

точности удовлетворения найденными функциями  $\varphi_i^N(\xi)$  исходной системе интегральных уравнений (19). Во всех рассмотренных случаях оказалось возможным для достижения точности 1% ограничиться  $N = 25$ .

Вычисления проводились при следующих значениях параметров:

$$\frac{a}{h} = 10, E_1 = E_2 = E, \nu_0 = \nu_1 = \nu_2 = \frac{1}{3}.$$

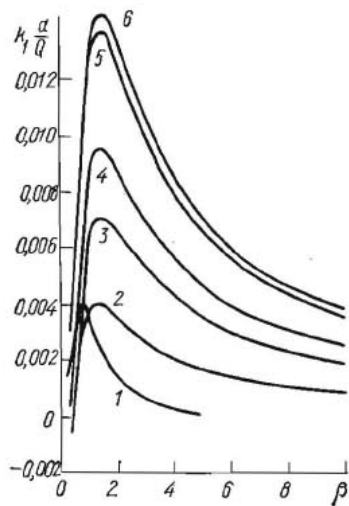


Рис. 4.

Рис. 2 иллюстрирует зависимость коэффициентов интенсивности нормальных напряжений  $k_1$  от относительной жесткости включения  $k = \frac{E_0}{E}$  для случая а) — кривая 1 и для случая б) — кривая 2. Зависимость  $k_1$  от относительного расстояния между включением и точками приложения сил  $\beta = \frac{d}{a}$  (случай в) для различных  $k$  представлена на рис. 3, 4. Кривые 1—6 (рис. 3) характеризуются последовательно следующими значениями параметра  $k$ :  $10^{-3}$ ,  $10^{-2}$ ;  $10^{-1}$ ; 0,2; 0,5; 1, а кривые 1—6 (рис. 4) — значениями параметра  $k$ , равными соответственно 1; 2; 5; 10;  $10^2$ ;  $10^3$ .

Численные решения, полученные для  $k = 10^3$  и  $k = 10^{-3}$  с точностью до 1% совпадают с аналитическими решениями для абсолютно жесткого включения и разреза.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Куршин Л. М., Суздальницкий И. Д.— Прикладная механика, 1973, 9, 10.
2. Морарь Г. А., Попов Г. Я.— ПММ, 1970, 34, 3.
3. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. «Наука», М., 1966.
4. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. «Наука», М., 1968.
5. Сулим Г. Т., Грилицкий Д. В.— Прикладная механика, 1972, 8, 11.
6. Хачикян А. С.— Изв. АН АрмССР. Механика, 1970, 23, 3.
7. Чобанян К. С., Хачикян А. С.— Изв. АН АрмССР. Механика, 1967, 20, 6.

Львовский государственный университет

Поступила в редколлегию в октябре 1973 г.

### ТЕРМОУПРУГОЕ СОСТОЯНИЕ ПЛОСКОСТИ, ОСЛАБЛЕННОЙ ПРОИЗВОЛЬНО ОРИЕНТИРОВАННЫМИ ТЕПЛОИЗОЛИРОВАННЫМИ ТРЕЩИНАМИ

Г. С. Кит, М. В. Хай

В настоящее время есть незначительное количество работ, посвященных изучению термоупругого состояния плоскости, ослабленной определенным образом ориентированными прямолинейными трещинами (коллинеарными [3—4], параллельными [5]).

В данной работе исследуется термоупругое состояние плоскости, содержащей произвольно ориентированные теплоизолированные трещины при заданном стационарном температурном поле в сплошной плоскости. Задача приводится к решению системы интегральных уравнений, что позволяет решить ряд новых задач теории трещин.

1. Пусть упругая плоскость, содержащая  $N$  произвольно ориентированных прямолинейных теплоизолированных свободных от внешних усилий трещин, подвержена действию стационарного температурного поля  $t_0(x, y)$ . Наличие трещин вызовет возмущение  $t(x, y)$  заданного основного температурного поля  $t_0(x, y)$ .

