расположенной на цилиндре S_{k+1}. Рассматривая на цилиндре S_{k+1} множество кривых $y = f(x)$, в каждой точке кривой можно определить вектор k-й нормали. Совокупность этих векторов определяет некоторое пространство — пространство k-й нормали N_k.

ЛИТЕРАТУРА

1. Скоробогатько В. Я. — УМЖ, 1963, 15, 2.
2. Скоробогатько В. Я., Бобык Е. И.— УМЖ, 1964, 16, 6.
3. Фешин Г. М.— Збірник наукових робіт аспірантів Львівського політехн. ін-ту. Львів, 1972, 6.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию в сентябре 1973 г.

О РАЗДЕЛЕНИИ ПЕРЕМЕННЫХ В ТЕНЗОРНОМ ПРОИЗВЕДЕНИИ ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

П. И. Каленюк

Общим схемам разделения переменных посвящены работы [3—8]. В данной работе приводится одна схема метода разделения переменных в тензорном произведении гильбертовых пространств.

1. Для удобства изложения напомним кратко необходимые нам утверждения. Пусть H^1 и H^2 — два сепарабельных гильбертовых пространства, элементы которых будем обозначать через $f^1, g^1, \ldots$ и $f^2, g^2, \ldots$ соответственно, а скалярные произведения — через $(,)_i$ $(i = 1, 2)$. В линейном пространстве H формальных линейных комбинаций $\sum\limits_j f_j^1 \otimes f_j^2$, где формальное произведение $f^1 \otimes f^2$ билинейно, т. е.

$$1)\ (f^1 + g^1) \otimes f^2 = f^1 \otimes f^2 + g^1 \otimes f^2;$$
$$2)\ f^1 \otimes (f^2 + g^2) = f^1 \otimes f^2 + f^1 \otimes g^2;$$
$$3)\ (\lambda f^1) \otimes f^2 = f^1 \otimes (\lambda f^2) = \lambda (f^1 \otimes f^2)$$

(λ — комплексный скаляр), скалярное произведение определим следующим образом: для произвольных элементов

$$f = \sum_{i=1}^{n} f_i^1 \otimes f_i^2,\ g = \sum_{j=1}^{m} g_j^1 \otimes g_j^2 \in H$$

положим

$$(f, g) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=m}^{m} (f_i^1, g_j^1)_1 \quad (f_i^2, g_j^2)_2$$

(отметим, что это не единственный из возможных способов введения скалярного произведения в пространстве H). Гильбертово пространство $H^1 \otimes \otimes H^2$, которое является пополнением пространства H в скалярном произведении (,), называется тензорным произведением гильбертовых пространств H^1 и H^2 [2, 10]. Элементы пространства $H^1 \otimes H^2$ будем обозначать через $f, g, \ldots$.

Для элемента $f = \sum\limits_{i=1}^{n} f_i^1 \otimes f_i^2 \in H^1 \otimes H^2$ и элемента $f^1 \in H^1$ положим по определению

$$\langle f^1, f\rangle = \sum_{i=1}^{m} (f^1, f_i^1)_1 f_i^2 \in H^2.$$

Для произвольного $f \in H^1 \otimes H^2$ $\langle f^1, f\rangle \in H^2$ определяется как соответствующий предел. Известно [9], что если множество векторов $f_1^1, f_2^1, \ldots, f_n^1, \ldots$

образует полную ортонормированную систему в пространстве H^1, то любой элемент $g \in H^1 \otimes H^2$ единственным образом представляется в виде

$$g = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^1 \otimes g_n,$$

где $g_n = \langle f_n^1, g \rangle$, и имеет место равенство Парсеваля — Стеклова

$$(g, g) = \sum_{n=1}^{\infty} (g_n, g_n)_2.$$

Пусть теперь операторы L^1 и L^2 определены соответственно в пространствах H^1 и H^2 и имеют области определения $D(L^1)$ и $D(L^2)$. Тензорное произведение $L^1 \otimes L^2$ этих операторов определяется следующим образом: если $f_1^1, \ldots, f_m^1 \in D(L^1)$, $f_1^2, \ldots, f_m^2 \in D(L^2)$, то

$$(L^1 \otimes L^2) \sum_{i=1}^{m} f_i^1 \otimes f_i^2 = \sum_{i=1}^{m} L^1 f_i^1 \otimes L^2 f_i^2.$$

