УДК 519.6: 539.3

І. І. Прокопишин ✉

ТЕРМОМЕХАНІЧНИЙ КОНТАКТ ПРУЖНИХ ТІЛ ЗА НАЯВНОСТІ НЕЛІНІЙНИХ ВІНКЛЕРІВСЬКИХ ПОВЕРХНЕВИХ ШАРІВ

Розглянуто термопружну контактну задачу для декількох тіл за умов одностороннього механічного контакту через нелінійні вінклерівські поверхневі шари та умов неідеального теплового контакту. Отримано слабке формулювання цієї задачі у вигляді системи варіаційного рівняння і варіаційної нерівності, а також альтернативне слабке формулювання у вигляді системи лінійного і нелінійного варіаційних рівнянь. Для розв'язування системи варіаційних рівнянь термомеханічної контактної задачі розроблено паралельні ітераційні алгоритми декомпозиції області типу Робіна, на кожному кроці яких необхідно розв'язувати два лінійні варіаційні рівняння для кожного з тіл, одне з яких відповідає задачі теплопровідності з умовами Ньютона на ділянках можливого контакту, а інше – задачі теорії пружності з умовами Робіна на цих ділянках і додатковими об'ємними силами. Проведено аналіз числової ефективності запропонованих алгоритмів для плоскої термомеханічної задачі про контакт двох пружних тіл з використанням скінченноелементних апроксимацій.

***Ключові слова**: термопружні контактні задачі, нелінійні вінклерівські шари, варіаційні нерівності, варіаційні рівняння, методи декомпозиції області, метод скінченних елементів.*

Вступ. При дослідженні багатошарових композитних конструкцій, геологічних структур, клейових і адгезійних з'єднань часто виникає не обхідність розв'язувати задачі про неідеальний механічний і термомеханічний контакт неоднорідних пружних тіл з тонкими поверхневими покриттями і шарами. При цьому важливо враховувати температурні деформації під час контакту, оскільки вони можуть значно впливати на напружено-деформований стан тіл.

У роботах [15, 22, 23, 26, 27] одержано умови теплового, механічного і термомеханічного контакту тіл через тонкі однорідні і неоднорідні прошарки.

У праці [2] проведено дослідження контактних задач для пружних і в'язкопружних тіл з тонкими покриттями. Зокрема, у цій роботі показано, що найпростішою моделлю м'яких пружних прошарків є вінклерівська модель. Для трансверсально-ізотропного шару асимптотичні коефіцієнти вінклерівської моделі одержано у роботі [29]. У праці [54] отримано нелінійну модель Вінклера у формі степеневої залежності між контактними напруженнями і стрибками переміщень через шар.

Класичні методи на основі інтегральних рівнянь для розв'язування задач про контакт нескінченних тіл з тонкими покриттями розвинуто у роботах [1–4, 10, 11, 16, 24, 25]. Числові методи для задач про контактну взаємодію скінченних тіл за наявності тонких покриттів і поверхневих шарів, що базуються на теорії варіаційних рівнянь і нерівностей та скінченноелементних апроксимаціях, досліджено в працях [5, 6, 14, 20, 28, 35, 42, 48, 52].

Термомеханічний контакт пружних тіл вивчено у наукових працях [7–9, 21, 34, 39, 40, 43, 47, 50, 51, 55, 56]. Зокрема, у роботах [39, 40, 47, 51, 55, 56] розвинуто математичні моделі та методи розв'язування термопружних контактних задач з урахуванням тепловиділення від тертя. У роботах [21, 43, 50] розроблено аналітично-числові методи розв'язування задач про термомеханічну контактну взаємодію двох півпросторів з теплопроникними міжповерхневими зазорами або шорсткими ділянками.

✉ ihor84@gmail.com

У працях [7–9] розглянуто плоскі і осесиметричні термопружні контактні задачі для неоднорідних тіл з односторонніми механічними і неідеальними тепловими контактними умовами, здійснено слабку постановку цих задач у вигляді системи варіаційного рівняння і варіаційної нерівності, запропоновано ітераційний алгоритм для розв'язування цієї системи, на кожному кроці якого потрібно послідовно розв'язувати незв'язані варіаційні рівняння і нерівність. Розв'язування на кожній ітерації здійснюється шляхом їх зведення до еквівалентних задач безумовної та умовної мінімізації квадратичних функціоналів і застосування до цих задач ітераційного методу спряжених ґрадієнтів і скінченноелементних апроксимацій.

Ефективним засобом для дослідження напружено-деформованого і термонапруженого станів систем із багатьох тіл за умов їх контактної взаємодії є методи (алгоритми) декомпозиції області (МДО). Ці методи дозволяють звести розв'язування крайових задач у складних областях, які є об'єднаннями багатьох тіл, до розв'язування послідовності простіших задач в окремих тілах (підобластях). МДО для контактних задач теорії пружності розвинуто в працях [12, 13, 20, 31–33, 35–37, 41, 42, 44–46, 48, 49, 52, 53].

У роботах [20, 52] здійснено слабке формулювання задачі про односторонній механічний контакт багатьох пружних тіл через нелінійні поверхневі шари вінклерівського типу у вигляді нелінійного варіаційного рівняння в гільбертовому просторі та для його розв'язування розроблено різні паралельні ітераційні методи декомпозиції області типу Робіна.

У праці [34] розглянуто задачу про термомеханічний контакт багатьох пружних тіл без поверхневих шарів і її слабке формулювання у вигляді системи варіаційного рівняння і варіаційної нерівності, отримане у роботі [8]. Із застосуванням методу штрафу цю систему зведено до системи лінійного і нелінійного варіаційних рівнянь, для розв'язування якої запропоновано послідовні і паралельні ітераційні алгоритми МДО типу Робіна.

У пропонованій статті розглядається задача про термопружний контакт багатьох тіл за наявності нелінійних поверхневих вінклерівських шарів. Між тілами виконуються умови одностороннього механічного контакту через нелінійні вінклерівські прошарки та неідеального теплового контакту. З використанням результатів праць [7, 8, 20, 30, 52] отримано слабке формулювання цієї задачі у вигляді системи варіаційного рівняння і варіаційної нерівності, а також альтернативне слабке формулювання у вигляді системи лінійного і нелінійного варіаційних рівнянь. Для системи варіаційних рівнянь задачі розроблено ітераційні методи декомпозиції області, які зводять її розв'язування до паралельного розв'язування на кожній ітерації для кожного із тіл двох незв'язаних лінійних варіаційних рівнянь, одне з яких відповідає задачі теплопровідності з крайовими умовами Робіна (Ньютона, Пуанкаре) на ділянках можливого контакту, а інше – задачі теорії пружності з додатковими об'ємними силами у тілах та механічними крайовими умовами Робіна на цих ділянках. Числову апробацію отриманих алгоритмів МДО проведено для плоскої задачі про термопружний контакт через нелінійний вінклерівський шар двох ізотропних пружних тіл з використанням скінченноелементних апроксимацій на квадратичних трикутних елементах. Вивчено вплив параметрів нелінійного вінклерівського шару та температури, заданої на частині межі одного із тіл, на розподіли нормального контактного напруження та контактних температур, а також на швидкість збіжності алгоритмів МДО.

Перевагою розроблених ітераційних алгоритмів є те, що вони не вимагають розв'язування нелінійних задач чи варіаційних нерівностей на кожному ітераційному кроці, дозволяють організовувати паралельні обчислення для випадку контакту великої кількості тіл і застосовувати найбільш оптимальні числові методи і математичні моделі в окремих тілах.

1. Постановка задачі. За умов плоскої деформації розглянемо задачу про термомеханічний контакт через нелінійні поверхневі вінклерівські шари N скінченних пружних тіл, що займають обмежені області $\Omega_\alpha \subset \mathbb{R}^2$ з

ліпшицевими межами $\Gamma_\alpha = \partial\Omega_\alpha$, $\alpha = 1,2,\ldots,N$ (рис. 1). Позначимо $\Omega = \bigcup_{\alpha=1}^{N} \Omega_\alpha$.

У просторі $\mathbb{R}^2$ введемо декартову систему координат з ортонормованим базисом $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$. Термонапружений стан у точці $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^\top$ кожного з тіл Ω_α визначають вектор переміщень $\mathbf{u}_\alpha(\mathbf{x}) = u_{\alpha i}(\mathbf{x})\mathbf{e}_i$, температура $T_\alpha(\mathbf{x})$, симетричні тензори деформацій $\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_\alpha(\mathbf{x}) = \varepsilon_{\alpha ij}(\mathbf{x})\,\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ і напружень $\widehat{\boldsymbol{\sigma}}_\alpha(\mathbf{x}) = \sigma_{\alpha ij}(\mathbf{x})\,\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$. Ці величини задовольняють рівняння рівноваги, рівняння стаціонарної теплопровідності, співвідношення між напруженнями і деформаціями та співвідношення Коші:

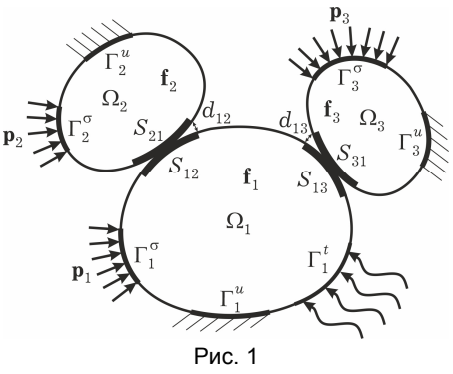

Рис. 1

$$\sum_{j=1}^{2} \frac{\partial \sigma_{\alpha ij}(\mathbf{x})}{\partial x_j} + f_{\alpha i}(\mathbf{x}) = 0, \quad i = 1,2, \quad \mathbf{x} \in \Omega_\alpha, \quad \alpha = 1,2,\ldots,N, \tag{1}$$

$$\sum_{i,j=1}^{2} \text{æ}_{\alpha ij}(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 T_\alpha(\mathbf{x})}{\partial x_i\, \partial x_j} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega_\alpha, \quad \alpha = 1,2,\ldots,N, \tag{2}$$

$$\sigma_{\alpha ij}(\mathbf{x}) = \delta_{ij}\lambda_\alpha(\mathbf{x})(\varepsilon_{\alpha 11}(\mathbf{x}) + \varepsilon_{\alpha 22}(\mathbf{x})) + 2\mu_\alpha(\mathbf{x})\varepsilon_{\alpha ij}(\mathbf{x}) - \delta_{ij}(3\lambda_\alpha(\mathbf{x}) + 2\mu_\alpha(\mathbf{x})) \times$$

$$\times\, \tilde{\beta}_\alpha(\mathbf{x})\big(T_\alpha(\mathbf{x}) - T_{0\alpha}(\mathbf{x})\big), \quad i,j = 1,2, \quad \mathbf{x} \in \Omega_\alpha, \quad \alpha = 1,2,\ldots,N, \tag{3}$$

$$\varepsilon_{\alpha ij}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_{\alpha i}(\mathbf{x})}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{\alpha j}(\mathbf{x})}{\partial x_i}\right), \quad i,j = 1,2, \quad \mathbf{x} \in \Omega_\alpha, \quad \alpha = 1,2,\ldots,N, \tag{4}$$

де $f_{\alpha i}(\mathbf{x})$ – компоненти вектора об'ємних сил $\mathbf{f}_\alpha(\mathbf{x}) = f_{\alpha i}(\mathbf{x})\mathbf{e}_i$, що діють на тіло Ω_α; $T_{0\alpha}(\mathbf{x})$ – початкова температура тіла Ω_α; $\text{æ}_{\alpha ij}(\mathbf{x})$ – компоненти тензора теплопровідності; $\tilde{\beta}_\alpha(\mathbf{x})$ – коефіцієнт теплового розширення, $\delta_{ij} = \{1,\, i = j\} \vee \{0,\, i \neq j\}$ – символ Кронекера, а $\lambda_\alpha(\mathbf{x})$, $\mu_\alpha(\mathbf{x})$ – параметри Ляме, які мають властивість

$$(\forall \alpha = 1,2,\ldots,N), \qquad (\forall \mathbf{x} \in \Omega_\alpha) \qquad \{0 < \lambda_\alpha(\mathbf{x}) < \infty,\ 0 < \mu_\alpha(\mathbf{x}) < \infty\}, \tag{5}$$

і виражаються через модуль Юнґа і коефіцієнт Пуассона так:

$$\lambda_\alpha(\mathbf{x}) = \frac{E_\alpha(\mathbf{x})\nu_\alpha(\mathbf{x})}{(1 - 2\nu_\alpha(\mathbf{x}))(1 + \nu_\alpha(\mathbf{x}))}, \qquad \mu_\alpha(\mathbf{x}) = \frac{E_\alpha(\mathbf{x})}{2(1 + \nu_\alpha(\mathbf{x}))}.$$

На межі $\Gamma_\alpha = \partial\Omega_\alpha$ кожного з тіл уведемо локальну систему координат з ортонормованим базисом $\boldsymbol{\tau}_\alpha$, $\mathbf{n}_\alpha$, де $\boldsymbol{\tau}_\alpha$ – одинична дотична нормаль, а $\mathbf{n}_\alpha$ – одинична зовнішня нормаль. Вектори переміщень і напружень на Γ_α у цьому базисі запишемо так:

$$\mathbf{u}_\alpha = u_{\alpha\tau}\boldsymbol{\tau}_\alpha + u_{\alpha n}\mathbf{n}_\alpha, \qquad \boldsymbol{\sigma}_\alpha = \widehat{\boldsymbol{\sigma}}_\alpha \cdot \mathbf{n}_\alpha = \sigma_{\alpha\tau}\boldsymbol{\tau}_\alpha + \sigma_{\alpha n}\mathbf{n}_\alpha.$$

Нехай межа Γ_α складається з трьох частин, що не перетинаються: $\Gamma_\alpha = \Gamma_\alpha^u \bigcup \Gamma_\alpha^\sigma \bigcup S_\alpha$, де $\Gamma_\alpha^u \bigcup \Gamma_\alpha^\sigma = \Gamma_\alpha^t$, $\Gamma_\alpha^u = \overline{\Gamma}_\alpha^u$, $\Gamma_\alpha^u \neq \varnothing$. На частині Γ_α^u межі Γ_α виконуються кінематичні крайові умови (умови Діріхле), які задля спрощення варіаційних формулювань вважаємо нульовими, а на частині Γ_α^σ

– статичні крайові умови (умови Неймана):

$$\mathbf{u}_\alpha(\mathbf{x}) = 0, \qquad \mathbf{x} \in \Gamma_\alpha^u, \qquad \alpha = 1,2,\ldots,N, \tag{6}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_\alpha(\mathbf{x}) = \mathbf{p}_\alpha(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x} \in \Gamma_\alpha^u, \qquad \alpha = 1,2,\ldots,N, \tag{7}$$

де $\mathbf{p}_\alpha = p_{\alpha\tau}\boldsymbol{\tau}_\alpha + p_{\alpha n}\mathbf{n}_\alpha$ – задані зовнішні навантаження.

