6. Fridman B.— N. Y. Univ. Inst. Math. Sci. Div. Electromagn. Res. Res. Rept, 1959, BR—12, 25.
7. Haimovici Ad.— An. ştiinţ. Univ. Laşi, Sec. 1, 1959, 5, 1, 23—32.
8. Haimovici Ad.— An. ştiint. Univ. Laşi, Sec. 1, 1957, 3, 1, 2, 45—51.
9. Murrey F. J., Noumann J. V.— Ann. of Math., 1936, 37, 116—229.
10. Schatten R.— Ann. of Math. Studies, Princeton University Press, Princeton, 1950, 26.

Львовский филиал математической физики
Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию
в сентябре 1973 г.

ОБ УСЛОВИЯХ ЗНАКООПРЕДЕЛЕННОСТИ И ЗНАКОПОСТОЯНСТВА ФОРМ ЧЕТНОГО ПОРЯДКА

И. Ф. Клюйник

Разрешимость многих задач устойчивости решений дифференциальных уравнений и изучение качественного поведения интегральных кривых методом функций Ляпунова связано с вопросом о знакоопределенности и знакопостоянстве функций нескольких переменных [3]. При установлении типа систем линейных дифференциальных уравнений с частными производными достаточно иметь некоторый критерий знакоопределенности произвольных форм четного порядка [4]. При этом часто возникает необходимость исследовать ту или иную форму на знакоопределенность или на знакопостоянство, когда коэффициенты зависят от каких-нибудь параметров. Здесь необходимо иметь некоторые условия в виде аналитических выражений, сформулированных с помощью коэффициентов.

Как известно [3], форма F называется знакоопределенной (положительно определенной или отрицательно определенной) в некоторой области изменения переменных, если $F > 0$ или $F < 0$. Форма F называется знакопостоянной (знакоположительной или знакоотрицательной) в области изменения переменных, если $F \geqslant 0$ или $F \leqslant 0$. Наконец, форма F называется знакопеременной, если она не является ни знакоопределенной, ни знакопостоянной, т. е. может принимать в области изменения переменных как положительные, так и отрицательные значения.

В данной статье предлагается один способ установления условий знакопостоянства бинарных форм, а также формулируются достаточные и некоторые необходимые условия знакоопределенности тернарных форм.

Рассмотрим бинарную форму n-го порядка, записанную в виде

$$F(x, y) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k y^{n-k}, \tag{1}$$

где a_k — действительные числа. Обозначив $z = \frac{x}{y}$, форму (1) можно переписать так: $F(x, y) = y^n P(z)$, где

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \tag{2}$$

— полином с одной переменной.

Очевидно, форма (1) будет знакоопределенной тогда и только тогда, если полином (2) будет иметь лишь комплексные корни.

В работе [2] было установлено следующее утверждение.

Теорема 1. *Число пар комплексно-сопряженных корней полинома* (2) *равно числу перемен знака в последовательности главных диагональных миноров четного порядка следующей матрицы:*

$$\left\| \begin{matrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \ldots & a_0 & 0 \ldots 0 \\ 0 & na_n & a_{n-1}(n-1) & a_{n-2}(n-2) & \ldots & a_1 & 0 \ldots 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & . & . & . & \ldots & \ldots & a_1 \end{matrix} \right\|. \tag{3}$$

Если же полином (2), имеет кратные корни $z_1, z_2, \ldots, z_p$ соответственно кратностей $n_1, n_2, \ldots, n_p$, то, повторяя рассуждения, аналогичные рассуждениям, проведенным в работе [2], приходим к такому утверждению.

Теорема 2. *Число всех различных корней полинома* (2) *равно* r, *а число всех различных действительных корней равно*

$$r - 2V(1, D_2, D_4, \ldots, D_{2r}), \tag{4}$$

где $2r$ — *наивысший порядок отличного от нуля главного диагонального минора четного порядка матрицы* (3), *а* $V(1, D_2, D_4, \ldots, D_{2r})$ — *число перемен знака в последовательности чисел* $1, D_2, D_4, \ldots, D_{2r}$.

Из теоремы 2 вытекает такое следствие.

Следствие. Если n четно, т. е. $n = 2s$ $(s = 1, 2, \ldots)$, то все корни полинома (2) комплексные тогда и только тогда, когда число перемен знака в последовательности главных диагональных миноров четного порядка матрицы (3) равно $\frac{1}{2} r$, т. е.

$$V(1, D_2, D_4, \ldots, D_{2r}) = \frac{1}{2}. \tag{5}$$

Таким образом, формула (5) дает критерий знакоопределенности бинарной формы (1) произвольного четного порядка $n = 2s$.