Наконец, будем говорить, что операторы $A_1, \ldots, A_k$, определенные в некотором гильбертовом пространстве H, имеют общее спектральное представление (ограничимся здесь случаем дискретного спектра), если существует полная ортонормированная система $\{u_n\} \in H$ и множество действительных чисел α_{in} $(1 \leqslant i \leqslant k,\ n = 1, 2, \ldots)$ таких, что $A_i u_n = \alpha_{in} u_n$.

Для линейных самосопряженных попарно перестановочных операторов, определенных в сепарабельном гильбертовом пространстве, существование общего спектрального представления следует из теоремы Неймана [1].

Кроме этого в дальнейшем нам необходимы также следующие построения. Пусть $i^r = (i_1, \ldots, i_r)$ и $j^r = (j_1, \ldots, j_{n-r})$ $(r = 1, \ldots, n)$ — целочисленные векторы, координаты которых удовлетворяют условиям $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leqslant n$, $1 \leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j_{n-r} \leqslant n$, причем $i_1, \ldots, i_r, j_1, \ldots, j_{n-r}$ образуют перестановку чисел $1, 2, \ldots, n$. Для $r = 0$ пусть $i^0 = \varnothing$, т. е. i^0 — пустое множество, а $j^0 = (1, 2, \ldots, n)$. Если $\alpha_{ij}^{i^r}$ $(i = j_1, \ldots, j_{n-r};\ j = i_1, \ldots, i_r)$ — некоторая совокупность действительных чисел, то через $A[i^r]$ $(r = 0, 1, \ldots, n)$ обозначим квадратную матрицу $\|a_{ij}\|_{i,j=1}^{n}$, элементы которой определяются так:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j = i_s \text{ при некотором } 1 \leqslant s \leqslant r; \\ \alpha_{ij}^{i^r}, & \text{если } i = j_t,\ j = i_s \text{ при некоторых } 1 \leqslant t \leqslant n-r,\ 1 \leqslant s \leqslant r; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{1}$$

Если $r = 0$, то $A[i^0] = 0$.

Матрица $A[i^r]$ $(r = 0, 1, \ldots, n)$ имеет следующее свойство: для произвольного натурального числа k $A^k[i^r] = A[i^r]$.

2. В тензорном произведении $H^1 \otimes H^2$ сепарабельных гильбертовых пространств H^1 и H^2 рассмотрим однородное уравнение

$$Lu = 0 \tag{2}$$

и соответствующее ему неоднородное уравнение

$$Lu + R = 0, \tag{3}$$

в которых оператор $L = (L_{sk})$ $(s = 1, \ldots, m;\ k = 1, \ldots, n)$, определенный на некотором множестве $D(L)$, принадлежащем прямому произведению n копий пространства $H^1 \otimes H^2$, так, что для любого элемента $u = (u_1, \ldots, u_n) \in D(L)$

$$Lu = \left(\sum_{k=1}^{n} L_{1k} u_k, \ \ldots, \ \sum_{k=1}^{n} L_{mk} u_k \right),$$

а элемент R имеет вид

$$R = \left(\sum_{i=1}^{\nu_1} f_i^{11} \otimes f_i^{21}, \ \ldots, \ \sum_{i=1}^{\nu_m} f_i^{1m} \otimes f_i^{2m} \right). \tag{4}$$

Определение 1. Оператор L будем называть разделяющимся, если для любых $s = 1, \ldots, m$ и $k = 1, \ldots, n$ L_{sk} представим в виде

$$L_{sk} = L^1_{sk,1} \otimes L^2_{sk,1} + \cdots + L^1_{sk,n_{sk}} \otimes L^2_{sk,n_{sk}},$$