На межі $\Gamma_\alpha^t = \Gamma_\alpha^u \cup \Gamma_\alpha^\sigma$ виконуються умови конвективного теплообміну із зовнішнім середовищем:

$$\sum_{i,j=1}^{2} \text{æ}_{\alpha ij}(\mathbf{x}) n_{\alpha i}(\mathbf{x}) \frac{\partial T_\alpha(\mathbf{x})}{\partial x_j} = -\rho_\alpha^c(\mathbf{x})\big(T_\alpha(\mathbf{x}) - T_\alpha^c(\mathbf{x})\big), \ \mathbf{x} \in \Gamma_\alpha^t, \ \alpha = 1,2,\ldots,N, \tag{8}$$

де $\rho_\alpha^c(\mathbf{x})$ – коефіцієнт конвективного теплообміну, а $T_\alpha^c(\mathbf{x})$ – задана температура.

Межа $S_\alpha = \bigcup\limits_{\beta \in B_\alpha} S_{\alpha\beta}$, $\bigcap\limits_{\beta \in B_\alpha} S_{\alpha\beta} = \varnothing$, відповідає зоні можливого контакту тіла Ω_α з іншими тілами. Тут $S_{\alpha\beta} \subset \Gamma_\alpha$ – ділянка можливого контакту тіла Ω_α з тілом Ω_β, а $B_\alpha \subset \{1,2,\ldots,N\}$ – множина індексів усіх тіл, які контактують з тілом Ω_α, $B_\alpha \neq \varnothing$, $\alpha = 1,2,\ldots,N$. Вважаємо, що межі $S_{\alpha\beta} \subset \Gamma_\alpha$ і $S_{\beta\alpha} \subset \subset \Gamma_\beta$ є достатньо близькими ($S_{\alpha\beta} \approx S_{\beta\alpha}$) [17, 18], і приймаємо, що $\mathbf{n}_\alpha(\mathbf{x}) \approx \approx -\mathbf{n}_\beta(\mathbf{x}')$, де $\mathbf{x}' = \Pr(\mathbf{x}) \in S_{\beta\alpha}$ – проекція точки $\mathbf{x} \in S_{\alpha\beta}$ на поверхню $S_{\beta\alpha}$. Відстань по нормалі між тілами Ω_α та Ω_β до деформації позначимо через $d_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) = \pm\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\| = \pm\sqrt{\sum_{i=1}^{2}(x_i - x_i')^2}$, де знак «$\pm$» залежить від формулювання конкретної задачі.

Уздовж меж $S_{\alpha\beta}$ і $S_{\beta\alpha}$ містяться нелінійні поверхневі шари вінклерівського типу. Сумарне обтиснення $w_{\alpha\beta}$ цих шарів є відомою функцією нормального контактного напруження:

$$w_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) = \tilde{g}_{\alpha\beta}(\sigma_{\alpha n}(\mathbf{x})) = \tilde{g}_{\alpha\beta}(\sigma_{\beta n}(\mathbf{x}')), \qquad \mathbf{x} \in S_{\alpha\beta}, \quad \mathbf{x}' = \Pr(\mathbf{x}) \in S_{\beta\alpha}. \tag{9}$$

Обернену залежність запишемо так:

$$\sigma_{\alpha n}(\mathbf{x}) = \sigma_{\beta n}(\mathbf{x}') = g_{\alpha\beta}(w_{\alpha\beta}(\mathbf{x})), \qquad \mathbf{x} \in S_{\alpha\beta}, \quad \mathbf{x}' = \Pr(\mathbf{x}) \in S_{\beta\alpha}. \tag{10}$$

Припустимо, що нелінійна функція $g_{\alpha\beta}(z)$ є неперервною і має властивості [20, 52]:

$$g_{\alpha\beta}(0) = 0, \qquad (\forall y, z \le 0) \qquad \{y < z \Rightarrow g_{\alpha\beta}(y) < g_{\alpha\beta}(z)\}, \tag{11}$$

$$\big(\exists \tilde{M}_{\alpha\beta} > 0\big) \qquad (\forall y, z \le 0) \qquad \big\{\big|g_{\alpha\beta}(y) - g_{\alpha\beta}(z)\big| \le \tilde{M}_{\alpha\beta}\,|y - z|\big\}. \tag{12}$$

На межах $S_{\alpha\beta}$ задано умови механічного одностороннього контакту без тертя через нелінійні поверхневі шари [20, 52]:

$$\sigma_{\alpha\tau}(\mathbf{x}) = \sigma_{\beta\tau}(\mathbf{x}') = 0, \tag{13}$$

$$\sigma_{\alpha n}(\mathbf{x}) = \sigma_{\beta n}(\mathbf{x}') = g_{\alpha\beta}(w_{\alpha\beta}(\mathbf{x})) \le 0, \tag{14}$$

$$u_{\alpha n}(\mathbf{x}) + u_{\beta n}(\mathbf{x}') + w_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) \le d_{\alpha\beta}(\mathbf{x}), \tag{15}$$

$$\tilde{\varphi}_{\alpha\beta}(\mathbf{x})\,\sigma_{\alpha n}(\mathbf{x}) = 0, \quad \tilde{\varphi}_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) = d_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) - u_{\alpha n}(\mathbf{x}) - u_{\beta n}(\mathbf{x}') - w_{\alpha\beta}(\mathbf{x}), \tag{16}$$

а також наступні умови неідеального теплового контакту [8]:

$$\sum_{i,j=1}^{2} \text{æ}_{\alpha ij} n_{\alpha i} \frac{\partial T_\alpha(\mathbf{x})}{\partial x_j} = -\sum_{i,j=1}^{2} \text{æ}_{\beta ij} n_{\beta i} \frac{\partial T_\beta(\mathbf{x}')}{\partial x_j} = -\tilde{\rho}_{\alpha\beta}(\mathbf{x})(T_\alpha(\mathbf{x}) - T_\beta(\mathbf{x}')), \tag{17}$$

де $\mathbf{x} \in S_{\alpha\beta}$, $\mathbf{x}' = \Pr(\mathbf{x}) \in S_{\beta\alpha}$, $\beta \in B_\alpha$, $\alpha = 1,2,\ldots,N$.

Тут $\tilde{\rho}_{\alpha\beta}(\mathbf{x})$ – коефіцієнти контактного теплообміну, які можуть залежати від різних факторів. Вважаємо, що ці коефіцієнти є функціями від контактного напруження $\sigma_{\alpha n}(\mathbf{x})$ і фактичної відстані $\tilde{\varphi}_{\alpha\beta}(\mathbf{x})$ між тілами [7, 8]:

$$\tilde{\rho}_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) = \tilde{\rho}_{\alpha\beta}(\sigma_{\alpha n}, \tilde{\varphi}_{\alpha\beta}) = \begin{cases} q_1(\sigma_{\alpha n}), & \sigma_{\alpha n}(\mathbf{x}) = \sigma_{\beta n}(\mathbf{x}') \le 0, \quad \tilde{\varphi}_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) = 0, \\ q_2(\tilde{\varphi}_{\alpha\beta}), & \sigma_{\alpha n}(\mathbf{x}) = \sigma_{\beta n}(\mathbf{x}') = 0, \quad \tilde{\varphi}_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) \ge 0, \end{cases} \tag{18}$$

де $q_1(\sigma_{\alpha n})$ і $q_2(\tilde{\varphi}_{\alpha\beta})$ – неспадні функції такі, що $q_1(0) = q_2(0)$ [7, 8].

Зазначимо, що задача (1)–(4), (6)–(8), (13)–(17) є зв'язаною контактною задачею термопружності і є нелінійною, оскільки нелінійними є поверхневі шари, істинні зони контакту наперед невідомі, а коефіцієнти контактного теплообміну залежать від механічних контактних параметрів $\sigma_{\alpha n}$ і $\tilde{\varphi}_{\alpha\beta}$.

2. Варіаційні формулювання. Спершу наведемо слабке формулювання цієї задачі у вигляді системи варіаційного рівняння і варіаційної нерівності, отримане на основі робіт [7, 8, 20, 30, 52]. Далі, застосовуючи результати праць [20, 30, 52], здійснимо альтернативне слабке формулювання у вигляді системи лінійного і нелінійного варіаційних рівнянь.

Для кожного з тіл Ω_α розглянемо простори Соболєва $V_\alpha = [H^1(\Omega_\alpha)]^2$, елементами яких є узагальнені вектори переміщень, та введемо в них замкнуті підпростори $V_\alpha^0 = \{\mathbf{u}_\alpha \in V_\alpha : \mathbf{u}_\alpha = 0 \text{ на } \Gamma_\alpha^u\}$ зі скалярним добутком $(\mathbf{u}_\alpha, \mathbf{v}_\alpha)_{V_\alpha^0} = \sum\limits_{i=1}^{2} \int\limits_{\Omega_\alpha} \left(u_{\alpha i} v_{\alpha i} + \sum\limits_{j=1}^{2} \frac{\partial u_{\alpha i}}{\partial x_j} \frac{\partial v_{\alpha i}}{\partial x_j} \right) d\Omega$ і нормою $\|\mathbf{u}_\alpha\|_{V_\alpha^0} = \sqrt{(\mathbf{u}_\alpha, \mathbf{u}_\alpha)_{V_\alpha^0}}$.

Крім цього, розглянемо простори Соболєва $V_\alpha^T = H^1(\Omega_\alpha)$ узагальнених температур зі скалярним добутком $(T_\alpha, Q_\alpha)_{V_\alpha^T} = \int\limits_{\Omega_\alpha} \left(T_\alpha Q_\alpha + \sum\limits_{j=1}^{2} \frac{\partial T_\alpha}{\partial x_j} \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_j} \right) d\Omega$ і нормою $\|T_\alpha\|_{V_\alpha^T} = \sqrt{(T_\alpha, T_\alpha)_{V_\alpha^T}}$. Значення елементів просторів V_α, V_α^0 і V_α^T на частинах межі області Ω_α будемо розуміти у сенсі слідів [19] і для спрощення позначатимемо їх тими самими символами.

Означимо простори $V_0 = V_1^0 \times \ldots \times V_N^0 = \{\mathbf{u} = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_N)^\top : \mathbf{u}_\alpha \in V_\alpha^0, \alpha = 1,\ldots,N\}$ і $V_T = V_1^T \times \ldots \times V_N^T = \{\mathbf{T} = (T_1, \ldots, T_N)^\top : T_\alpha \in V_\alpha^T, \alpha = 1,\ldots,N\}$, які є декартовими добутками просторів V_α^0 і V_α^T відповідно. У просторах V_0 і V_T означимо скалярні добутки і норми: $(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{V_0} = \sum\limits_{\alpha=1}^{N} (\mathbf{u}_\alpha, \mathbf{v}_\alpha)_{V_\alpha^0}$, $\|\mathbf{u}\|_{V_0} = \sqrt{(\mathbf{u}, \mathbf{u})_{V_0}}$, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_0$, $(\mathbf{T}, \mathbf{Q})_{V_T} = \sum\limits_{\alpha=1}^{N} (T_\alpha, Q_\alpha)_{V_\alpha^T}$, $\|\mathbf{T}\|_{V_T} = \sqrt{(\mathbf{T}, \mathbf{T})_{V_T}}$, $\mathbf{T}, \mathbf{Q} \in V_T$. Крім цього, введемо простір $W = \prod\limits_{\{\alpha,\beta\} \in P} H_{00}^{1/2}(\Xi_\alpha) = \{\mathbf{w} = (w_{\alpha\beta})_{\{\alpha,\beta\} \in P}^\top : w_{\alpha\beta} \in H_{00}^{1/2}(\Xi_\alpha), \{\alpha,\beta\} \in P\}$, елементами якого є вектори, що складаються з узагальнених переміщень поверхневих шарів, а також простір $U_0 = V_0 \times W = \{\mathbf{U} = (\mathbf{u}, \mathbf{w})^\top : \mathbf{u} \in V_0, \mathbf{w} \in W\}$, де $P = \{\{\alpha,\beta\} : \alpha \in \{1,2,\ldots,N\}, \beta \in B_\alpha\}$ – множина всіх можливих невпорядкованих пар індексів тіл, що контактують між собою, $\Xi_\alpha = \Gamma_\alpha \setminus \Gamma_\alpha^u$. Розглянемо в просторі U_0 опуклу замкнуту множину кінематично допустимих переміщень:

$$Z = \{\mathbf{U} = (\mathbf{u}, \mathbf{w})^\top \in U_0 : u_{\alpha n} + u_{\beta n} + w_{\alpha\beta} \le d_{\alpha\beta} \text{ на } S_{\alpha\beta}, \{\alpha,\beta\} \in P\}, \tag{19}$$

де $u_{\alpha n} = \mathbf{n}_\alpha \cdot \mathbf{u}_\alpha \in H_{00}^{1/2}(\Xi_\alpha)$, $w_{\alpha\beta} \in H_{00}^{1/2}(\Xi_\alpha)$, $d_{\alpha\beta} \in H_{00}^{1/2}(\Xi_\alpha)$.