Если же кроме условия (5) $a_n > 0$, то получим критерий положительной определенности. Аналогично, выполнение условия (5) и условия $a_n < 0$ дают критерий отрицательной определенности.

Предположив, что полином (2) имеет кратные корни $z_1, z_2, \ldots, z_p$ соответственно кратностей $n_1, n_2, \ldots, n_p$, перепишем полином (2) в виде

$$P(z) = a_n (z - z_1)^{n_1} \ldots (z - z_p)^{n_p}, \quad (a_n \neq 0, \ z_i \neq z_k) \tag{6}$$

при $i \neq k$, $i, k = 1, 2, \ldots, p$, $n_1 + n_2 + \cdots + n_p = n$.

Пусть первых q корней $(q \leqslant p)$ действительны, а остальные $p - q$ комплексны. Произведение множителей с комплексными корнями обозначим через $R(t)$, где, очевидно, $R(t)$ — действительный многочлен четной степени. Таким образом,

$$P(z) = a_n (z - z_1)^{n_1} \ldots (z - z_q)^{n_q} R(z). \tag{7}$$

Пусть степень полинома (7) четная, т. е. $n = 2s$, тогда, очевидно, $n_1 + n_2 + \ldots + n_q$ — число четное. Имеет место следующая лемма.

Лемма 1. *Для того чтобы полином* (7) *был знакопостоянным, т. е.* $P(z) \geqslant 0$ $(P(z) \leqslant 0)$, *необходимо и достаточно, чтобы* 1) $a_n > 0$ $(a_n < 0)$; 2) *все действительные корни имели четную кратность.*

Из сформулированной леммы вытекает, что для установления условий знакопостоянства полинома $P(z)$ достаточно иметь условия четной кратности его действительных корней, если они есть.

Легко доказать следующее достаточное условие.

Теорема 3. *Если* $r - 2V(1, D_2, D_4, \ldots, D_{2r}) = 1$, *то* $P(z) \geqslant 0$ *или* $P(z) \leqslant 0$ *в зависимости от того, будет ли* $a_n > 0$ *или* $a_n < 0$.

Легко видеть, что верна также такая теорема.

Теорема 4. *Если полином* $P(t)$ *знакопостоянный, то он имеет не более чем* $\frac{1}{2} n$ *различных действительных корней.*

В дальнейшем, поскольку речь будет идти о кратных корнях, то естественно ввести в рассмотрение производные полинома $P(z)$, которые каждый раз будем рассматривать как новые полиномы. А значит, для определения числа действительных и комплексных корней каждого из этих полиномов будем применять теорему 2. Кроме того, учитывая, что операция дифферен-

[ди]ферен]цирования уменьшает кратность каждого корня на единицу, с появлением новых корней легко показать, что верна следующая теорема.

Теорема 5. *Пусть наивысший порядок отличного от нуля главного диагонального минора четного порядка матрицы вида* (3) *для производных порядка* $k_1, k_2, \ldots, k_m$ *определяется по формуле*

$$r = p + k_1(p-1) + \cdots + k_m(p-m) \qquad (m = 1, 2, \ldots, p-1). \quad (8)$$

Тогда, если числа $k_1, k_2, \ldots, k_m$ *окажутся нечетными, то полином* $P(z) \geqslant 0$ *или* $P(z) \leqslant 0$ *в зависимости от того* $a_n > 0$ *или* $a_n < 0$. *При этом* 1) *если какие-нибудь из чисел* k_i $(i = 1, \ldots, m)$ *окажутся четными, то это будет означать, что какие-то корни полинома* $P(z)$ *имеют нечетную кратность;* 2) *если эти корни будут комплексными, то они, очевидно, на знак полинома* $P(z)$ *не влияют.*

Таким образом, необходимо дополнительно исследовать, являются ли данные корни действительными или комплексными.

Рассмотрим случай тернарной формы произвольного четного порядка $n = 2s$, которую запишем в виде

$$F(x, y, z) = \sum_{0 \leqslant k+l \leqslant n} a_{kl} x^k y^l z^{n-(k+l)}, \quad (9)$$

где a_{kl} — действительные числа. Обозначив $u = \frac{x}{z}$ и $v = \frac{y}{z}$, форму (9) можно переписать так: $F(x, y, z) = z^n P(u, v)$,
где

$$P(u, v) = \sum_{0 \leqslant k+l \leqslant n} a_{kl} u^k v^l \quad (10)$$

— полином с двумя переменными.

Очевидно, форма (9) будет знакоопределенной тогда и только тогда, если полином (10) не будет иметь ни единого решения в поле действительных чисел.

