No. 4. – P. 225–236.
– https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1943-07886-X.
56. *Kaczorek T.* Polynomial and rational matrices. Applications in dynamical systems theory. – London: Springer, 2007. – 503 p.
57. *Kronecker L.* Algebraische Reduktion der Scharen bilinearer Formen // Sitzungsber. Akad. Wiss. Phys.-Math. Klasse. – Berlin, 1890. – S. 763–776.
58. *Kučera V.* Algebraic theory of discrete optimal control for single-variable systems. I. Preliminaries // Kybernetika. – 1973. – **9**, No. 2. – P. 94–107.
59. *Ladzoryshyn N., Petrychkovych V.* Equivalence of pairs of matrices with relatively prime determinants over quadratic rings of principal ideals // Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Mold. Mat. – 2014. – No. 3 (76). – P. 38–48.
60. *Lancaster P., Rodman L.* Algebraic Riccati equations. – Oxford: Clarendon Press, 1995. – 498 p.
61. *Newman M.* Integral matrices. – New York: Acad. Press, 1972. – 224 p. – Ser. Pure and Applied Mathematics. – Vol. 45.
62. *Pereira E.* On solvents of matrix polynomials // Appl. Numer. Math. – 2003. – **47**, No. 2. – P. 197–208. –
– https://doi.org/10.1016/S0168-9274(03)00058-8.
63. *Petrychkovych V.* Generalized equivalence of pairs of matrices // Linear Multilinear Algebra. – 2000. – **48**, No. 2. – P. 179–188.
– doi: 10.1080/03081080008818667.
64. *Petrychkovych V.* Standard form of pairs of matrices with respect to generalized equivalence // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2003. – Вип. 61. – С. 148–155.
65. *Petrychkovych V., Dzhaliuk N.* Factorizations in the rings of the block matrices // Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Mold. Mat. – 2017. – No. 3 (85). – P. 23–33.
66. *Roth W. E.* The equations $AX - YB = C$ and $AX - XB = C$ in matrices // Proc. Am. Math. Soc. – 1952. – **3**, No. 3. – P. 392–396.
– https://doi.org/10.2307/2031890.
67. *Sergeichuk V. V.* Canonical matrices and related questions // Математика і її застосування: Праці Ін-ту марематики НАН України. – **57.** – Київ: Ін-т математики НАН України, 2006. – x+326 с.
68. *Shavarovskii B. Z.* Canonical form of reduced 3-by-3 matrix with one characteristic root and with some zero subdiagonal elements // Hindawi J. Math. – 2019. – Volume 2019. Article ID 7646132. – 10 p. – https://doi.org/10.1155/2019/7646132.
69. *Shchedryk V.* Factorization of matrices over elementary divisor domain // Algebra Discrete Math. – 2009. – **8**, No. 2. – P. 79–98.

70. *Weierstrass K.* Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen // Monatsh. Akad. Wiss. − Berlin, 1867. − S. 310−338.
71. *Zabavsky B.* Diagonalizability theorem for matrices over rings with finite stable range // Algebra Discrete Math. − 2005. − **4**, No. 1. − P. 151−165.
72. *Zabavsky B.* Diagonal reduction of matrices over rings. − Lviv: VNTL Publ., 2012. − 250 p. − (Math. Studies: Monograph Ser. − Vol. 16).
73. *Zabavsky B.* Conditions for stable range of an elementary divisor rings // Commun. Algebra. − 2017. − **45**, No. 9. − P. 4062−4066.
74. *Zhou B., Yan Z.-B., Duan G.-R.* Unified parametrization for the solutions to the polynomial Diophantine matrix equation and the generalized Sylvester matrix equation // Int. J. Control, Autom., Syst. − 2010. − **8**, No. 1. − P. 29−35. − doi:10.1007/s12555-010-0104-0.

СТАНДАРТНЫЕ ФОРМЫ МАТРИЦ НАД КОЛЬЦАМИ ОТНОСИТЕЛЬНО РАЗЛИЧНЫХ ТИПОВ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЕЙ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В ТЕОРИИ ФАКТОРИЗАЦИИ МАТРИЦ И МАТРИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ

Приведен обзор результатов исследований одного из направлений, касающегося эквивалентности матриц, основанного П. С. Казимирским и развитого его учениками. Сформулированы стандартные формы полиномиальных матриц и их конечных наборов относительно полускалярной эквивалентности и обобщенной эквивалентности пар матриц над кольцами. Приведены применения таких стандартных форм при построении методов факторизации матриц, решении мат¬рич¬ных уравнений, описании структуры решений этих уравнений, в частности матричных уравнений типа Сильвестра, матричных линейных диофантовых уравнений и в других задачах.

Ключевые слова: *полиномиальное кольцо, адекватное кольцо, эквивалентность, полускалярная эквивалентности, обобщенная эквивалентность, каноническая форма, стандартная форма, факторизация матриц, матричное уравнение.*

STANDARD FORMS OF MATRICES OVER RINGS WITH RESPECT TO DIFFERENT TYPES OF EQUIVALENCES AND THEIR APPLICATIONS IN THEORY OF THE MATRIX FACTORIZATION AND MATRIX EQUATIONS

An overview of the results of studies of one of the areas concerning the equivalence of matrices initiated by P. S. Kazimirs'kii and continued and developed by his disciples is presented. The standard forms of polynomial matrices and their finite sets with respect to the semiscalar equivalence and the generalized equivalence of the matrices pairs over the rings are formulated. It is pointed out their applications in the construction of matrix factorization methods, the solution of matrix equations, the description of the structure of solutions of these equations, in particular the Sylvester matrix equations, matrix linear Diaphant equations and other problems.

Key words: *polynomial ring, adequate ring, equivalence, semiscalar equivalence, generalized equivalence, canonical form, standard form, matrix factorization, matrix equation.*

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
01.10.19