У просторі V_0 означимо білінійну форму $A(\mathbf{u},\mathbf{v})$ таку, що $A(\mathbf{u},\mathbf{u})$ відповідає сумарній енергії пружної деформації тіл:

$$A(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \sum_{\alpha=1}^{N} a_\alpha(\mathbf{u}_\alpha,\mathbf{v}_\alpha), \qquad \mathbf{u},\mathbf{v} \in V_0,$$

$$a_\alpha(\mathbf{u}_\alpha,\mathbf{v}_\alpha) = \int\limits_{\Omega_\alpha} \left(\lambda_\alpha \sum_{i=1}^{2} \varepsilon_{\alpha ii}(\mathbf{u}_\alpha) \sum_{j=1}^{2} \varepsilon_{\alpha jj}(\mathbf{v}_\alpha) + 2\mu_\alpha \sum_{i,j=1}^{2} \varepsilon_{\alpha ij}(\mathbf{u}_\alpha)\varepsilon_{\alpha ij}(\mathbf{v}_\alpha) \right) d\Omega, \qquad (20)$$

та лінійну форму $L(\mathbf{v})$, що відповідає роботі заданих зовнішніх сил:

$$L(\mathbf{v}) = \sum_{\alpha=1}^{N} \ell_\alpha(\mathbf{v}_\alpha), \quad \mathbf{v} \in V_0, \quad \ell_\alpha(\mathbf{v}_\alpha) = \int\limits_{\Omega_\alpha} \mathbf{f}_\alpha \cdot \mathbf{v}_\alpha \, d\Omega + \int\limits_{\Gamma_\alpha^\sigma} \mathbf{p}_\alpha \cdot \mathbf{v}_\alpha \, dS, \qquad (21)$$

де $\mathbf{f}_\alpha \in [L_2(\Omega_\alpha)]^2$, $\mathbf{p}_\alpha \in [L_2(\Gamma_\alpha^\sigma)]^2$, $\alpha = 1,2,\ldots,N$. У просторі W означимо неквадратичний функціонал $H(\mathbf{w})$, що відповідає енергії деформації поверхневих шарів [30]:

$$H(\mathbf{w}) = \sum_{\{\alpha,\beta\}\in P} \int\limits_{S_{\alpha\beta}} \left[\int\limits_0^{w_{\alpha\beta}} g_{\alpha\beta}(z)\, dz \right] dS, \qquad \mathbf{w} \in W. \qquad (22)$$

У просторі V_T означимо білійні форми

$$D(\mathbf{T},\mathbf{Q}) = \sum_{\alpha=1}^{N} D_\alpha(T_\alpha,Q_\alpha), \ \mathbf{T},\mathbf{Q} \in V_T, \ D_\alpha(T_\alpha,Q_\alpha) = \int\limits_{\Omega_\alpha} \sum_{i,j=1}^{2} æ_{\alpha ij} \frac{\partial T_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial Q_\alpha}{\partial x_j} d\Omega, \qquad (23)$$

$$K(\mathbf{T},\mathbf{Q}) = \sum_{\alpha=1}^{N} K_\alpha(T_\alpha,Q_\alpha), \quad \mathbf{T},\mathbf{Q} \in V_T, \quad K_\alpha(T_\alpha,Q_\alpha) = \int\limits_{\Gamma_\alpha^t} \rho_\alpha^c T_\alpha Q_\alpha \, dS, \qquad (24)$$

а також лінійну форму

$$Y(\mathbf{Q}) = \sum_{\alpha=1}^{N} Y_\alpha(Q_\alpha), \quad \mathbf{Q} \in V_T, \quad Y_\alpha(Q_\alpha) = \int\limits_{\Gamma_\alpha^t} \rho_\alpha^c T_\alpha^c Q_\alpha \, dS, \quad Q_\alpha \in V_\alpha^T. \qquad (25)$$

Крім цього, розглянемо такі функціонали, що діють з просторів $V_T \times V_0$ і $U_0 \times V_T \times V_T$ відповідно:

$$M(\mathbf{T},\mathbf{v}) = \sum_{\alpha=1}^{N} M_\alpha(T_\alpha,\mathbf{v}_\alpha), \qquad \mathbf{T} \in V_T, \quad \mathbf{v} \in V_0,$$

$$M_\alpha(T_\alpha,\mathbf{v}_\alpha) = -\int\limits_{\Omega_\alpha} (3\lambda_\alpha + 2\mu_\alpha)\tilde{\beta}_\alpha(T_\alpha - T_{0\alpha}) \sum_{j=1}^{2} \varepsilon_{\alpha jj}(\mathbf{v}_\alpha)\, d\Omega, \ T_\alpha \in V_\alpha^T, \ \mathbf{v}_\alpha \in V_\alpha^0, \qquad (26)$$

$$\tilde{J}_T(\mathbf{U},\mathbf{T},\mathbf{Q}) = \sum_{\{\alpha,\beta\}\in P} \int\limits_{S_{\alpha\beta}} \tilde{\rho}_{\alpha\beta}(\sigma_{\alpha n},\tilde{\varphi}_{\alpha\beta})(T_\alpha - T_\beta)(Q_\alpha - Q_\beta)\, dS,$$

$$\mathbf{U} \in U_0, \quad \mathbf{T},\mathbf{Q} \in V_T. \qquad (27)$$

Зазначимо, що функціонал $M(\mathbf{T},\mathbf{v})$ – лінійний за $\mathbf{T}$ і $\mathbf{v}$, а функціонал $\tilde{J}_T(\mathbf{U},\mathbf{T},\mathbf{Q})$ – лінійний за $\mathbf{T}$ і $\mathbf{Q}$, однак нелінійний за $\mathbf{U}$.

Лема 1. *Нехай межі* $\Gamma_\alpha = \partial\Omega_\alpha$, $\alpha = 1,2,\ldots,N$, *тіл є ліпшицевими,* $\Gamma_\alpha^u \neq \varnothing$, $\mathbf{f}_\alpha \in [L_2(\Omega_\alpha)]^2$, $\mathbf{p}_\alpha \in [L_2(\Gamma_\alpha^\sigma)]^2$, $T_{0\alpha} \in V_T$, $\lambda_\alpha, \mu_\alpha, \tilde{\beta}_\alpha \in L_\infty(\Omega_\alpha)$, *функції* $\tilde{\beta}_\alpha(\mathbf{x})$ *є обмеженими і виконується умова* (5). *Тоді білінійна форма* $A(\mathbf{u},\mathbf{v})$ *є си-*

метричною, неперервною і коерцитивною у просторі V_0, *лінійна форма* $L(\mathbf{v})$ – *неперервною у* V_0, *а функціонал* $M(\mathbf{T},\mathbf{v})$ – *неперервний за* $\mathbf{v}$.

Розглянемо властивості функціонала $H(\mathbf{w})$. Цей функціонал є диференційовним за Ґато [30]:

$$H'(\mathbf{w},\mathbf{z}) = \sum_{\{\alpha,\beta\}\in P} \int\limits_{S_{\alpha\beta}} g_{\alpha\beta}(w_{\alpha\beta}) z_{\alpha\beta}\, dS, \qquad \mathbf{w},\mathbf{z} \in W. \tag{28}$$

Диференціал Ґато $H'(\mathbf{w},\mathbf{z})$ є лінійним за $\mathbf{z}$, однак нелінійним за $\mathbf{w}$.

З використанням результатів праць [8, 20, 30] отримано таке твердження, яке сформулюємо без доведення.

Теорема 1. *Вихідна термоконтактна задача* (1)–(4), (6)–(8), (13)–(17) *еквівалентна у слабкому розумінні варіаційній системі, що складається з варіаційного рівняння і варіаційної нерівності*:

знайти $(\mathbf{U},\mathbf{T})^\top \in Z \times V_T$, *де* $\mathbf{U} = (\mathbf{u},\mathbf{w})^\top$, *таке, що*

$$D(\mathbf{T},\mathbf{Q}) + K(\mathbf{T},\mathbf{Q}) + \tilde{J}_T(\mathbf{U},\mathbf{T},\mathbf{Q}) - Y(\mathbf{Q}) = 0 \quad \forall \mathbf{Q} \in V_T,$$

$$A(\mathbf{u},\mathbf{v}-\mathbf{u}) + M(\mathbf{T},\mathbf{v}-\mathbf{u}) + H'(\mathbf{w},\mathbf{z}-\mathbf{w}) - L(\mathbf{v}-\mathbf{u}) \ge 0 \quad \forall \mathbf{V} = (\mathbf{v},\mathbf{z})^\top \in Z. \tag{29}$$

Тепер, застосовуючи результати, одержані у роботах [20, 30, 52], сформулюємо альтернативну варіаційну постановку цієї задачі у вигляді системи лінійного і нелінійного варіаційних рівнянь.

Для цього означимо в просторі V_0 невід'ємний неквадратичний функціонал [30]

$$J(\mathbf{u}) = \sum_{\{\alpha,\beta\}\in P} \int\limits_{S_{\alpha\beta}} \left[\int\limits_0^{d_{\alpha\beta}-u_{\alpha n}-u_{\beta n}} g^-_{\alpha\beta}(z)\, dz \right] dS \ge 0, \qquad \mathbf{u} \in V_0, \tag{30}$$

де $g^-_{\alpha\beta}(z)$ – нелінійна функція, яка визначається так:

$$g^-_{\alpha\beta}(z) = \{0,\ z \ge 0\} \vee \{g_{\alpha\beta}(z),\ z < 0\}.$$

Функціонал $J(\mathbf{u})$ є один раз диференційовним за Ґато:

$$J'(\mathbf{u},\mathbf{v}) = -\sum_{\{\alpha,\beta\}\in P} \int\limits_{S_{\alpha\beta}} g^-_{\alpha\beta}(d_{\alpha\beta} - u_{\alpha n} - u_{\beta n})[v_{\alpha n} + v_{\beta n}]\, dS, \quad \mathbf{u},\mathbf{v} \in V_0. \tag{31}$$

Диференціал Ґато $J'(\mathbf{u},\mathbf{v})$ є лінійним за $\mathbf{v}$ і нелінійним за $\mathbf{u}$. Сформулюємо лему про властивості функціонала $J'(\mathbf{u},\mathbf{v})$ (доведення якої тут не наводимо).

Лема 2 [20, 52**].** *Нехай межі* $S_{\alpha\beta}$, $\{\alpha,\beta\} \in P$, *є ліпшицевими,* $d_{\alpha\beta} \in H^{1/2}_{00}(\Xi_\alpha)$ *і виконуються умови* (11), (12). *Тоді функціонал* $J'(\mathbf{u},\mathbf{v})$ *має такі властивості*:

$$(\forall \mathbf{u} \in V_0)\ \ (\exists \tilde{R} > 0)\ \ (\forall \mathbf{v} \in V_0) \quad \left\{ \left| J'(\mathbf{u},\mathbf{v}) \right| \le \tilde{R} \|\mathbf{v}\|_{V_0} \right\}, \tag{32}$$

$$(\exists \tilde{C} > 0)\ (\forall \mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{v}^* \in V_0) \quad \left\{ \left| J'(\mathbf{u}+\mathbf{v}^*,\mathbf{v}) - J'(\mathbf{u},\mathbf{v}) \right| \le \tilde{C} \|\mathbf{v}\|_{V_0} \left\|\mathbf{v}^*\right\|_{V_0} \right\}, \tag{33}$$

$$(\forall \mathbf{u},\mathbf{v} \in V_0) \qquad \{ J'(\mathbf{u}+\mathbf{v},\mathbf{v}) - J'(\mathbf{u},\mathbf{v}) \ge 0 \}. \tag{34}$$

На основі результатів праць [20, 30] доведено таке твердження (доведення якого тут не наводимо).