причем $D(L^i_{sk,1}) = \cdots = D(L^i_{sk,n_{sk}}) = D^i_k \subset H^i$ $(i = 1, 2)$, для произвольного элемента $u \in D(L)$ вида

$$u = \left(\sum_{i=1}^{l} g^1_{1i} \otimes g^2_{1i}, \ \ldots, \ \sum_{i=1}^{l} g^1_{ni} \otimes g^2_{ni}\right) \tag{5}$$

$g^i_{k1}, \ldots, g^i_{kl} \in D^i_k$, а

$$Lu = \left(\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n_{1k}} \sum_{i=1}^{l} L^1_{1k,j} g^1_{ki} \otimes L^2_{1k,j} g^2_{ki}, \ \ldots, \ \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n_{mk}} \sum_{i=1}^{l} L^1_{mk,j}\, g^1_{ki} \otimes L^2_{mk,j} g^2_{ki}\right). \tag{6}$$

Упорядочим при каждом $s = 1, \ldots, m$ каким-нибудь образом сборный индекс (k, j, i) и обозначим через $(k_s(\tau), j_s(\tau), i_s(\tau))$ $\left(\tau = 1, \ldots, n_s,\right.$ где $\left. n_s = l \sum\limits_{k=1}^{n} n_{sk}\right)$ индекс, отвечающий номеру τ.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Множество всех решений вида* (5) *уравнения* (2) ((3)) *с разделяющимся оператором* L (*и свободным членом вида* (4)) *совпадает с множеством решений совокупности систем*

$$(E - A) f_1 = 0, \ A' f_{2s} = 0 \quad (s = 1, \ldots, m; \ A \in A_{n_1 + \cdots + n_m}), \tag{7}$$

$$(E - A) F_1 = 0, \ A' F_{2s} = 0 \ (s = 1, \ldots, m; \ A \in A_{n_1 + \cdots + n_m + \gamma_1 + \cdots + \gamma_m}), \tag{8}$$

где

$$f_1 = (L^1_{1k_1(1), j_1(1)}\, g^1_{k_1(1) i_1(1)}, \ \ldots, \ L^1_{1k_1(n_1), j_1(n_1)} g^1_{k_1(n_1) i_1(n_1)}, \ \ldots$$
$$\ldots, \ L^1_{mk_m(1), j_m(1)} g^1_{k_m(1) i_m(1)}, \ \ldots, \ L^1_{mk_m(n_m), j_m(n_m)} g^1_{k_m(n_m) i_m(n_m)}),$$

$$f_{2s} = (\underbrace{0, \ \ldots, \ 0,}_{n_1 + \cdots + n_{s-1}} \ L^2_{sk_s(1), j_s(1)} g^2_{k_s(1) i_s(1)}, \ \ldots, \ L^2_{sk_s(n_s), j_s(n_s)} g^2_{k_s(n_s) i_s(n_s)}, \ 0, \ \ldots, \ 0)$$

$$(F_1 = (L^1_{1k_1(1), j_1(1)} g^1_{k_1(1), i_1(1)}, \ \ldots, \ L^1_{1k_1(n_1), j_1(n_1)} g^1_{k_1(n_1) i_1(n_1)}, \ f^1_{11}, \ \ldots, \ f^1_{1\gamma_1}, \ \ldots$$
$$\ldots, \ L^1_{mk_m(1), j_m(1)} g^1_{k_m(1) i_m(1)}, \ \ldots, \ L^1_{mk_m(n_m), j_m(n_m)} g^1_{k_m(n_m), i_m(n_m)}, \ f^1_{m1}, \ \ldots, \ f^1_{m\gamma_m}),$$

$$F_{2s} = \underbrace{(0, \ \ldots, \ 0,}_{n_1 + \cdots + n_{s-1} + \gamma_1 + \cdots + \gamma_{s-1}} \quad L^2_{sk_s(1), j_s(1)} g^2_{k_s(1), i_s(1)}, \ \ldots, \ L^2_{sk_s(n_s), j_s(n_s)} g^2_{k_s(n_s), i_s(n_s)}, \ f^2_{s1}, \ \ldots$$
$$\ldots, \ f^2_{s\gamma_s}, \ 0, \ \ldots, \ 0));$$