Используя результаты работы [3], представим искомую функцию  $t(x, y)$  в виде

$$t(x, y) = \operatorname{Re} F(z), \quad F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\gamma(\xi) d\xi}{\xi - z}. \quad (1)$$

Плотность  $\gamma(\xi)$  интеграла типа Коши определяется из уравнения

$$\frac{1}{\pi} \int_L \gamma'(s) \frac{\cos \vartheta}{r} ds = f(s_0), \quad (2)$$

где  $L = \sum_{k=1}^N L_k$  — совокупность отрезков, вдоль

которых расположены трещины;  $f(s) = -2 \frac{\partial t_0(x, y)}{\partial l}$ ;  $l$  — нормаль к линии  $L$ , направленная влево;  $s$  и  $s_0$  — дуговые абсциссы точек  $M$  и  $M_0$  линии  $L$ ;  $r = |\vec{M_0M}|$ ;  $\vartheta$  — угол между отрезком  $L_k$ , на котором находится точка  $M_0$ , и вектором  $\vec{M_0M}$ .

Выберем локальные системы координат  $x_n O_n y_n$  с началами в центрах трещин (рис. 1) и обозначим:  $\alpha_n$  — угол поворота оси  $O_n x_n$  ( $n$ -й трещины) относительно базисной системы  $x O y$ ;  $d_{nk}$  — расстояние между центрами  $n$ -й и  $k$ -й трещин;  $2a_n$  — длина  $n$ -й трещины. Перейдем в локальную систему координат  $x_n O_n y_n$  и перепишем уравнение (2) в виде системы интегральных уравнений

$$\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^N \int_{-a_k}^{+a_k} \gamma'_k(\xi) \frac{\cos \vartheta_{nk}}{r_{nk}} d\xi = f_n(x_n); \quad |x_n| < a_n \quad (n = 1, 2, \dots, N), \quad (3)$$

где

$$f_n(x_n) = -2 \left. \frac{\partial t_0(x_n y_n)}{\partial y_n} \right|_{y_n=0}.$$

Можно показать, что

$$\frac{\cos \vartheta_{nk}}{r_{nk}} = \operatorname{Re} \frac{\exp(i\alpha_{nk})}{\xi - z_{nk}}, \quad (4)$$

причем  $z_{nk} = d_{nk} \exp[i(\beta_{kn} - \alpha_k)] + x_n \exp(i\alpha_{nk})$ ,  $\alpha_{nk} = \alpha_n - \alpha_k$ ;  $\beta_{kn}$  — угол между положительным направлением оси  $Ox$  и вектором, соединяющим центры  $k$ -й и  $n$ -й трещин;  $x_n$  — абсцисса  $n$ -й локальной системы координат.

Учитывая выражение (4), из системы (3) после применения формулы обращения [1] получаем систему интегральных уравнений для определения неизвестных  $\gamma_n(x)$ :

$$\begin{aligned} \gamma'_n(x_n) = & - \frac{1}{\pi \sqrt{a_n^2 - x_n^2}} \left[ \int_{-a_n}^{+a_n} \frac{\sqrt{a_n^2 - \xi^2}}{\xi - x_n} f_n(\xi) d\xi - \right. \\ & \left. - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^N (1 - \delta_{nk}) \int_{-a_k}^{+a_k} \gamma'_k(\eta) Q_{nk}(\eta, x_n) d\eta \right], \end{aligned} \quad (5)$$

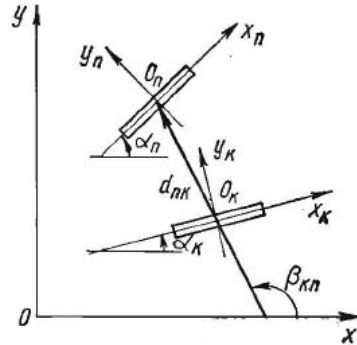


Рис. 1.