Теорема 2. *Контактна задача* (1)–(4), (6)–(8), (13)–(17) *еквівалентна задачі* (1)–(4), (6)–(8) *з такими нелінійними крайовими умовами на межах* $S_{\alpha\beta}$:

$$\sigma_{\alpha\tau}(\mathbf{x}) = \sigma_{\beta\tau}(\mathbf{x}') = 0\,,$$

$$\sigma_{\alpha n}(\mathbf{x}) = \sigma_{\beta n}(\mathbf{x}') = g^{-}_{\alpha\beta}(d_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) - u_{\alpha n}(\mathbf{x}) - u_{\beta n}(\mathbf{x}'))\,,$$

$$\sum_{i,j=1}^{2} \varkappa_{\alpha ij} n_{\alpha i} \frac{\partial T_\alpha(\mathbf{x})}{\partial x_j} = -\sum_{i,j=1}^{2} \varkappa_{\beta ij} n_{\beta i} \frac{\partial T_\beta(\mathbf{x}')}{\partial x_j} = -\rho_{\alpha\beta}(\mathbf{x})(T_\alpha(\mathbf{x}) - T_\beta(\mathbf{x}'))\,,$$

$$\mathbf{x}' = \Pr(\mathbf{x}) \in S_{\beta\alpha}, \qquad \mathbf{x} \in S_{\alpha\beta}, \qquad \beta \in B_\alpha, \qquad \alpha = 1,2,\ldots,N\,,$$

а також еквівалентна в слабкому розумінні системі лінійного і нелінійного варіаційних рівнянь у просторі $V_0 \times V_T$:

знайти $(\mathbf{u},\mathbf{T})^\top \in V_0 \times V_T$ *, таке що*

$$D(\mathbf{T},\mathbf{Q}) + K(\mathbf{T},\mathbf{Q}) + J_T(\mathbf{u},\mathbf{T},\mathbf{Q}) - Y(\mathbf{Q}) = 0 \qquad \forall \mathbf{Q} \in V_T\,,$$

$$A(\mathbf{u},\mathbf{v}) + M(\mathbf{T},\mathbf{v}) + J'(\mathbf{u},\mathbf{v}) - L(\mathbf{v}) = 0 \qquad \forall \mathbf{v} \in V\,, \tag{35}$$

з наступним знаходженням величин $w_{\alpha\beta} \in H^{1/2}_{00}(\Xi_\alpha)$ *за формулою*

$$w_{\alpha\beta} = \tilde{g}_{\alpha\beta}(\sigma_{\alpha n}), \qquad \sigma_{\alpha n} = g^{-}_{\alpha\beta}(d_{\alpha\beta} - u_{\alpha n} - u_{\beta n}), \qquad \{\alpha,\beta\} \in P\,, \tag{36}$$

де

$$\rho_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) = \rho_{\alpha\beta}(\sigma_{\alpha n}, \varphi_{\alpha\beta}) = \begin{cases} q_1(\sigma_{\alpha n}), & \sigma_{\alpha n}(\mathbf{x}) = \sigma_{\beta n}(\mathbf{x}') \le 0, \\ q_2(\varphi_{\alpha\beta}), & \sigma_{\alpha n}(\mathbf{x}) = \sigma_{\beta n}(\mathbf{x}') = 0, \end{cases}$$

$$\varphi_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) = d_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) - u_{\alpha n}(\mathbf{x}) - u_{\beta n}(\mathbf{x}'), \quad \mathbf{x}' = \Pr(\mathbf{x}) \in S_{\beta\alpha}, \quad \mathbf{x} \in S_{\alpha\beta}, \ \{\alpha,\beta\} \in P\,,$$

а $J_T(\mathbf{u},\mathbf{T},\mathbf{Q})$ *– лінійний за* $\mathbf{T}$ *і* $\mathbf{Q}$ *та нелінійний за* $\mathbf{u}$ *функціонал, що діє з простору* $V_0 \times V_T \times V_T$:

$$J_T(\mathbf{u},\mathbf{T},\mathbf{Q}) = \sum_{\{\alpha,\beta\}\in P} \int\limits_{S_{\alpha\beta}} \rho_{\alpha\beta}(\sigma_{\alpha n}, \varphi_{\alpha\beta})(T_\alpha - T_\beta)(Q_\alpha - Q_\beta)\,dS\,,$$

$$\mathbf{u} \in V_0, \quad \mathbf{T},\mathbf{Q} \in V_T\,.$$

Зазначимо, що зі співвідношення (36) та умови $g_{\alpha\beta}(0) = 0$, $\{\alpha,\beta\} \in P$, випливає, що $w_{\alpha\beta} = 0$ і $\varphi_{\alpha\beta} = \tilde{\varphi}_{\alpha\beta}$ при $\sigma_{\alpha n} = 0$. Тому виконуються рівності

$$\rho_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) = \rho_{\alpha\beta}(\sigma_{\alpha n}, \varphi_{\alpha\beta}) = \tilde{\rho}_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) = \tilde{\rho}_{\alpha\beta}(\sigma_{\alpha n}, \tilde{\varphi}_{\alpha\beta}), \quad \mathbf{x} \in S_{\alpha\beta}, \quad \{\alpha,\beta\} \in P\,,$$

$$J_T(\mathbf{u},\mathbf{T},\mathbf{Q}) = \tilde{J}_T(\mathbf{U},\mathbf{T},\mathbf{Q}) \qquad \forall \mathbf{U} = (\mathbf{u},\mathbf{w})^\top \in U_0, \quad \forall \mathbf{T},\mathbf{Q} \in V_T\,.$$

Отже, вихідну термоконтактну задачу (1)–(4), (6)–(8), (13)–(17) зведено до розв'язування системи (35), що складається з лінійного і нелінійного варіаційних рівнянь.

3. Алгоритми декомпозиції області. До розв'язування варіаційної системи (31), яка відповідає контактній задачі (1)–(4), (6)–(8), (13)–(17) застосуємо такий неявний нестаціонарний ітераційний метод з параметрами:

$$\tilde{G}^k(\mathbf{T}^{k+1},\mathbf{Q}) = \tilde{G}^k(\mathbf{T}^k,\mathbf{Q}) - \omega^k\big[D(\mathbf{T}^k,\mathbf{Q}) + K(\mathbf{T}^k,\mathbf{Q}) + J_T(\mathbf{u}^k,\mathbf{T}^k,\mathbf{Q}) - Y(\mathbf{Q})\big], \tag{37}$$

$$G^k(\mathbf{u}^{k+1},\mathbf{v}) = G^k(\mathbf{u}^k,\mathbf{v}) - \gamma^k\big[A(\mathbf{u}^k,\mathbf{v}) + M(\mathbf{T}^k,\mathbf{v}) + J'(\mathbf{u}^k,\mathbf{v}) - L(\mathbf{v})\big], \qquad k = 0,1,\ldots, \tag{38}$$

де $\tilde{G}^k : V_T \times V_T \to \mathbb{R}$, $G^k : V_0 \times V_0 \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}_0 = \{0,1,\ldots\}$, – деякі білінійні форми, задані відповідно у просторах V_T і V_0 , $\omega^k, \gamma^k > 0$, $k = 0,1,\ldots$, – ітера-

ційні параметри, $\mathbf{u}^k \in V_0$, $\mathbf{T}^k \in V_T$, $k = 1,2,\ldots$, – k-ті наближення до точного розв'язку системи (38), а $\mathbf{u}^0 \in V_0$, $\mathbf{T}^0 \in V_T$ – початкові наближення.

Однак у загальному випадку ітераційний метод (37), (38), застосований до розв'язування системи (38), не приводить до декомпозиції задачі за підобластями. Тому пропонуємо такі варіанти цього методу, які на кожній ітерації реалізують декомпозицію по підобластях, тобто зводять розв'язування нелінійної варіаційної системи (38) у всій області Ω до розв'язування послідовності лінійних варіаційних рівнянь в окремих підобластях Ω_α. Декомпозиції можна досягнути певним вибором білінійних форм $\tilde{G}^k$ і G^k.

Надалі вважатимемо, що функції $g_{\alpha\beta}(z)$, $\{\alpha,\beta\} \in P$, мають узагальнені похідні, які позначатимемо через $g'_{\alpha\beta}(z)$, $\{\alpha,\beta\} \in P$. Виберемо білінійні форми $\tilde{G}^k$ і G^k у методі (37), (38) так:

$$\tilde{G}^k(\mathbf{T},\mathbf{Q}) = D(\mathbf{T},\mathbf{Q}) + K(\mathbf{T},\mathbf{Q}) + J'_T(\mathbf{u}^k,\mathbf{T}^k,\mathbf{T},\mathbf{Q}), \qquad \mathbf{T},\mathbf{Q} \in V_T, \tag{39}$$

$$J'_T(\mathbf{u}^k,\mathbf{T}^k,\mathbf{T},\mathbf{Q}) = J_T(\mathbf{u}^k,\mathbf{T},\mathbf{Q}) = \sum_{\{\alpha,\beta\}\in P} \int\limits_{S_{\alpha\beta}} \rho^k_{\alpha\beta}(T_\alpha - T_\beta)(Q_\alpha - Q_\beta)\,dS,$$

$$G^k(\mathbf{u},\mathbf{v}) = A(\mathbf{u},\mathbf{v}) + \partial^2 J(\mathbf{u}^k,\mathbf{u},\mathbf{v}), \qquad \mathbf{u},\mathbf{v} \in V_0, \tag{40}$$

$$\partial^2 J(\mathbf{u}^k,\mathbf{u},\mathbf{v}) = \sum_{\{\alpha,\beta\}\in P} \int\limits_{S_{\alpha\beta}} \chi^k_{\alpha\beta} g'_{\alpha\beta}(d_{\alpha\beta} - u^k_{\alpha n} - u^k_{\beta n}) \times$$

$$\times (u_{\alpha n} + u_{\beta n})(v_{\alpha n} + v_{\beta n})\,dS, \quad \mathbf{u},\mathbf{v} \in V_0,$$

$$\rho^k_{\alpha\beta} = \rho_{\alpha\beta}(\sigma^k_{\alpha n},\varphi^k_{\alpha\beta}), \qquad \chi^k_{\alpha\beta} = -\left[\operatorname{sgn}(d_{\alpha\beta} - u^k_{\alpha n} - u^k_{\beta n})\right]^-, \qquad \{\alpha,\beta\} \in P.$$

Тут $J'_T(\mathbf{u}^k,\mathbf{T}^k,\mathbf{T},\mathbf{Q})$ – диференціал Ґато функціонала $J_T(\mathbf{u},\mathbf{T},\mathbf{Q})$ за змінною $\mathbf{T}$ у точці $(\mathbf{u}^k,\mathbf{T}^k)^\top$ за напрямком $\mathbf{T} \in V_T$, а $\partial^2 J(\mathbf{u}^k,\mathbf{u},\mathbf{v})$ – один із других субдиференціалів Ґато функціонала $J(\mathbf{u})$ у точці $\mathbf{u}^k \in V_0$ за напрямками $\mathbf{u} \in V_0$ і $\mathbf{v} \in V_0$.

Ітераційний метод (37), (38) з білінійними формами (39), (40) при $\omega^k = \gamma^k = 1$, $k = 0,1,\ldots$, відповідає неявному напівгладкому методу Ньютона для розв'язування варіаційної системи (35). Проте ітераційним методом (37), (38), (39), (40) не отримуємо декомпозиції задачі за підобластями.

Тепер білінійні форми $\tilde{G}^k$ і G^k у методі (37), (38) виберемо так:

$$\tilde{G}^k(\mathbf{T},\mathbf{Q}) = D(\mathbf{T},\mathbf{Q}) + K(\mathbf{T},\mathbf{Q}) + \tilde{X}^k(\mathbf{u}^k,\mathbf{T},\mathbf{Q}), \qquad \mathbf{T},\mathbf{Q} \in V_T, \tag{41}$$

$$G^k(\mathbf{u},\mathbf{v}) = A(\mathbf{u},\mathbf{v}) + X^k(\mathbf{u},\mathbf{v}), \qquad \mathbf{u},\mathbf{v} \in V_0, \tag{42}$$

де $\tilde{X}^k : V_0 \times V_T \times V_T \to \mathbb{R}$ і $X^k : V_0 \times V_0 \to \mathbb{R}$ – такі функціонали:

$$\tilde{X}^k(\mathbf{u}^k,\mathbf{T},\mathbf{Q}) = \sum_{\{\alpha,\beta\}\in P} \int\limits_{\tilde{S}^k_{\alpha\beta}} \rho_{\alpha\beta}(\sigma^k_{\alpha n},\varphi^k_{\alpha\beta})(T_{\alpha n}Q_{\alpha n} + T_{\beta n}Q_{\beta n})\,dS =$$

$$= \sum_{\{\alpha,\beta\}\in P} \int\limits_{S_{\alpha\beta}} \phi^k_{\alpha\beta}\rho^k_{\alpha\beta}(T_{\alpha n}Q_{\alpha n} + T_{\beta n}Q_{\beta n})\,dS, \qquad \mathbf{T},\mathbf{Q} \in V_T, \tag{43}$$

$$X^k(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \sum_{\{\alpha,\beta\}\in P} \int\limits_{S^k_{\alpha\beta}} g'_{\alpha\beta}(d_{\alpha\beta} - u^k_{\alpha n} - u^k_{\beta n})(u_{\alpha n}v_{\alpha n} + u_{\beta n}v_{\beta n})\,dS =$$

$$= \sum_{\{\alpha,\beta\}\in P} \int\limits_{S_{\alpha\beta}} \psi_{\alpha\beta}^k g'_{\alpha\beta}(d_{\alpha\beta} - u_{\alpha n}^k - u_{\beta n}^k) \times$$

$$\times (u_{\alpha n} v_{\alpha n} + u_{\beta n} v_{\beta n})\, dS, \qquad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_0 . \tag{44}$$