A_i — совокупность всех матриц вида (1) размерности i, в которых элементы α^{ir}_{ij} рассматриваются как параметры (число таких матриц, очевидно, равно 2^i);

E — единичная матрица размерности $n_1 + \cdots + n_m$

$$(n_1 + \cdots + n_m + \gamma_1 + \cdots + \gamma_m).$$

3. Пусть оператор L определен на некотором множестве $D(L) \subset H^1 \otimes H^2$ и разделяется, т. е. он представим в виде

$$L = L^1_1 \otimes L^2_1 + \cdots + L^1_k \otimes L^2_k,$$

где $D(L^i_1) = \cdots = D(L^i_k) = D_i \subset H^i$ $(i = 1, 2)$ и для любого элемента

$$g = \sum_{i=1}^{n} g^1_i \otimes g^2_i \in D(L) \quad g^i_1, \ \ldots, \ g^i_n \in D_i \qquad (i = 1, 2).$$

Обозначим через L^{i^r} оператор с областью значений в прямом произведении $k-r$ копий пространства H^1, определенный на множестве D_1: для любого элемента $f^1 \in D_1$

$$L^{i^r} f^1 = (L_1^{i^r} f^1, \ldots, L_{k-r}^{i^r} f^1), \tag{9}$$

где

$$L_t^{i^r} = L_{j_t}^1 - \sum_{s=1}^{r} \alpha_{ts}^{i^r} L_{i_s}^1, \qquad t = 1, \ldots, k-r$$

и i^r, j^r, $\alpha_{ts}^{i^r}$ определяются, как в п. 1).

Через L^{j^r} обозначим оператор с областью значений в прямом произведении r копий пространства H^2, определенный на множестве D_2: для любого элемента $f^2 \in D_2$

$$L^{j^r} f^2 = (L_1^{j^r} f^2, \ldots, L_r^{j^r} f^2), \tag{10}$$

где

$$L_s^{j^r} = L_{i_s}^2 + \sum_{t=1}^{k-r} \alpha_{ts}^{i^r} L_{j_t}^2, \qquad s = 1, \ldots, r.$$

Определение 2. Скажем, что операторы $L_1^1, \ldots, L_k^1$ имеют обобщенное общее спектральное представление, если для некоторых целых чисел $r_1, \ldots, r_p$ $(0 \leqslant r_1 < \cdots < r_p \leqslant k)$ существуют совокупности целочисленных векторов $i^{r_\sigma}(l) = (i_1^{r_\sigma}(l), \ldots, i_{r_\sigma}^{r_\sigma}(l))$ $(\sigma = 1, \ldots, p;\ l = 1, \ldots, n_\sigma)$ и совокупности действительных чисел $\alpha_{ts}^{i^{r_\sigma}(l)}$ $(t = 1, \ldots, k - r_\sigma;\ s = 1, \ldots, r_\sigma)$ таких, что множество решений системы уравнений

$$L^{i^{r_\sigma}(l)} f^1 = 0 \tag{11}$$

образуют полную ортонормированную систему $\{f_n^1\}$ в пространстве H^1.

Легко видеть, что в том случае, когда множество операторов $L_1^1, \ldots, L_k^1$ обладает общим спектральным представлением, оно имеет и обобщенное общее спектральное представление.

Далее, значения σ и l, для которых f_n^1 является решением уравнения (11), мы будем обозначать через $\sigma(n)$ и $l(n)$, а оператор $L^{j^{r_{\sigma(n)}}(l(n))}$ — через L_n.

Определение 3. Если система операторов $L_1^1, \ldots, L_k^1$ обладает обобщенным общим спектральным представлением таким, что множество

$$\{L^1_{i_s^{r_{\sigma(n)}}(l(n))} f_n^1\} \quad s = 1, \ldots, r_{\sigma(n)}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{12}$$

образует полную ортонормированную систему в пространстве H^1 и для любых $f \in R \subset H^1 \otimes H^2$

$$f_n = (f_{n1}, \ldots, f_{nr_{\sigma(n)}}) = (\langle L^1_{i_1^{r_{\sigma(n)}}(l(n))} f_n^1, f\rangle, \ldots, \langle L^1_{i_{r_{\sigma(n)}}^{r_{\sigma(n)}}(l(n))} f_n^1, f\rangle) \tag{13}$$

принадлежит области определения оператора L_n^{-1}, а последний существует, то мы будем говорить, что операторы $L_1^1, \ldots, L_k^1$ и $L_1^2, \ldots, L_k^2$ R-согласованы.