где  $\delta_{nk}$  — символ Кронекера,

$$Q_{nk}(\eta, x_n) = \int_{-a_n}^{+a_n} \frac{\sqrt{a_n^2 - \xi^2}}{\xi - x_n} \operatorname{Re} [S_{nk}(\eta, \xi) \exp(i\alpha_{kn})] d\xi, \quad (6)$$

$$S_{nk}(\eta, \xi_n) = \frac{1}{2} \{ \eta - \xi \exp(i\alpha_{kn}) - d_{nk} \exp[i(\alpha_k - \beta_{kn})] \}^{-1}. \quad (7)$$

2. Напряженное состояние плоскости с произвольно ориентированными термоизолированными трещинами под действием заданного температурного поля представим в виде суммы двух составляющих. Первая составляющая обусловлена температурой  $t_0(x, y)$ , вторая — температурой возмущения  $t(x, y)$ . Определяя напряжения в сплошной плоскости, вызванные температурой  $t_0(x, y)$ , и решая силовую задачу [2] в предположении, что к берегам трещин приложены усилия, обратные по знаку найденным, имеем первую составляющую напряженного состояния плоскости с трещинами.

Для определения напряжений, обусловленных температурой  $t(x, y)$ , представим напряжения и производные от перемещений через комплексные потенциалы Колосова — Мусхелишвили  $\Phi(z)$  и  $\Psi(z)$  [6, 8], т. е.

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} - i\tau_{xy} &= \Phi(z) + \Omega(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)}, \\ 2G \left( \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) &= \kappa\Phi(z) - \Omega(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)} + mF(z), \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\Psi(z) = \bar{\Omega}(z) - \Phi(z) - z\Phi'(z),$$

$m = \alpha E$ ,  $\kappa = 3 - 4\nu$  для плоской деформации;  $m = \frac{\alpha E}{1 + \nu}$ ,  $\kappa = \frac{3 - \nu}{1 + \nu}$  для плоского напряженного состояния;  $G$  — модуль сдвига;  $E$  — модуль упругости;  $\nu$  — коэффициент Пуассона;  $\alpha$  — коэффициент линейного теплового расширения.

Под действием температуры берега трещин смещаются относительно друг друга и перемещения  $u$  и  $v$  терпят разрыв на линии трещин. Выразим потенциалы  $\Phi_n(z_n)$  и  $\Psi_n(z_n)$ , определяющие напряженное состояние плоскости, содержащей лишь  $n$ -ю термоизолированную трещину, через неизвестный скачок перемещений на линии трещины, учитывая условия

$$\begin{aligned} \sigma_{yy}^+ - i\tau_{xy}^+ &= \sigma_{yy}^- - i\tau_{xy}^- \text{ на } L_n, \\ 2G \frac{\partial}{\partial x_n} [u^+ - u^- + i(v^+ - v^-)] &= g_n^*(x_n) \text{ на } L_n. \end{aligned}$$

Отсюда, с учетом выражений (8), приходим к задаче линейного сопряжения

$$\begin{aligned} (\Phi_n - \Omega_n)^+ - (\Phi_n - \Omega_n)^- &= 0, \\ (\kappa\Phi_n + \Omega_n + mF_n)^+ - (\kappa\Phi_n + \Omega_n + mF_n)^- &= g_n^*(x_n). \end{aligned} \quad (9)$$

Требую, чтобы функции  $\Phi_n(z_n)$ ,  $\Psi_n(z_n)$  были голоморфными всюду, кроме линии скачка производных перемещений, и исчезали на бесконечности, с учетом равенства  $F_n^+ - F_n^- = \gamma_n(x_n)$ , находим [7]

$$\begin{aligned} \Phi_n(z_n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{L_n} \frac{g_n(\xi) d\xi}{\xi - z_n}, \\ \Psi_n(z_n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{L_n} \left[ \frac{g_n(\xi)}{\xi - z_n} - \frac{\xi g_n(\xi)}{(\xi - z_n)^2} \right] d\xi, \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$g_n(\xi) = - \frac{2i}{1 + \kappa} \left[ G \frac{\partial}{\partial \xi} \{ u_n^+ - u_n^- + i(v_n^+ - v_n^-) \} - \frac{m}{2} \gamma_n(\xi) \right]. \quad (11)$$