Тут $\tilde{S}_{\alpha\beta}^k$, $S_{\alpha\beta}^k \subseteq S_{\alpha\beta}$, $k \in \mathbb{N}_0$, – деякі задані підмножини меж $S_{\alpha\beta}$, $\{\alpha,\beta\} \in P$, а $\phi_{\alpha\beta}^k(\mathbf{x}) = \{0, \mathbf{x} \in S_{\alpha\beta} \backslash \tilde{S}_{\alpha\beta}^k\} \vee \{1, \mathbf{x} \in \tilde{S}_{\alpha\beta}^k\}$ і $\psi_{\alpha\beta}^k(\mathbf{x}) = \{0, \mathbf{x} \in S_{\alpha\beta} \backslash S_{\alpha\beta}^k\} \vee \{1, \mathbf{x} \in S_{\alpha\beta}^k\}$ – характеристичні функції цих підмножин. Зокрема, функції $\phi_{\alpha\beta}^k$ і $\psi_{\alpha\beta}^k$ можна задати, як у напівгладкому методі Ньютона, тобто у вигляді

$$\phi_{\alpha\beta}^k \equiv 1, \qquad \psi_{\alpha\beta}^k = \chi_{\alpha\beta}^k = \chi_{\alpha\beta}(\mathbf{u}^k) = -\left[\operatorname{sgn}(d_{\alpha\beta} - u_{\alpha n}^k - u_{\beta n}^k)\right]^- ,$$

$$\{\alpha,\beta\} \in P, \quad k \in \mathbb{N}_0 . \tag{45}$$

Покажемо, що внаслідок такого вибору форм $\tilde{G}^k$ і G^k отримуємо декомпозицію за підобластями. Увівши позначення

$$\tilde{\mathbf{T}}^{k+1} = \frac{\mathbf{T}^{k+1} - (1-\omega^k)\mathbf{T}^k}{\omega^k} \qquad \text{і} \qquad \tilde{\mathbf{u}}^{k+1} = \frac{\mathbf{u}^{k+1} - (1-\gamma^k)\,\mathbf{u}^k}{\gamma^k},$$

перепишемо ітераційний метод (37), (38) з білінійними формами (41), (42) у наступному еквівалентному вигляді:

$$D(\tilde{\mathbf{T}}^{k+1}, \mathbf{Q}) + K(\tilde{\mathbf{T}}^{k+1}, \mathbf{Q}) + \tilde{X}^k(\mathbf{u}^k, \tilde{\mathbf{T}}^{k+1}, \mathbf{Q}) =$$

$$= Y(\mathbf{Q}) + \tilde{X}^k(\mathbf{u}^k, \mathbf{T}^k, \mathbf{Q}) - J_T(\mathbf{u}^k, \mathbf{T}^k, \mathbf{Q}), \tag{46}$$

$$A(\tilde{\mathbf{u}}^{k+1}, \mathbf{v}) + X^k(\tilde{\mathbf{u}}^{k+1}, \mathbf{v}) = L(\mathbf{v}) - M(\mathbf{T}^k, \mathbf{v}) + X^k(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}) - J'_\theta(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}), \tag{47}$$

$$\mathbf{T}^{k+1} = \omega^k \tilde{\mathbf{T}}^{k+1} + (1-\omega^k)\mathbf{T}^k, \tag{48}$$

$$\mathbf{u}^{k+1} = \gamma^k \tilde{\mathbf{u}}^{k+1} + (1-\gamma^k)\mathbf{u}^k, \qquad k = 0,1,\ldots. \tag{49}$$

Оскільки величини, які є спільними для підобластей, відомі з попереднього ітераційного кроку, то кожне з варіаційних рівнянь (46) і (47) розпадається на N незалежних варіаційних рівнянь у підобластях Ω_α, і метод (46)–(49) еквівалентний ітераційному процесу

$$D_\alpha(\tilde{T}_\alpha^{k+1}, Q_\alpha) + K_\alpha(\tilde{T}_\alpha^{k+1}, Q_\alpha) + \sum_{\beta\in B_\alpha} \int\limits_{S_{\alpha\beta}} \phi_{\alpha\beta}^k \rho_{\alpha\beta}(\mathbf{u}^k)\tilde{T}_\alpha^{k+1} Q_\alpha \, dS =$$

$$= Y_\alpha(Q_\alpha) + \sum_{\beta\in B_\alpha} \int\limits_{S_{\alpha\beta}} \phi_{\alpha\beta}^k \rho_{\alpha\beta}(\mathbf{u}^k) T_\alpha^k Q_\alpha \, dS -$$

$$- \sum_{\beta\in B_\alpha} \int\limits_{S_{\alpha\beta}} \rho_{\alpha\beta}(\mathbf{u}^k)(T_\alpha^k - T_\beta^k) Q_\alpha \, dS, \qquad \alpha = 1,\ldots,N, \tag{50}$$

$$a_\alpha(\tilde{\mathbf{u}}_\alpha^{k+1}, \mathbf{v}_\alpha) + \sum_{\beta\in B_\alpha} \int\limits_{S_{\alpha\beta}} \psi_{\alpha\beta}^k g'_{\alpha\beta}(d_{\alpha\beta} - u_{\alpha n}^k - u_{\beta n}^k)\tilde{u}_{\alpha n}^{k+1} v_{\alpha n} \, dS = \ell_\alpha(\mathbf{v}_\alpha) -$$

$$- M_\alpha(T_\alpha^k, \mathbf{v}_\alpha) + \sum_{\beta\in B_\alpha} \int\limits_{S_{\alpha\beta}} \psi_{\alpha\beta}^k g'_{\alpha\beta}(d_{\alpha\beta} - u_{\alpha n}^k - u_{\beta n}^k) u_{\alpha n}^k v_{\alpha n} \, dS +$$

$$+ \sum_{\beta\in B_\alpha} \int\limits_{S_{\alpha\beta}} g_{\alpha\beta}^-(d_{\alpha\beta} - u_{\alpha n}^k - u_{\beta n}^k) v_{\alpha n} \, dS, \qquad \alpha = 1,\ldots,N, \tag{51}$$

$$T_\alpha^{k+1} = \omega^k \tilde{T}_\alpha^{k+1} + (1-\omega^k) T_\alpha^k, \qquad \alpha = 1,\ldots,N, \tag{52}$$

$$\mathbf{u}_\alpha^{k+1} = \gamma^k \tilde{\mathbf{u}}_\alpha^{k+1} + (1-\gamma^k)\mathbf{u}_\alpha^k, \qquad \alpha = 1,\ldots,N, \qquad k = 0,1,\ldots. \tag{53}$$

На кожному k-му кроці методу (50)–(53) необхідно паралельно розв'язувати N незалежних лінійних варіаційних рівнянь (50) в окремих тілах Ω_α, що відповідають задачам теплопровідності з крайовими умовами Робіна (Пуанкаре, Ньютона) на ділянках можливого контакту $S_{\alpha\beta}$:

$$\sum_{i,j=1}^{2} æ_{\alpha ij} n_{\alpha i} \frac{\partial \tilde{T}_\alpha^{k+1}}{\partial x_j} + \phi_{\alpha\beta}^k \rho_{\alpha\beta}^k \tilde{T}_\alpha^{k+1} = \rho_{\alpha\beta}^k (T_\beta^k - T_\alpha^k) + \phi_{\alpha\beta}^k \rho_{\alpha\beta}^k T_\alpha^k, \qquad \mathbf{x} \in S_{\alpha\beta},$$

а також N незалежних лінійних варіаційних рівнянь (51) у цих тілах, що відповідають задачам теорії пружності з крайовими умовами Робіна на межах $S_{\alpha\beta}$:

$$\tilde{\sigma}_{\alpha\beta n}^{k+1} + \tilde{\psi}_{\alpha\beta}^k \tilde{u}_{\alpha n}^{k+1} = g_{\alpha\beta}^-(d_{\alpha\beta} - u_{\alpha n}^k - u_{\beta n}^k) + \tilde{\psi}_{\alpha\beta}^k u_{\alpha n}^k, \qquad \mathbf{x} \in S_{\alpha\beta},$$

де $\tilde{\psi}_{\alpha\beta}^k = \psi_{\alpha\beta}^k g'_{\alpha\beta}(d_{\alpha\beta} - u_{\alpha n}^k - u_{\beta n}^k)$, і додатковими об'ємними силами.

Тому ітераційний метод (50)–(53) належить до паралельних схем Робіна декомпозиції області.

Задаючи різні характеристичні функції $\phi_{\alpha\beta}^k = \phi_{\alpha\beta}^k(\mathbf{x})$, $\psi_{\alpha\beta}^k = \psi_{\alpha\beta}^k(\mathbf{x})$, $\{\alpha,\beta\} \in P$, $k = 0,1,\ldots$, у білінійних формах (41), (42), тобто різні підмножини $\tilde{S}_{\alpha\beta}^k, S_{\alpha\beta}^k \subseteq S_{\alpha\beta}$, отримаємо різні варіанти методу декомпозиції області (50)–(53). Так, покладаючи $\phi_{\alpha\beta}^k(\mathbf{x}) \equiv 0$, $\psi_{\alpha\beta}^k(\mathbf{x}) \equiv 0$, тобто $\tilde{S}_{\alpha\beta}^k = S_{\alpha\beta}^k = \varnothing \quad \forall\alpha,\beta, \forall k$, одержимо паралельну схему Неймана. Інший граничний випадок відповідає вибору $\phi_{\alpha\beta}^k(\mathbf{x}) \equiv 1$, $\psi_{\alpha\beta}^k(\mathbf{x}) \equiv 1$, тобто $\tilde{S}_{\alpha\beta}^k = S_{\alpha\beta}^k = S_{\alpha\beta} \quad \forall\alpha,\beta, \forall k$. Однак проведені числові експерименти показали, що найефективніше ці функції вибирати у вигляді (45). Тоді алгоритм декомпозиції області (50)–(53) можна трактувати як певну модифікацію напівгладкого методу Ньютона. Такий вибір забезпечить вищу швидкість збіжності, ніж інші варіанти.

Зазначимо, що в алгоритмах декомпозиції області (50)–(53) усі задачі теплопровідності та усі задачі теорії пружності на кожній ітерації розв'язуються паралельно і незалежно одна від одної, а потім обчислюються наступні наближення для температури і переміщень.

Отже, для розв'язування задачі про неідеальний термомеханічний контакт багатьох пружних тіл за наявності нелінійних вінклерівських поверхневих шарів запропоновано різні алгоритми декомпозиції області, які зводять цю задачу до паралельного розв'язування на кожній ітерації задач теплопровідності і теорії пружності в окремих тілах з крайовими умовами Робіна на зонах можливого контакту. Крайові задачі в окремих тілах Ω_α можна розв'язувати різними числовими методами, зокрема методом скінченних елементів (МСЕ) або методом граничних елементів (МГЕ). Далі проведемо числовий аналіз розроблених алгоритмів для випадку плоских задач про термопружний контакт двох тіл.

4. Числові дослідження. Розроблено програмне забезпечення, яке реалізує отримані алгоритми декомпозиції області (50)–(53) для задач про термопружний контакт через нелінійні вінклерівські шари двох і трьох пружних тіл за умов плоскої деформації з використанням МСЕ на лінійних і квадратичних трикутних елементах для розв'язування крайових задач теорії пружності та теплопровідності в окремих тілах.

За допомогою цього програмного забезпечення алгоритми МДО апробовано для розв'язування задачі про термомеханічний контакт через нелінійний вінклерівський прошарок двох скінченних пружних ізотропних тіл Ω_1 і Ω_2 з квадратичним міжконтактним зазором за умов плоскої деформації. Силові крайові умови та схему контакту для цієї задачі зображено на рис. 2.

Обидва тіла мають однакову висоту і однакову довжину, які відповідно дорівнюють $h = 1$ м і $\ell = 4$ м. На верхній грані тіла Ω_2 задано переміщення $u_{21}(\mathbf{x}) = 0$ [м], $u_{22}(\mathbf{x}) = -\Delta$, де $\Delta = 1.366\, r_0$, $r_0 = 10^{-3}$ [м]. Нижня грань тіла Ω_1 жорстко закріплена. На лівій грані кожного з тіл задаємо умови симетрії, а права грань є вільна від навантажень. Ділянка можливого контакту між тілами $S_{12} = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2)^\top : x_1 \in [0, \ell/2],\, x_2 = h\}$. Зазор між тілами до деформації описується функцією $d_{12}(\mathbf{x}) = r_0 x_1^2$, $\mathbf{x} \in S_{12}$. Частину верхньої грані тіла Ω_1, що відповідає ділянці S_{12}, покриває нелінійний вінклерівський шар. Нелінійні функції $\tilde{g}_{12}$ і g_{12}, які описують зв'язок між нормальним напруженням і нормальним переміщенням вінклерівського шару, вибирали у формі

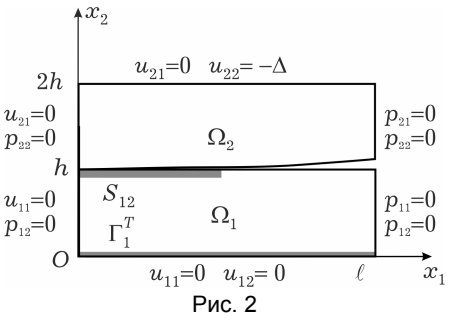

Рис. 2

$$\tilde{g}_{12}(\sigma_{1n}(\mathbf{x})) = B\,\mathrm{sgn}\,(\sigma_{1n}(\mathbf{x}))\,|\sigma_{1n}(\mathbf{x})|^a, \qquad \mathbf{x} \in S_{12},$$

$$g_{12}(w_{12}(\mathbf{x})) = \frac{1}{B^{1/a}}\,\mathrm{sgn}\,(w_{12}(\mathbf{x}))\,|w_{12}(\mathbf{x})|^{1/a}, \qquad \mathbf{x} \in S_{12}.$$