Замечание. Определение операторов L^{i^r} и L^{j^r}, определения обобщенного общего спектрального представления и согласованности совокупностей операторов обусловлены структурой систем (7) и (8).

Теорема 2. *Если линейный оператор L, определенный в гильбертовом пространстве $H^1 \otimes H^2$, замкнут и разделяющийся, причем операторы $L_1^1, \ldots, L_k^1$ и $L_1^2, \ldots, L_k^2$ R-согласованы, а операторы L_n^{-1} равномерно ограничены, то уравнение*

$$Lg = f$$

имеет решение для произвольного $f \in R$, которое представляется в виде

$$g = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^1 \otimes L_n^{-1} f_n,$$

где f_n определяется по формуле (13).

Доказательство. Рассмотрим сумму

$$g_{mp} = \sum_{n=m}^{p} f_n^1 \otimes L_n^{-1} f_n.$$

Так как f_n^1 ортонормированы, то

$$(g_{mp}, g_{mp}) = \sum_{n=m}^{p} (L_n^{-1} f_n, L_n^{-1} f_n)_2 \leqslant M^2 \sum_{n=m}^{p} \left(\sum_{i=1}^{r_{\sigma(n)}} (f_{ni}, f_{ni})_2 \right),$$

где M — равномерная граница для $\| L_n^{-1} \|$.

Из равенства Парсеваля — Стеклова следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{r_{\sigma(n)}} (f_{ni}, f_{ni})_2 \right) < \infty,$$

а значит, g_{mp} сходится к нулю. Отсюда вытекает, что

$$g_m = \sum_{n=1}^{m} f_n^1 \otimes L_n^{-1} f_n$$

сходится к некоторому пределу g.

Используя формулы (9), (10) и (13), получаем

$$\sum_{j=1}^{k} (L_j^1 \otimes L_j^2)\, g_m = \sum_{n=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{k} L_j^1 f_n^1 \otimes L_j^2 L_n^{-1} f_n \right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{m} \Bigg[\sum_{s=1}^{r_{\sigma(n)}} L^1_{i_s^{r_{\sigma(n)}}(l(n))} f_n^1 \otimes L^2_{i_s^{r_{\sigma(n)}}(l(n))} L_n^{-1} f_n +$$

$$+ \sum_{t=1}^{k - r_{\sigma(n)}} \left(\sum_{s=1}^{r_{\sigma(n)}} \alpha_{ts}^{i^{r_{\sigma(n)}}(l(n))} L^1_{i_s^{r_{\sigma(n)}}(l(n))} f_n^1 \right) \otimes L^2_{i_t^{r_{\sigma(n)}}(l(n))} L_n^{-1} f_n \Bigg] =$$

$$= \sum_{n=1}^{m} \left(\sum_{s=1}^{r_{\sigma(n)}} L^1_{i_s^{r_{\sigma(n)}}(l(n))} f_n^1 \otimes \Big(L^2_{i_s^{r_{\sigma(n)}}(l(n))} + \sum_{t=1}^{k - r_{\sigma(n)}} \alpha_{ts}^{i^{r_{\sigma(n)}}(l(n))} L^2_{i_t^{r_{\sigma(n)}}(l(n))} \Big) L_n^{-1} f_n \right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{m} \left(\sum_{s=1}^{r_{\sigma(n)}} L^1_{i_s^{r_{\sigma(n)}}(l(n))} f_n^1 \otimes f_{ns} \right).$$

Так как множество элементов (12) образует по условию теоремы ортонормированную и полную систему в H^1, то последняя сумма сходится к f при $m \to \infty$. Поскольку оператор L по предположению замкнут, $g_m \to g$, а $L g_m \to f$ при $m \to \infty$, то, следовательно, $Lg = f$ и теорема доказана.