В случае  $N$  произвольно ориентированных термоизолированных трещин представим  $\Phi(z)$  и  $\Psi(z)$  в виде сумм

$$\Phi(z) = \sum_{n=1}^N \Phi_n(z), \quad \Psi(z) = \sum_{n=1}^N \Psi_n(z). \quad (12)$$

Определим комбинацию нормальных  $N_{nk}$  и касательных  $T_{nk}$  напряжений на линии расположения  $n$ -й трещины, вызванных скачком  $g_k(\xi)$  на  $k$ -й трещине:

$$N_{nk} - iT_{nk} = \frac{1}{\pi} \int_{-a_k}^{+a_k} [g_k(\xi) K_{nk}(\xi, x_n) + \overline{g_k(\xi)} L_{nk}(\xi, x_n)] d\xi, \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} K_{nk}(\xi, x_n) &= \overline{S_{nk}(\xi, x_n)} + S_{nk}(\xi, x_n) \exp(2i\alpha_{kn}), \\ L_{nk}(\xi, x_n) &= S_{nk}(\xi, x_n) - \frac{S_{nk}^2(\xi, x_n) \exp(2i\alpha_{kn})}{S_{nk}(\xi, x_n)}. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь  $S_{nk}(\xi, x_n)$  определяется соотношением (7), а черта сверху обозначает комплексно-сопряженную величину.

Рассматривая напряжения  $\sum_{k=1}^N (1 - \delta_{nk})(N_{nk} - iT_{nk})$  как дополнительную внешнюю нагрузку, приложенную к берегам  $n$ -й трещины, и требуя, чтобы трещины были свободными от внешних усилий, получаем систему интегральных уравнений [2] для определения неизвестных функций  $g_n(x)$ , которая после применения формулы обращения приводится к системе интегральных уравнений Фредгольма второго рода:

$$\begin{aligned} g_n(x_n) &= \frac{1}{\pi^2 \sqrt{a_n^2 - x_n^2}} \left\{ \frac{im\pi}{1 + \kappa} \int_{-a_n}^{+a_n} \gamma_n(\xi) d\xi + \right. \\ &+ \sum_{k=1}^N (1 - \delta_{nk}) \int_{-a_k}^{+a_k} [g_k(\eta) M_{nk}(\eta, x_n) + \overline{g_k(\eta)} R_{nk}(\eta, x_n)] d\eta \Big\}, \quad |x_n| < a_n, \end{aligned} \quad (15)$$

где  $n = 1, 2, \dots, N$ ,

$$\begin{aligned} M_{nk}(\eta, x_n) &= \int_{-a_n}^{+a_n} \frac{\sqrt{a_n^2 - \xi^2}}{\xi - x_n} K_{nk}(\eta, \xi) d\xi, \\ R_{nk}(\eta, x_n) &= \int_{-a_n}^{+a_n} \frac{\sqrt{a_n^2 - \xi^2}}{\xi - x_n} L_{nk}(\eta, \xi) d\xi. \end{aligned} \quad (16)$$

Определив в результате решения системы интегральных уравнений (5) и (15)  $g_n(x_n)$ , по формулам (10), (12) и (8) можно вычислить напряжения, а значит, и коэффициенты интенсивности напряжений

$$k_{1n} - ik_{2n} = \mp \lim_{x_n \rightarrow \pm a_n} \left[ \frac{\sqrt{a_n^2 - x_n^2}}{\sqrt{a_n}} g_n(x_n) \right], \quad (n = 1, 2, \dots, N). \quad (17)$$

Уравнения (5) и (15) дают возможность получить решение для ряда конкретных областей. В частности, устремив длину одной из трещин к бесконечности, получим полуплоскость с произвольными термоизолированными трещинами, граница которой свободна от внешних усилий и термоизолирована. Аналогично можно получить полосу или клин с произвольно ориентированными трещинами.

**3. Уравнения** (5) и (15) для произвольных расстояний между трещинами можно решать численно, так как ядра, выраженные формулами (6) и (16), представляются в замкнутом виде.