Ділянки конвективного теплообміну тіл із зовнішнім середовищем мають вигляд $\Gamma_1^t = \Gamma_1 \backslash S_{12}$, $\Gamma_2^t = \Gamma_2 \backslash S_{21}$. На частинах меж Γ_α^t, $\alpha = 1,2$, що виключають ліві бічні грані $\Gamma_1^0 = \{\mathbf{x} : x_1 = 0,\, x_2 \in [0,h]\}$ і $\Gamma_2^0 = \{\mathbf{x} : x_1 = 0,\, x_2 \in [h,2h]\}$, тобто на $\Gamma_\alpha^t \setminus \Gamma_\alpha^0$, $\alpha = 1,2$, коефіцієнти конвективного теплообміну задавали рівними $\rho_\alpha^c(\mathbf{x}) \equiv 23$ [Вт/(м$^2\cdot$ °C)], а на бічних гранях Γ_α^0, $\alpha = 1,2$, −нульовими: $\rho_\alpha^c(\mathbf{x}) \equiv 0$ [Вт/(м$^2\cdot$ °C)]. Температуру зовнішнього середовища на нижній ділянці межі нижнього тіла $\Gamma_1^T = \{\mathbf{x} : x_1 \in [0,\ell],\, x_2 = 0\} \subset \Gamma_1^t$ задавали рівною $T_1^c(\mathbf{x}) \equiv T_1^p$, а на решті частини цієї межі, крім ділянки контакту, тобто на $\Gamma_1^t \backslash \Gamma_1^T$, −нульовою: $T_1^c(\mathbf{x}) \equiv 0$ [°C]. Температуру зовнішнього середовища на всій частині Γ_2^t межі верхнього тіла задавали однаковою і рівною нулеві: $T_2^c(\mathbf{x}) \equiv 0$ [°C]. Модулі Юнґа, коефіцієнти Пуассона, коефіцієнти теплопровідності і коефіцієнти лінійного розширення обох тіл задавали однаковими: $E_1 = E_2 = 210$ ГПа, $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$, $\varkappa_{1ii} = \varkappa_{2ii} = 47$ [Вт/(м · °C], $i = 1,2$, $\varkappa_{1ij} = \varkappa_{2ij} = 0$ [Вт/(м · °C], $i,j = 1,2$, $i \neq j$, $\tilde{\beta}_1 = \tilde{\beta}_2 = 10^{-5}$ [°C^{-1}]. Початкові температури тіл задавали нульовими: $T_{\alpha 0}(\mathbf{x}) \equiv 0$ [°C], $\mathbf{x} \in \Omega_\alpha$, $\alpha = 1,2$. Об'ємні сили відсутні: $f_{\alpha 1}(\mathbf{x}) = f_{\alpha 2}(\mathbf{x}) \equiv 0$, $\mathbf{x} \in \Omega_\alpha$, $\alpha = 1,2$. Коефіцієнт контактного теплообміну між тілами, $\mathbf{x} \in S_{12}$, задавали формулою [7]

$$\tilde{\rho}_{12}(\sigma_{1n}, \tilde{\varphi}_{12}) = \left\{ \begin{array}{ll} 3\cdot 10^3 \left(1 + |\sigma_{1n}|^{0.6} \cdot 10^{-4}\right), & \sigma_{1n} < 0,\ \ \tilde{\varphi}_{12} = 0, \\ 3\cdot 10^3 (1 + 10^4 \tilde{\varphi}_{12}), & \sigma_{1n} = 0,\ \ \tilde{\varphi}_{12} > 0, \end{array} \right\} \text{[Вт/(м · °C].}$$

Задачу розв'язували за допомогою методу (50)−(53) декомпозиції області при $N = 2$. Для числового розв'язування на кожному ітераційному кроці варіаційних рівнянь теорії пружності і теплопровідності для кожного з тіл застосовували МСЕ з 4096 квадратичними трикутними скінченними елементами. Характеристичні функції ψ_{12}^k і ϕ_{12}^k в алгоритмі МДО задавали формулою (45). Початкові наближення для переміщень і температур виби-

рали відповідно у вигляді $u_{1n}^0(\mathbf{x}) \equiv 0$ [м], $u_{2n}^0(\mathbf{x}) \equiv \Delta$, $T_\alpha^0(\mathbf{x}) \equiv 10^{-4}$ [°C], $\alpha = 1,2$, $\mathbf{x} \in S_{12}$. Ітераційні параметри γ^k і ω^k, $k \in \mathbb{N}_0$, задавали однаковими на різних ітераціях: $\gamma^k = \gamma > 0$, $\omega^k = \omega > 0$, $k = 0,1,\ldots$. Для завершення ітераційного процесу використовували критерій

$$\left\| u_{\alpha n}^{k+1} - u_{\alpha n}^k \right\|_2 \Big/ \left\| u_{\alpha n}^{k+1} \right\|_2 \le \varepsilon_u, \qquad \alpha = 1,2,$$

де $\|u_{\alpha n}\|_2 = \sqrt{\sum_j [u_{\alpha n}(\mathbf{x}^j)]^2}$ – дискретна норма, $\mathbf{x}^j \in S_{12}$ – вузли скінченно-елементного розбиття межі S_{12}, а $\varepsilon_u > 0$ – відносна точність для переміщень. Обчислення провели за ітераційних параметрів $\gamma = \omega = 0.5$, відносної точності $\varepsilon_u = 10^{-3}$ для різних значень температури T_1^p на нижній грані тіла Ω_1 та різних значень параметрів B і a нелінійного вінклерівського шару. Ці фізичні величини задавали з інтервалів $T_1^p \in [0°\text{C}, 100°\text{C}]$, $B \in \in \left[10^{-13}\text{ м/(Па)}^a,\ 5 \cdot 10^{-9}\text{ м/(Па)}^a\right]$, $a \in (0,1]$. Зазначимо, що при такому виборі параметра a вінклерівський шар моделює мікронерівності на частині S_{12} верхньої межі тіла Ω_1 [38].

Проведено дослідження залежності швидкості збіжності МДО (50)–(53) від параметрів B і a вінклерівського шару та заданої температури T_1^p, яка діє на нижню грань тіла Ω_1. У табл. 1 наведено загальну кількість ітерацій m алгоритму декомпозиції області (50)–(53), яку необхідно виконати для досягнення точності $\varepsilon_u = 10^{-3}$, за різних значень коефіцієнта B і температури T_1^p для фіксованого значення параметра a, $a = 0.9$, а у табл. 2 – для різних значень параметра a і температури T_1^p при фіксованому значенні коефіцієнта B: $B = 10^{-9}$ [м/(Па)^a].

Таблиця 1. Загальна кількість ітерацій m, необхідних для досягнення точності $\varepsilon_u = 10^{-3}$ при $a = 0.9$ і різних значеннях B, [м/(Па)^a], і T_1^p, [°C].

B	$T_1^p = 0$	$T_1^p = 10$	$T_1^p = 25$	$T_1^p = 50$	$T_1^p = 75$	$T_1^p = 100$
$5 \cdot 10^{-9}$	10	236	237	239	243	246
10^{-9}	10	243	231	229	229	231
$5 \cdot 10^{-10}$	10	248	221	212	209	209
10^{-10}	9	45	151	153	143	136
$5 \cdot 10^{-11}$	8	26	65	114	115	111
10^{-11}	5	22	35	52	63	69
$5 \cdot 10^{-12}$	6	25	41	57	67	73
10^{-12}	7	20	62	110	136	149

Таблиця 2. Загальна кількість ітерацій m, необхідних для досягнення точності $\varepsilon_u = 10^{-3}$ при $B = 10^{-9}$ [м/(Па)^a] і різних значеннях a і T_1^p, [°C].

a	$T_1^p = 0$	$T_1^p = 10$	$T_1^p = 25$	$T_1^p = 50$	$T_1^p = 75$	$T_1^p = 100$
1	10	237	237	240	243	246
0.9	10	243	231	229	229	231
0.8	9	152	194	175	166	160
0.7	6	22	40	73	89	91
0.6	6	27	53	78	94	102
0.5	10	16	36	100	161	198

З даних, наведених у табл. 1, бачимо, що спершу при зменшенні коефіцієнта B від $5\cdot10^{-9}$ [м/(Па)^a] до 10^{-11} [м/(Па)^a] загальна кількість ітерацій m починає зменшуватися для більшості значень температури T_1^p. Однак подальше зменшення коефіцієнта B від 10^{-11} [м/(Па)^a] приводить до поступового зростання загальної кількості ітерацій m для більшості значень T_1^p. При збільшенні температури T_1^p від 0°C до 100°C відбувається збільшення кількості ітерацій m для значень коефіцієнта B з відрізка [10^{-12} м/(Па)^a, 10^{-11} м/(Па)^a]. Однак для значень $B > 10^{-11}$ [м/(Па)^a] ця тенденція вже не справджується.

Дані в табл. 2 свідчать, що зменшення параметра a від 1 до 0.7 приводить до зменшення кількості ітерацій m для всіх значень температури T_1^p, а при подальшому зменшенні цього параметра ($a < 0.7$) відбувається поступове її збільшення для більшості значень T_1^p. При $a \in [0.5, 0.7]$ збільшення температури T_1^p від 0°C до 100°C зумовлює зростання загальної кількості ітерацій для досягнення точності $\varepsilon_u = 10^{-3}$.

Крім цього, досліджено вплив параметрів B і a вінклерівського шару та заданої температури T_1^p на нормальне контактне напруження $\sigma_n(\mathbf{x}) = \sigma_{1n}(\mathbf{x}) = \sigma_{2n}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in S_{12}$, а також на температури $T_1(\mathbf{x})$ і $T_2(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in S_{12}$, нижнього і верхнього тіл вздовж ділянки контакту.

На рис. 3 і рис. 4 зображено графіки контактного напруження σ_n, отриманого за алгоритмом (50)–(53) декомпозиції області для параметрів $a = 1$ і $a = 0.8$, відповідно, для різних значень коефіцієнта B і температури T_1^p, а на рис. 5 і рис. 6 – для коефіцієнтів $B = 5\cdot10^{-9}$ [м/(Па)^a] і $B = 10^{-10}$ [м/(Па)^a], відповідно, для різних значень параметра a та температури T_1^p. Групи кривих ***I–VI*** на рис. 3 відповідають розподілам цього напруження для значень $B = 10^{-10}$, $5\cdot10^{-11}$, 10^{-11}, $5\cdot10^{-12}$, $5\cdot10^{-13}$, 10^{-13} [м/(Па)^a], а групи кривих ***I–V*** на рис. 4 – для $B = 5\cdot10^{-9}$, 10^{-9}, $5\cdot10^{-10}$, 10^{-10} і $5\cdot10^{-12}$ [м/(Па)^a]. Групи кривих ***I–IV*** на рис. 5 відповідають розподілам σ_n за $a = 0.8$, 0.7, 0.6, 0.5, а на рис. 6 – за $a = 1$, 0.9, 0.8, 0.6. Криві ***1–3*** на рис. 3–6 відповідають числовим результатам для значень $T_1^p = 0$, 50 і 100[°C], відповідно.

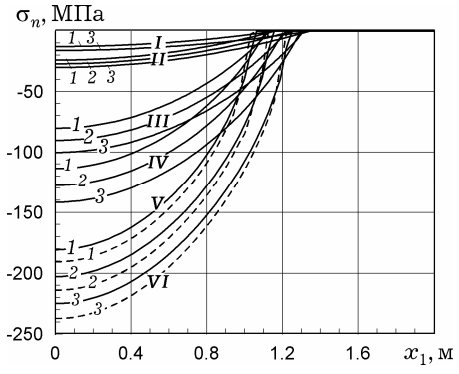

Рис. 3

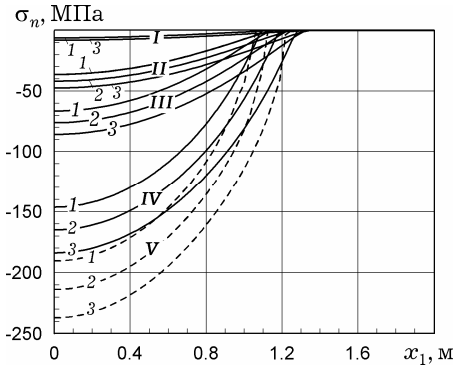

Рис. 4

Наведені результати показують, що при зменшенні параметрів B і a нелінійного вінклерівського шару відбувається зменшення нормального кон-

тактного напруження σ_n і зменшення ділянки фактичного контакту, а збільшення температури T_1^p на нижній межі тіла Ω_1 також зумовлює зменшення цього напруження, однак ділянка фактичного контакту при цьому збільшується.

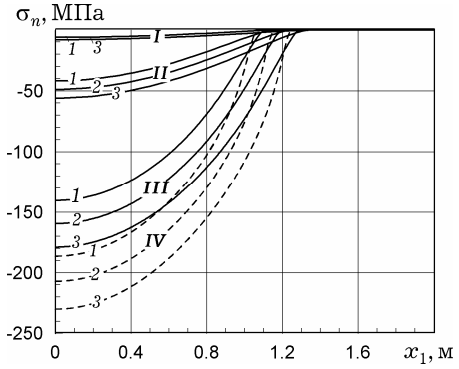

Рис. 5

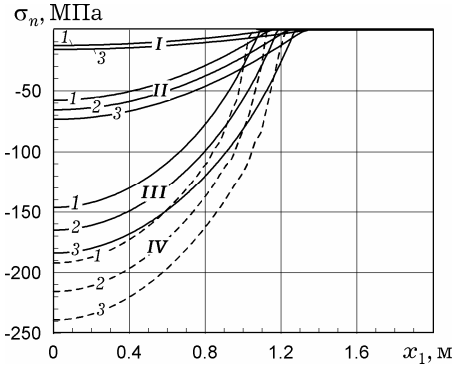

Рис. 6

На рис. 7 і рис. 8 зображено відповідно графіки температури $T_1(\mathbf{x})$ нижнього тіла і температури $T_2(\mathbf{x})$ верхнього тіла на межі S_{12}, отриманих за алгоритмом (50)–(53) декомпозиції області для параметра $a = 0.9$ за різних значень коефіцієнта B і температури T_1^p на нижній грані нижнього тіла, а на рис. 9 і рис. 10 – графіки цих температур для коефіцієнта $B = 5 \cdot 10^{-10}$ [м/(Па)^a] для різних значень параметра a і температури T_1^p.