Последняя теорема в некотором смысле является обоснованием приведенного метода разделения переменных в тензорном произведении гильбертовых пространств. Теорема 2, в силу замечания к определению 2, является обобщением соответствующих результатов работ [5, 6].

ЛИТЕРАТУРА

1. Ахиезер Н. И., Глазман И. М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. «Наука», М., 1966.
2. Березанский Ю. М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. «Наукова думка», К., 1965.
3. Cordes H. O.— Math. Ann., 1953, **125**, 5, 401—434.
4. Cordes H. O.— Proc. Internat. Cong. Math., Amsterdam, 1954, **2**.
5. Fridman B.— Proc. conf. different. equations, College Park, Md., Univ. Maryland Book Store, 1956, 209—226.

6. Fridman B.— N. Y. Univ. Inst. Math. Sci. Div. Electromagn. Res. Res. Rept, 1959, BR—12, 25.
7. Haimovici Ad.— An. ştiinţ. Univ. Laşi, Sec. 1, 1959, 5, 1, 23—32.
8. Haimovici Ad.— An. ştiinţ. Univ. Laşi, Sec. 1, 1957, 3, 1, 2, 45—51.
9. Murrey F. J., Noumann J. V.— Ann. of Math., 1936, 37, 116—229.
10. Schatten R.— Ann. of Math. Studies, Princeton University Press, Princeton, 1950, 26.

Львовский филиал математической физики
Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию
в сентябре 1973 г.

ОБ УСЛОВИЯХ ЗНАКООПРЕДЕЛЕННОСТИ И ЗНАКОПОСТОЯНСТВА ФОРМ ЧЕТНОГО ПОРЯДКА

И. Ф. Клюйник

Разрешимость многих задач устойчивости решений дифференциальных уравнений и изучение качественного поведения интегральных кривых методом функций Ляпунова связано с вопросом о знакоопределенности и знакопостоянстве функций нескольких переменных [3]. При установлении типа системы линейных дифференциальных уравнений с частными производными достаточно иметь некоторый критерий знакоопределенности произвольных форм четного порядка [4]. При этом часто возникает необходимость исследовать ту или иную форму на знакоопределенность или на знакопостоянство, когда коэффициенты зависят от каких-нибудь параметров. Здесь необходимо иметь некоторые условия в виде аналитических выражений, сформулированных с помощью коэффициентов.

Как известно [3], форма F называется знакоопределенной (положительно определенной или отрицательно определенной) в некоторой области изменения переменных, если $F > 0$ или $F < 0$. Форма F называется знакопостоянной (знакоположительной или знакоотрицательной) в области изменения переменных, если $F \geqslant 0$ или $F \leqslant 0$. Наконец, форма F называется знакопеременной, если она не является ни знакоопределенной, ни знакопостоянной, т. е. может принимать в области изменения переменных как положительные, так и отрицательные значения.

В данной статье предлагается один способ установления условий знакопостоянства бинарных форм, а также формулируются достаточные и некоторые необходимые условия знакоопределенности тернарных форм.

Рассмотрим бинарную форму n-го порядка, записанную в виде

$$F(x, y) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k y^{n-k}, \tag{1}$$

где a_k — действительные числа. Обозначив $z = \frac{x}{y}$, форму (1) можно переписать так: $F(x, y) = y^n P(z)$, где

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \tag{2}$$

— полином с одной переменной.

Очевидно, форма (1) будет знакоопределенной тогда и только тогда, если полином (2) будет иметь лишь комплексные корни.

В работе [2] было установлено следующее утверждение.

Теорема 1. *Число пар комплексно-сопряженных корней полинома* (2) *равно числу перемен знака в последовательности главных диагональных миноров четного порядка следующей матрицы:*

$$\begin{Vmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \ldots & a_0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & na_n & a_{n-1}(n-1) & a_{n-2}(n-2) & \ldots & a_1 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \ldots & a_1 \end{Vmatrix}. \tag{3}$$