Для больших расстояний между трещинами ( $2a < d$ ,  $a = \max a_n$ ,  $d = \min d_{nk}$ ) решение будем искать в виде ряда по степеням  $1/d$ , разлагая предварительно ядра  $Q_{nk}$ ,  $M_{nk}$ ,  $R_{nk}$  в ряды:

$$\left. \begin{aligned} Q_{nk}(\eta, x) \\ M_{nk}(\eta, x) \\ R_{nk}(\eta, x) \end{aligned} \right\} = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{s=0}^p H_{p-s}(x) \frac{\eta^s}{d^{p+1}} \begin{cases} \omega_{nkps} \\ a_{nkps} \\ b_{nkps} \end{cases}, \quad (18)$$

где

$$\omega_{nkps} = (-1)^{p+s+1} \varepsilon_{nkps} \cos(\chi_{kn} + \alpha_{kn}),$$

$$a_{nkps} = \frac{(-1)^{p+s+1}}{2} \varepsilon_{nkps} [\exp(2i\alpha_{kn}) + 2 \cos \chi_{kn}],$$

$$b_{nkps} = \begin{cases} \frac{(-1)^{p+s+1}}{2} (c_{nkps} + d_{nk(p-1)(s-1)} + f_{nk(p-1)s}), & p \neq s, \\ -\frac{1}{2} (c_{nkps} + d_{nk(p-1)(p-1)}), & p = s, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} c_{nkps} &= \varepsilon_{nkps} (\exp(i\chi_{kn}) - (p+1) \exp[i(\chi_{kn} + 2\beta_{kn} - 2\alpha_n)]), \\ d_{nkps} &= (p+1) \varepsilon_{nkps} \exp[i(\chi_{kn} + 2\alpha_{kn} + \beta_{kn} - \alpha_k)], \\ f_{nkps} &= (p+1) \varepsilon_{nkps} \exp[i(\chi_{kn} + \alpha_{kn} + \beta_{kn} - \alpha_k)], \\ \chi_{kn} &= (p-s) \alpha_{kn} - (p+1) (\alpha_k - \beta_{kn}), \end{aligned} \quad (19)$$

$$\varepsilon_{nkps} = \frac{p! d^{p+1}}{s! (p-s)! d_{nk}^{p+1}}, \quad H_{p-s}(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-a_n}^{+a_n} \frac{\xi^{p-s} \sqrt{a_n^2 - \xi^2}}{\xi - x} d\xi.$$

Отметим, что если хотя бы один из индексов при  $d$  и  $f$  отрицательный, то соответствующие величины следует принять равными нулю.

Представляя  $\gamma_n(x)$  и  $g_n(x)$  в виде рядов

$$\gamma_n(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\gamma_{np}(x)}{d^p}, \quad g_n(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{g_{np}(x)}{d^p}, \quad (20)$$

решение уравнений (5) и (15) в общем случае можно записать рекуррентными соотношениями:

$$\gamma_{nq}(x_n) = \frac{1}{\pi X(x_n)} KH_{p-s}(x_n) \omega_{nkps} \int_{-a_k}^{+a_k} \xi^s \gamma_{k(q-p-1)}(\xi) d\xi,$$

$$\begin{aligned} g_{nq}(x_n) &= \frac{1}{\pi X(x_n)} \left\{ \frac{im\pi}{1+\kappa} \int_{-a_n}^{+a_n} \gamma_{nq}(\xi) d\xi + \right. \\ &\left. + KH_{p-s}(x_n) \int_{-a_k}^{+a_k} \eta^s [g_{k(q-p-1)}(\eta) a_{nkps} + \overline{g_{k(q-p-1)}(\eta) b_{nkps}}] d\eta \right\}, \quad (21) \end{aligned}$$