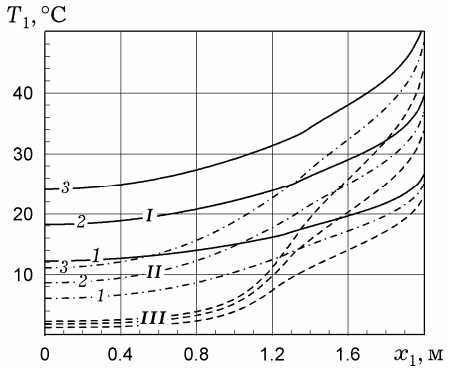

Рис. 7

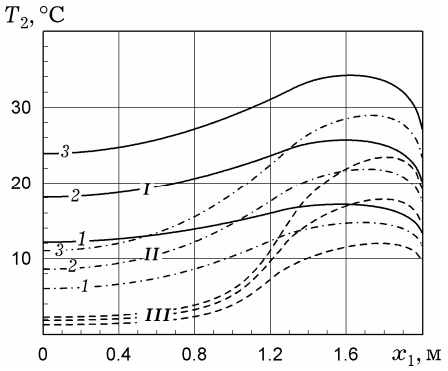

Рис. 8

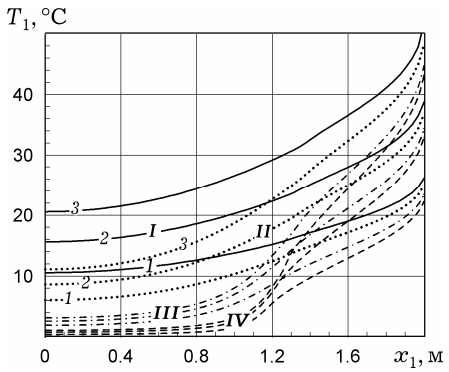

Рис. 9

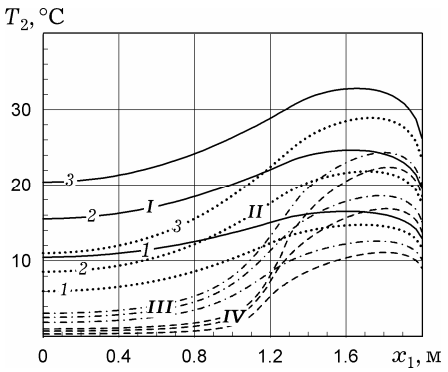

Рис. 10

На рис. 11 і рис. 12 наведено порівняння розподілів температур $T_1(\mathbf{x})$ і $T_2(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in S_{12}$, уздовж ділянки можливого контакту для параметрів $a = 1$ і $a = 0.8$, відповідно, при різних значеннях B і T_1^p, а на рис. 13 і рис. 14 – для коефіцієнтів $B = 10^{-9}$ [м/(Па)^a] і $B = 10^{-10}$ [м/(Па)^a], відповідно, за різних значень a і T_1^p. Групи кривих ***I–III*** на рис. 7 і рис. 8 відповідають розподілам температур $T_1(\mathbf{x})$ і $T_2(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in S_{12}$, за $B = 5 \cdot 10^{-9}$, $5 \cdot 10^{-10}$, $5 \cdot 10^{-11}$ [м/(Па)^a], а групи кривих ***I–IV*** на рис. 9 і рис. 10 – для $a = 1$, 0.9, 0.8, 0.7. Групи кривих ***I–II*** на рис. 11 відповідають розподілам цих температур при $B = 5 \cdot 10^{-9}$, 10^{-12} [м/(Па)^a], на рис. 12 – за $B = 5 \cdot 10^{-9}$, 10^{-10} [м/(Па)^a], на рис. 13 – для $a = 1$, 0.7, а на рис. 14 – для $a = 1$, 0.8. Криві ***1–3*** на рис. 7 – рис. 14 відповідають числовим результатам при $T_1^p = 50$, 75 і 100 [°C]. Суцільними кривими на рис. 11 – рис. 14 позначено розподіли температури $T_1(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in S_{12}$, а штриховими – розподіли температури $T_2(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in S_{12}$.

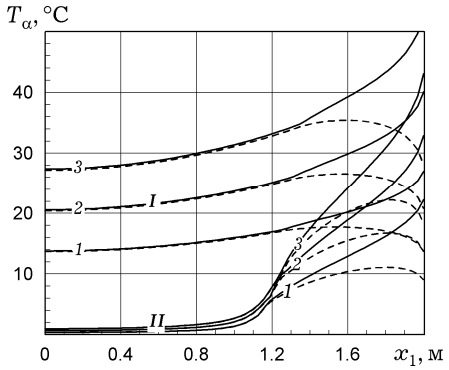

Рис. 11

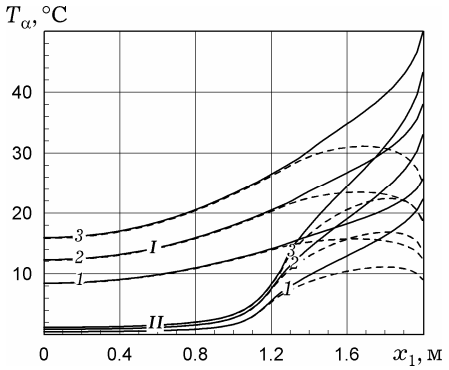

Рис. 12

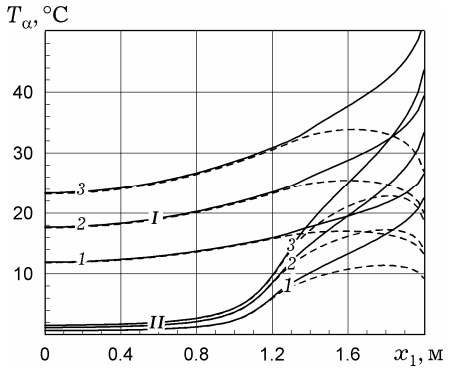

Рис. 13

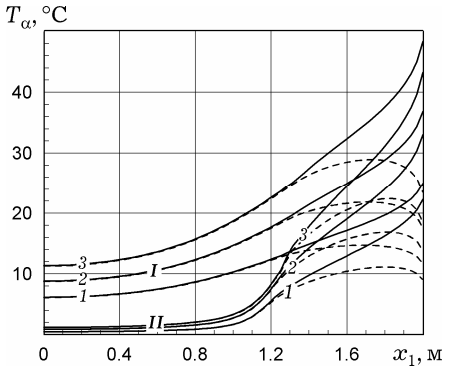

Рис. 14

Звідси бачимо, що зменшення параметрів a і B, тобто підвищення жорсткості нелінійного вінклерівського шару, приводить до зменшення контактних температур $T_1(\mathbf{x})$ і $T_2(\mathbf{x})$, особливо на ділянці фактичного контакту. Крім цього, чим вища жорсткість вінклерівського прошарку (чим менші параметри a і B), тим менше впливає збільшення температури T_1^p на нижній грані тіла Ω_1 на зростання контактних температур на межі фактичного контакту, а розподіли цих температур вздовж усієї ділянки можливого контакту S_{12} стають менше рівномірними.

Висновки. Розглянуто задачу про термомеханічну контактну взаємодію декількох пружних тіл за наявності нелінійних поверхневих шарів вінклерівського типу. Здійснено слабкі формулювання цієї задачі у вигляді системи варіаційної нерівності і варіаційного рівняння, а також у вигляді системи нелінійного і лінійного варіаційних рівнянь. Для розв'язування цієї системи запропоновано ітераційні методи декомпозиції області типу Робіна, на кожній ітерації яких необхідно паралельно розв'язувати два незв'язані лінійні варіаційні рівняння для кожного з тіл, одне з рівнянь відповідає задачі теорії пружності з силовими умовами Робіна на ділянках можливого контакту та додатковими об'ємними силами у тілах, а інше – задачі теплопровідності з тепловими умовами Робіна (Ньютона) на цих ділянках.

Виконано програмну реалізацію одержаних методів для плоских термопружних задач про контакт двох і трьох тіл із застосуванням МСЕ з лінійними і квадратичними трикутними елементами. Проведено числовий аналіз плоскої задачі про термомеханічний контакт через поверхневий нелінійний вінклерівський прошарок двох ізотропних пружних тіл скінченних розмірів. Досліджено вплив параметрів вінлерівського шару та заданої на частині межі температури на розподіли нормального контактного напруження і контактних температур, а також на швидкість збіжності методів декомпозиції області.

1. *Александров В. М., Кудиш И. И.* Асимптотический анализ плоской и осесимметричной контактных задач при учёте поверхностной структуры взаимодействующих тел // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1979. – № 1. – С. 58–70.
2. *Александров В. М., Мхитарян С. М.* Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и с прослойками. – Москва: Наука, 1983. – 488 с.
3. *Александров В. М., Пожарский Д. А.* Трехмерные контактные задачи для упругого клина с покрытием // Прикл. математика и механика. – 2008. – **72**, № 1. – С. 103–109.
   Те саме: *Aleksandrov V. M., Pozharskii D. A.* Three-dimensional contact problems for an elastic wedge with a coating // J. Appl. Math. Mech. – 2008. – **72**, No. 1. – P. 62–65.
   – https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2008.03.015.
4. *Александров В. М., Пожарский Д. А.* Трехмерные контактные задачи при учете трения и нелинейной шероховатости // Прикл. математика и механика. – 2004. – **68**, № 3. – С. 516–527.
   Те саме: *Aleksandrov V. M., Pozharskii D. A.* Three-dimensional contact problems taking friction and non-linear roughness into account // J. Appl. Math. Mech. – 2004. – **68**, No. 3. – P. 463–472.
   – https://doi.org/10.1016/S0021-8928(04)00061-9.
5. *Бабин А. П., Зернин М. В.* Конечноэлементное моделирование контактного взаимодействия с использованием положений механики контактной псевдосреды // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2009. – № 4. – С. 84–107.
6. *Блох М. В., Оробинский А. В.* О модификации метода конечных элементов для решения двумерных упругих и пластических контактных задач // Проблемы прочности. – 1983. – № 5. – С. 21–27.
   Те саме: *Blokh M. V., Orobinskii A. V.* Modification of the finite-element method to solve two-dimensional elastic and plastic contact problems // Strength Mater. – 1983. – **15**, No. 3. – P. 613–620.
   – https://doi.org/10.1007/BF01523204.
7. *Бобилёв А. А.* (*мл.*) Задача о контактном взаимодействии весомого упругого тела с односторонним жестким нагретым основанием // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – 2010. – Вип. 14. – С. 64–71.
8. *Бобилёв А. А.* (*мл.*) Задача о сжатии упругой двухслойной полосы жесткими нагретыми выпуклыми штампами // Вісн. Дніпропетр. ун-ту. Сер. Механіка. – 2010. – Вип. 14, т. 2. – С. 15–22.
9. *Бобильов О. О.* (*мол.*), *Лобода В. В.* Осесиметрична контактна задача термопружності для тришарового пружного циліндра з жорстким нерівномірно нагрітим сердечником // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2013. – **56,** № 4. – С. 149–157.
   Те саме: *Bobylev O. O.* (*Jr.*), *Loboda V. V.* Axisymmetric contact problem of thermoelasticity for a three-layer elastic cylinder with rigid nonuniformly

heated core // J. Math. Sci. – 2015. – **208,** No. 4. – P. 448–459.
– DOI 10.1007/s10958-015-2459-5.
10. *Галин Л. А.* Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. – Москва: Наука, 1980. – 304 с.
11. *Горячева И. Г.* Механика фрикционного взаимодействия. – Москва: Наука, 2001. – 478 с.
12. *Григоренко А. Я., Дыяк И. И., Матысяк С. И., Прокопышин И. И.* Методы декомпозиции области для решения задач контакта без трения многослойных упругих тел // Прикл. механика. – 2010. – **46**, № 4. – С. 25–37.
Те саме: *Grigorenko A. Ya., Dyyak I. I., Matysyak S. I., Prokopyshyn I. I.* Domain decomposition methods applied to solve frictionless-contact problems for multilayer elastic bodies // Int. Appl. Mech. – 2010. – **46**, No. 4. – P. 388–399.
– https://doi.org/10.1007/s10778-010-0320-6.
13. *Дияк І. І., Прокопишин І. І.* Збіжність паралельної схеми Неймана методу декомпозиції області для задач контакту без тертя декількох пружних тіл // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2009. – **52,** № 3. – С. 78–89.
Те саме: *Dyyak I. I., Prokopyshyn I. I.* Convergence of the Neumann parallel scheme of the domain decomposition method for problems of frictionless contact between several elastic bodies // J. Math. Sci. – 2010. – **171**, No. 4. – P. 516–533. –https://doi.org/10.1007/s10958-010-0154-0.
14. *Зайцев В. И., Щавелин В. М.* Метод решения контактных задач с учетом реальных свойств шероховатых поверхностей взаимодействующих тел // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1989. – № 1. – С. 88–94.
15. *Кит Г. С., Хай М. В.* Метод потенциалов в трехмерных задачах термоупругости тел с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1989. – 288 с.
16. *Кравчук А. С.* Нелокальный контакт шероховатых тел по эллиптической области // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2005. – № 3. – С. 42–52.
Те саме: *Kravchuk A. S.* Nonlocal contact of rough bodies with an elliptic contact area // Mech. Solids. – 2005. – **40**, No. 3. – P. 32–40.
17. *Кравчук А. С.* Постановка задачи о контакте нескольких деформируемых тел как задачи нелинейного программирования // Прикл. математика и механика. – 1978. – **42**, № 3. – С. 467–473.
Те саме: *Kravchuk A. S.* Formulation of the problem of contact between several deformable bodies as a nonlinear programming problem // J. Appl. Math. Mech. – 1978. – **42**, No. 3. – P. 489–498.
– https://doi.org/10.1016/0021-8928(78)90117-X.
18. *Кузьменко В. И.* О вариационном подходе в теории контактных задач для нелинейно-упругих слоистых тел // Прикл. математика и механика. – 1979. – **43**, № 5. – С. 893–901.
Те саме: *Kuz'menko V. I.* On the variational method in the theory of contact problems for nonlinearly elastic laminated bodies // J. Appl. Math. Mech. – 1979. – **43**, No. 5. – P. 961–970. – https://doi.org/10.1016/0021-8928(79)90184-9.
19. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – Москва: Мир, 1972. – 588 с.
Те саме: *Lions J.-L.* Quelques méthodes de résolution des problıms aux limites non linéares. – Paris: Dunod Gauthier-Villars, 1969. – 554 p.
20. *Мартиняк Р. М., Прокопишин І. А., Прокопишин І. І.* Контакт пружних тіл за наявності нелінійних вінклерівських поверхневих шарів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2013. – **56,** № 3. – С. 43–56.
Те саме: *Martynyak R. M., Prokopyshyn I. A., Prokopyshyn I. I.* Contact of elastic bodies with nonlinear Winkler surface layers // J. Math. Sci. – 2015. – **205**, No. 4. – P. 535–553.
– DOI 10.1007/s10958-015-2265-0.
21. *Мартиняк Р. М., Чумак К. А.* Термопружний контакт півпросторів, що мають однакові термічні дистортивності, за наявності теплопроникного міжповерхневого просвіту // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – **51,** № 3. – С. 163–175.
Те саме: *Martynyak R. M., Chumak K. A.* Thermoelastic contact of half-spaces with equal thermal distortivities in the presence of a heat-permeable intersurface gap // J. Math. Sci. – 2010. – **165,** No. 3. – P. 355–370.
– https://doi.org/10.1007/s10958-010-9804-5.
22. *Мартиняк Р. М., Швець Р. М.* Математична модель механічного контакту тіл через тонкий неоднорідний прошарок // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1997. – 40, № 2. – С. 107–109.