В работе [2] был предложен один из способов установления условий знакоопределенности, который состоит в следующем: полином (10) рассматривается как полином с одной переменной u, коэффициенты которого зависят от переменной v как параметра. Таким образом, пусть

$$P(u, v) = \sum_{k=0}^{n} b_k u^k, \quad (11)$$

где

$$b_k = \sum_{l=0}^{n-k} a_{kl} v^l. \quad (12)$$

Для полинома (11), как для полинома с одной переменной, строится матрица вида (3)

$$\left\| \begin{matrix} b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} \ldots b_0 & 0 \ldots 0 \\ 0 & nb_n & (n-1)b_{n-1} & (n-2)b_{n-2} \ldots b_1 & 0 \ldots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot\ \ldots & \ldots\ b_1 \end{matrix} \right\| \quad (13)$$

и требуется, чтобы выполнялось условие (5) при любых действительных значениях переменной v. Раскрывая главные диагональные миноры четного порядка матрицы (13) *, получаем n полиномов от переменной v, которые обозначим

$$D_{2i}(v) = \sum_{p=0}^{i(i-1)} A_{2i,p} v^p \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \quad (14)$$

* В работе [2] предложен один из методов вычисления определителей полиномиальной матрицы.

Если все полиномы (14) и соответствующая бинарная форма, которая получается, если в (9) положить $z = 0$, окажутся знакоопределенными, то знакоопределенной будет также форма (9). Если же некоторые из полиномов (14) знакопеременны, то в этом случае сформулируем некоторые необходимые условия знакоопределенности формы (9). Для этого нам понадобится следующая лемма.

Лемма 2. *Пусть задано два действительных полинома с одной переменной, т. е.*

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \quad \text{и} \quad Q(z) = \sum_{k=0}^{m} b_k z^k$$

и пусть число различных действительных корней полинома $P(z)$ равно p ($p \leqslant n$), а полинома $Q(z)$ — q ($q \leqslant m$). Пусть $q \leqslant p$, тогда, для того чтобы все действительные корни полинома $P(z)$ были корнями полинома $Q(z)$, необходимо и достаточно, чтобы число различных действительных корней полинома $P(z)\,Q(z)$ равнялось q.

Имеют место следующие, легко доказуемые утверждения.

Теорема 6. *Если полином (10) знакоопределенный, то последний из полиномов (14), т. е.*

$$D_{2n} = \sum_{p=0}^{n(n-1)} A_{2n,p} v^p$$

знакопостоянный, а именно: знакоположительный, если $\frac{n}{2}$ — четно, и знакоотрицательный, если $\frac{n}{2}$ — нечетно.

Теорема 7. *Если полином (10) знакоопределенный, а полиномы $D_{2n}(v)$, $D_{2n-2}(v)$, $\ldots$, $D_{2n-2h}(v)$ ($h = 0, 1, \ldots, n-4$) имеют m $\left(m = 1, 2, \ldots \right.$ $\left. \ldots, \frac{1}{2}(n-h)(n-h-1)\right)$ общих различных действительных корней, то все эти m корней являются также корнями и полинома $D_{2n-2h-2}(v)$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. «Наука», М., 1966.
2. Клюйник И. Ф.— В кн.: Математическая физика, 16. «Наукова думка», К., 1974.
3. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. «Наука», М., 1966.
4. Петровский И. Г.— УМН, 1946, 1, 3, 4, 13, 14.

Львовский филиал математической физики
Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию
в октябре 1973 г.

О РАВНОМЕРНОЙ ДЕФИНИТНОСТИ СИММЕТРИЗАТОРОВ КОРНЕЙ «АЛГЕБРАИЧЕСКИХ» ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

А. И. Балинский

Пусть $\mathfrak{H}$ — гильбертово пространство, а $\mathfrak{R}$ — множество всех линейных ограниченных операторов, действующих в этом пространстве.

Рассмотрим полиномиальный операторный пучок

$$P(\lambda) = \lambda^n A_0 + \lambda^{n-1} A_1 + \cdots + \lambda A_{n-1} + A_n \tag{1}$$

с самосопряженными коэффициентами $A_k \in \mathfrak{R}$ ($k = 0, 1, \ldots, n$) и равномерно положительным оператором $A_0 \gg 0$ ($\exists \delta > 0$ $(A_0 x, x) \geqslant \delta(x, x)$ $\forall x \in \mathfrak{H}$). Через $\sigma(P)$ обозначим, как обычно, спектр пучка (1), т. е. множество всех комплексных чисел λ, для которых оператор $P(\lambda)$ необратим. Дополнение к $\sigma(P)$ в комплексной плоскости — резольвентное множество пучка — обозначим через $\rho(P)$.