причем  $X(x_n) = \sqrt{a_n^2 - x_n^2}$ , оператор  $K = \sum_{k=1}^N (1 - \delta_{nk}) \sum_{p=0}^{q-1} \sum_{s=0}^p$ ,

$$\gamma_{n0}(x_n) = -\frac{1}{\pi X(x_n)} \int_{-a_n}^{+a_n} \frac{X(\xi) f_n(\xi) d\xi}{\xi - x_n}, \quad g_{n0}(x_n) = \frac{im}{\pi(1+\kappa) X(x_n)} \int_{-a_n}^{+a_n} \gamma_{n0}(\xi) d\xi.$$

4. В качестве примера рассмотрим плоскость, ослабленную двумя равными произвольно ориентированными трещинами, вдали от которых задана температура  $t_0(x, y) = -qy$ . Полагая в формулах (19) — (21)  $\alpha_1 = 0$ ,  $a_1 = a_2 = a$ ,  $d_{12} = d_{21} = d$ ,  $\alpha_2 = \varphi$ ,  $\beta_{12} = \psi$ ,  $\beta_{21} = \pi + \psi$ ,  $f_1 = 2q$ ,  $f_2 = 2q \cos \varphi$  (первая трещина неподвижна и перпендикулярна направлению теплового потока на бесконечности, вторая — произвольно смещается относительно первой), из формул (17) — (21) получаем выражения для определения коэффициентов интенсивности напряжений в виде рядов по степеням  $\varepsilon = 2a/d$ , которые не приводим из-за их громоздкости. При вычислениях мы ограничивались членами порядка  $\varepsilon^4$ .

В частности, при  $\psi = 0$ ,  $\varphi = 0$  получим разложение в ряд точного решения задачи [4] и при  $d = 3a$ , ( $\varepsilon = \frac{2}{3}$ ) приближенное значение  $k_2$  для обоих концов трещин отличается от точного меньше чем на 1,5%. Для параллель-

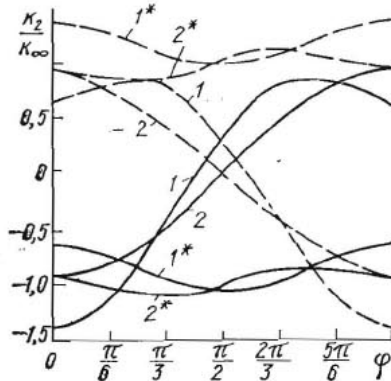


Рис. 2.

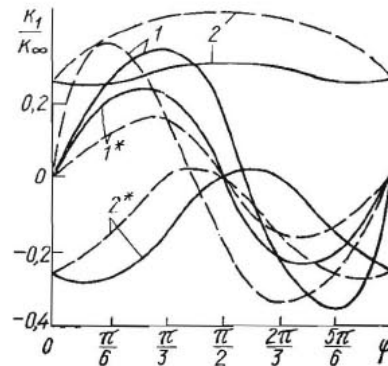


Рис. 3.

ных трещин ( $\psi = \frac{\pi}{2}$ ,  $\varphi = 0$ ) приближенное решение сравнивалось с решением, полученным в работе [5]. Установлено, что величины  $k_2$  отличаются между собой на 1,1%, в то время как относительная ошибка для  $k_1$  составляет 8%. С увеличением расстояния между трещинами эта ошибка быстро уменьшается.

Анализ полученных результатов показал также, что для коллинеарных и параллельных трещин при  $\varepsilon = 0,5$  наличие второй трещины оказывает уже малое влияние на величину  $k_2$ , а коэффициент  $k_1$  еще значительно зависит от расстояния между трещинами и при  $\varepsilon < 0,5$  (например, при  $\varepsilon = \frac{1}{3}$  имеем  $k_1 = 0,158k_\infty$ ,  $k_\infty = \alpha E q / 4 (1 - \nu)$ ).

На рис. 2,3 показана зависимость коэффициентов интенсивности напряжений  $k_2$  и  $k_1$  от угла  $\varphi$  (угла поворота второй трещины относительно первой) при расстоянии между центрами трещин  $d = 3a$ , когда трещины коллинеарны ( $\psi = 0$ , кривые обозначены цифрой 1) и параллельны ( $\psi = \frac{\pi}{2}$ , кривые обозначены цифрой 2). Звездочка возле цифр означает, что данные кривые относятся к неподвижной трещине. Сплошные линии соответствуют коэффициентам интенсивности напряжений для правых концов трещин, пунктирные — для левых концов (правый конец подвижной трещины выбирается в исходном положении при  $\varphi = 0$ ).