Те саме: *Martinyak R. M., Shvets' R. M.* A mathematical model of mechanical contact of bodies across a thin inhomogeneous layer // J. Math. Sci. – 1998. – **90**, No. 2. – P. 2000–2002.
– https://doi.org/10.1007/BF02432319.
23. *Мартиняк Р. М., Швець Р. М.* Умови теплового контакту тіл через тонкі неоднорідні за товщиною прошарки // Доп. НАН України. – 1996. – № 9. – С. 74–76.
24. *Механика* контактных взаимодействий / Под ред. И. И. Воровича, В. М. Александрова. – Москва: Физматлит, 2001. – 672 с.
25. *Мхитарян С. М., Шекян А. Л., Шекян Л. А.* Вдавливание круглого штампа в упругое шероховатое полупространство // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2009. – № 5. – С. 90–98.
26. *Підстригач Я. С.* Умови стрибка напружень і переміщень на тонкостінному пружному включенні в суцільному середовищі // Доп. АН УРСР. – 1982. – № 12. – С. 29–31.
27. *Підстригач Я. С.* Умови теплового контакту твердих тіл // Доп. АН УРСР. – 1963. – № 7. – С. 872–874.
28. *Подгорный А. Н., Гонтаровский П. П., Киркач Б. Н., Матюхин Ю. И., Хавин Г. Л.* Задачи контактного взаимодействия элементов конструкций. – Киев: Наук. думка, 1989. – 232 с.
29. *Прокопишин И. А., Хлебников Д. Г.* Асимптотический анализ решения теории упругости для трансверсально-изотропного слоя и построение уточненных теорий пластин для контактных задач // Исследования по теории пластин и оболочек. – Казань, 1992. – Вып. 24. – С. 108–113.
30. *Прокопишин И. А., Хлебников Д. Г.* Эквивалентные вариационные постановки односторонних контактных задач для упругих тел при наличии нелинейного поверхностного слоя // Эффективные численные методы решения краевых задач механики твердого деформируемого тела: Тез. докл. респ. н.-т. конф. – Харьков, ХИСИ, 1989. – С. 83–85.
31. *Прокопишин І. І.* Схеми декомпозиції області на основі методу штрафу для задач контакту пружних тіл: Дис. ... канд. фіз.-мат. наук: 01.05.02. – «Мат. моделювання та обчисл. методи». – Львів, 2010. – 163 с.
32. *Прокопишин І. І.* Схеми декомпозиції області на основі методу штрафу для задач про ідеальний контакт пружних тіл // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2014. – **57**, № 1. – С. 41–56.
Те саме: *Prokopyshyn I. I.* Domain decomposition schemes based on the penalty method for the problems of perfect contact of elastic bodies// J. Math. Sci. – 2016. – **212**, No. 1. – P. 46–66.
– DOI 10.1007/s10958-015-2648-2.
33. *Прокопишин І. І., Дияк І. І., Мартиняк Р. М.* Числове дослідження задач про контакт трьох пружних тіл методами декомпозиції області // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2013. – **49**, № 1. – С. 46–55.
Те саме: *Prokopyshyn I. I., Dyyak I. I., Martynyak R. M.* Numerical analysis of the problems of contact of three elastic bodies by the domain decomposition methods // Mater. Sci. – 2013. – **49**, No. 1. – P. 45–58.
– https://doi.org/10.1007/s11003-013-9581-7.
34. *Прокопишин І.* Алгоритми декомпозиції області для задач про термомеханічний контакт багатьох пружних тіл // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2017. – Вип. 26. – С. 63–82.
35. *Прокопишин І.* Методи декомпозиції області для задачі про статичну рівновагу системи пружних тіл, з'єднаних через тонкі нелінійні прошарки // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2015. – Вип. 21. – С. 173–185.
36. *Прокопишин І.* Методи декомпозиції області для задач про односторонній контакт нелінійно пружних тіл // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2012. – Вип. 15. – С. 75–87.
37. *Прокопишин І.* Паралельні схеми методу декомпозиції області для контактних задач теорії пружності без тертя // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. Прикл. математика та інформатика. – 2008. – Вип. 14. – С. 123–133.
38. *Рыжов Э. В., Суслов А. Г., Федоров В. П.* Технологическое обеспечение эксплуатационных свойств деталей машин. – Москва: Машиностроение, 1979. – 176 с.
39. *Скородинський І. С.* Ітераційні алгоритми для розв'язування квазістатичної однобічної термофрикційної задачі // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2000. – **36**, № 6. – С. 65–71.

Те саме: *Skorodyns'kyi I. S.* Iterative algorithms for the solution of quasistatic unilateral problems of thermal friction // Mater. Sci. – 2000. – **36**, No. 6. – P. 870–877. – https://doi.org/10.1023/A:1011378503408.

40. *Скородинський І. С., Лазько В. А.* Квазістатична термофрикційна задача при наявності узагальненого лінійно-дисипативного механізму міжфазного проковзування // Вісн. держ. ун-ту «Львів. політехніка». Сер. Прикл. математика. – 1996. – № 299. – С. 144–154.
41. *Avery P., Farhat C.* The FETI family of domain decomposition methods for inequality-constrained quadratic programming: Application to contact problems with conforming and nonconforming interfaces // Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. – 2009. – **198**, Nos. 21-26. – P. 1673–1683. – https://doi.org/10.1016/j.cma.2008.12.014.
42. *Bresch D., Koko J.* An optimization-based domain decomposition method for nonlinear wall laws in coupled systems // Math. Models Methods Appl. Sci. – 2004. – **14**, No. 7. – P. 1085–1101.
43. *Chumak K. A., Martynyak R. M.* Thermal rectification between two thermoelastic solids with a periodic array of rough zones at the interface // Int. J. Heat Mass Transfer. – 2012. – **55**, No. 21-22. – P. 5603–5608. – https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2012.05.049.
44. *Dostál Z., Kozubek T., Vondrák V., Brzobohatý T., Markopoulos A.* Scalable TFETI algorithm for the solution of multibody contact problems of elasticity // Int. J. Numer. Methods Eng. – 2010. – **41**. – P. 675–696. – https://doi.org/10.1002/nme.2807.
45. *Dyyak I. I., Prokopyshyn I. I., Prokopyshyn I. A.* Convergence of penalty Robin–Robin domain decomposition methods for unilateral multibody contact problems of elasticity // http://arxiv.org/pdf/1208.6478.pdf. – 2015. – 33 p.
46. *Haslinger J., Kučera R., Sassi T.* A domain decomposition algorithm for contact problems: Analysis and implementation // Math. Model. Nat. Phenom. – 2009. – **4,** No 1. – P. 123–146.
47. *Johansson L., Klarbring A.* Thermoelastic frictional contact problems: Modelling, finite element approximation and numerical realization // Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. – 1993. – **105,** No 2. – P. 181–210. – https://doi.org/10.1016/0045-7825(93)90122-E.
48. *Koko J.* Convergence analysis of optimization-based domain decomposition methods for a bonded structure // Appl. Numer. Math. – 2008. – **58,** No. 1. –P. 69–87.
49. *Koko J.* Uzawa block relaxation domain decomposition method for a two-body frictionless contact problem // Appl. Math. Lett. – 2009. – **22.** – P. 1534–1538.
50. *Martynyak R., Chumak K.* Effect of heat-conductive filler of interface gap on thermoelastic contact of solids // Int. J. Heat Mass Transfer. – 2012. – **55,** No. 4. – P. 1170–1178.
51. *Oancea V. G., Laursen T. A.* A finite element formulation of thermomechanical rate-dependent frictional sliding // Int. J. Numer. Methods Eng. – 1997. – **40.** – P. 4275–4311.
52. *Prokopyshyn I. I., Dyyak I. I., Martynyak R. M., Prokopyshyn I. A.* Domain decomposition methods for problems of unilateral contact between elastic bodies with nonlinear Winkler covers // Lect. Notes Comput. Sci. Eng. – 2014. – **98**. – P. 739–748.
53. *Prokopyshyn I. I., Dyyak I. I., Martynyak R. M., Prokopyshyn I. A.* Penalty Robin–Robin domain decomposition schemes for contact problems of nonlinear elasticity // Lect. Notes Comput. Sci. Eng. – 2013. – **91**. – P. 647–654.
54. *Suquet P. M.* Discontinuities and plasticity // In: Nonsmooth mechanics and applications / Ed. by J. J. Moreau, P. D. Panagiotopoulos. – Springer: Wien–New York, 1988. – P. 279–340. – CISM Courses and Lectures. – No. 302.
55. *Xing H. L., Makinouchi A.* Three dimensional finite element modeling of thermomechanical frictional contact between finite deformation bodies using R-minimum strategy // Comput. Methods Appl. Mech. Eng. – 2002. – **191,** Nos. 37-38. – P. 4193–4214. – https://doi.org/10.1016/S0045-7825(02)00372-9.
56. *Zavarise G., Wriggers P., Schrefler B. A.* On augmented Lagrangian algorithms for thermomechanical contact problems with friction // Int. J. Numer. Methods Eng. – 1995. – **38.** – P. 2929–2949.

ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКИЙ КОНТАКТ УПРУГИХ ТЕЛ ПРИ НАЛИЧИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ВИНКЛЕРОВСКИХ ПОВЕРХНОСТНЫХ СЛОЕВ

Рассмотрена термоупругая контактная задача для нескольких тел при условиях одностороннего механического контакта через нелинейные винклеровские поверхностные слои и неидеального теплового контакта. Получена слабая формулировка этой задачи в виде системы вариационного уравнения и вариационного неравенства, а также альтернативная слабая формулировка в виде системы линейного и нелинейного вариационных уравнений. Для решения системы вариационных уравнений термомеханической контактной задачи разработанны параллельными итерационные алгоритмы декомпозиции области типа Робина, на каждом шаге которых необходимо решать два линейние вариационные уравнения для каждого из тел, одно из которых соответствует задачи теплопроводности с условиями Ньютона на границах возможного контакта, а другое – задачи теории упругости с условиями Робина на этих границах и дополнительными объемными силами. Проведен анализ численной эффективности предложенных алгоритмов для плоской термомеханической задачи о контакте двух упругих тел с использованием конечно-элементных аппроксимаций.

Ключевые слова: *термоупругие контактные задачи, нелинейные винклеровские слои, вариационные неравенства, вариационные уравнения, методы декомпозиции области, метод конечных элементов.*

THERMOMECHANICAL CONTACT BETWEEN ELASTIC BODIES WITH NONLINEAR WINKLER SURFACE LAYERS

A thermoelastic contact problem for several bodies under conditions of unilateral mechanical contact through nonlinear Winkler surface layers and imperfect thermal contact is considered. The weak formulation of this problem in the form of a system of variational inequality and variational equation, as well as an alternative weak formulation in the form of linear and nonlinear variational equations are obtained. To solve the system of variational equations of the thermomechanical contact problem, parallel iterative Robin type domain decomposition algorithms are developed. In each iterative step of these algorithms one have to solve two linear variational equations for each of the bodies, which correspond to heat conduction problem with Newton boundary conditions on the possible contact boundaries and linear elasticity problem with additional volume forces and Robin boundary conditions respectively. The analysis of numerical efficiency of proposed algorithms is performed for a plane thermomechanical two-body contact problem using the finite element approximations.

Key words*: thermoelastic contact problems, nonlinear Winkler layers, variational inequalities, variational equations, domain decomposition methods, finite element method.*

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
21.10.19