Из графиков видно, что коэффициенты интенсивности напряжений существенно зависят от угла поворота второй трещины относительно первой. Это нужно учитывать при оценке напряженного состояния в окрестности концов трещин.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. Физматгиз, М., 1963.
2. Дацишин А. П., Савчук М. П.— ПММ, 1973, 37, 2.
3. Кит Г. С.— ДАН УРСР. Сер. А, 1969, 5.
4. Кит Г. С., Дорош Н. А.— В кн.: Концентрация напряжений, 3. «Наукова думка», К., 1971.
5. Кит Г. С., Хай М. В.— Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1973, 5.
6. Лебедев Н. Н. Температурные напряжения в теории упругости. ОНТИ, М., 1937.
7. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. «Наука», М., 1966.
8. Прусов А. И. Некоторые задачи термоупругости. Изд-во Белорусского ун-та, Минск, 1972.

Львовский филиал математической физики  
Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию  
в октябре 1975 г.

## УПРУГОЕ РАВНОВЕСИЕ ПЛАСТИНКИ С ДВУМЯ КРУГОВЫМИ ОТВЕРСТИЯМИ, В КОТОРЫЕ ВПРЕССОВАНЫ ЗАМКНУТЫЕ СТЕРЖНИ

Т. Л. Мартынович, М. К. Зварич

Рассмотрим изотропную пластинку, срединная плоскость которой занимает бесконечную область  $S$ , ослабленную двумя одинаковыми отверстиями  $L_1$  и  $L_2$ , в которые впрыснуты замкнутые упругие стержни. Расстояние между центрами отверстий примем равным  $2l$ . Систему координат расположим так, как это показано на рис. 2. Будем считать, что на бесконечности задано однородное напряженное состояние, а в пластинке действуют сосредоточенные силы  $P_i$ , расположенные симметрично относительно координатных осей  $Ox$  и  $Oy$ . Трением на линии контакта пренебрегаем. Предполагается, что контакт осуществляется вдоль контуров  $L_1$ ,  $L_2$ . Поперечное сечение стержня может быть произвольной формы, симметричной относительно срединной плоскости пластинки. К внутренним контурам колец приложены нормальные напряжения  $N^*$  постоянной интенсивности. Напряженно-деформированное состояние колец описывается теорией тонких криволинейных стержней. На линиях контакта  $L_1$  и  $L_2$  заданы, как функции дуги, нормальные величины скачков векторов перемещений  $e_1(t) = e_2(t) = \varepsilon(t)$ . Учитывая силовую и геометрическую симметрию, граничным условиям задачи достаточно удовлетворить на правом контуре (на левом контуре они выполняются автоматически).

Определение напряженного состояния в контактирующих телах сводится к нахождению потенциалов  $\varphi(z)$  и  $\psi(z)$ , комплексного переменного  $z = x + iy$  и компонент деформации стержня  $e_0$  и  $\theta_b$ , которые удовлетворяют граничным условиям:

$$\begin{aligned} \int_{L_1} F(t) \operatorname{Re} d \{it[\chi\varphi(t) - t\overline{\varphi'(t)} - \overline{\psi(t)}]\} &= 2\mu \int_{L_1} F(t) d[u_{in} + \varepsilon(t)]; \\ \int_{L_1} \overline{F(t)} d[\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)}] &= \int_{L_1} N^{(t)} \overline{F(t)} dt; \\ \int_{L_1} F(t) d[\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)}] &= \int_{L_1} N^{(t)} F(t) dt, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $F(z)$  — произвольная функция, голоморфная в области, занятой пластинкой;  $t$  — аффикс точки контура  $L_1$ ;  $t' = \frac{dt}{ds}$ .