С увеличением толщины второго слоя «резонансная» глубина проникновения индукционных токов возрастает. Если первым слоем является слой с высокой электропроводимостью или магнитной проницаемостью (малые глубины проникновения δ_*), то резонансные явления наступают при значениях δ на порядок меньших, чем в случае, когда первый слой имеет низкую электропроводимость или магнитную проницаемость.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бурак Я. И., Гачкевич А. Р.— Прикладная механика, 1974, 10, 7.
2. Бурак Я. И., Чернявская Л. В.— МТТ, 1973, 2.
3. Гринберг Г. А. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. Изд-во АН СССР, Л., 1948.
4. Коваленко А. Д. Основы термоупругости. «Наукова думка», К., 1970.
5. Подстригач Я. С., Колодий Б. И.— В кн.: Тепловые напряжения в элементах конструкций, 10. «Наукова думка», К., 1970.
6. Родигин Н. М. Индукционный нагрев стальных изделий токами нормальной частоты. Металлургиздат, М., 1950.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию в ноябре 1973 г.

ОДИН СПОСОБ ОБОСНОВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКОГО МЕТОДА ИССЛЕДОВАНИЯ УПРУГИХ СИСТЕМ

Д. А. Байдак, Л. М. Зорий

1. Рассмотрим некоторую упругую систему с распределенными параметрами, находящуюся под действием заданных нагрузок. Они могут иметь консервативные и неконсервативные составляющие p_k, которые изменяются монотонно в некоторой области, содержащей точку $p_k = 0$. Данная система такая, что при изменении параметров нагрузок в этой области существует определенное состояние ее равновесия (невозмущенная форма).

Пусть исследование возмущенных форм движения рассматриваемой системы (малых колебаний ее около невозмущенной формы равновесия) сводится к смешанной задаче вида

$$\begin{gathered} L[u(x,t)] + g(x)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2b\frac{\partial u}{\partial t}\right) = F\left(t,\ u,\ \frac{\partial u}{\partial x},\ \ldots,\ \frac{\partial^{2n} u}{\partial x^n},\ \frac{\partial u}{\partial t},\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right); \\ V_{i0}[u(x,t)]_{x=0} = 0,\ V_{i1}[u(x,t)]_{x=1} = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n; \qquad (1) \\ u(x,0) = \varphi(x),\ \frac{\partial}{\partial t}u(x,0) = \psi(x), \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1), \end{gathered}$$

где L — линейное дифференциальное выражение порядка $2n$ по переменной x; $u(x, t)$ — отклонения системы от состояния равновесия ($u = 0$); функция $g(x)$, характеризующая распределение массы, положительна; постоянная $b > 0$; F — некоторая нелинейная (непрерывная) функция, исчезающая при $u \equiv 0$; V_{i0}, V_{i1} — линейные однородные формы относительно u и ее производных по x до порядка $2n - 1$ включительно; $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — некоторые заданные функции. Коэффициенты дифференциального выражения и линейных форм задачи (1) считаются непрерывно зависящими в общем случае от переменной x и параметров p_k, приложенных к системе нагрузок, и дифференцируемыми достаточное число раз.

Возмущения $u(x, t)$ предполагаются принадлежащими множеству U вещественных непрерывных по совокупности аргументов функций, удовлетворяющих краевым условиям задачи (1), непрерывно дифференцируемых до порядка $2n$ по переменной x и до второго порядка по времени $t \in [0, T]$, с нормой

$$\|u\| = \left(\int_0^1 g(x) \, |u(x, t)|^2 \, dx \right)^{1/2}.$$

В качестве характеристики близости возмущенных решений $u(x, t)$ к невозмущенному решению $u \equiv 0$ (для которого $\varphi(x) = \psi(x) \equiv 0$) принимается, как обычно, норма $u(x, t)$ и ее производной по t.

Определение. Нулевое решение задачи (1) называется устойчивым, если для всяких $\varepsilon_j > 0$ ($j = 1, 2$), как бы малы они не были, существуют соответственно $\delta_j > 0$ такие, что для всех возмущенных движений, для которых в начальный момент времени $t_0 = 0$ выполняются неравенства $\|\varphi\| < \delta_1$, $\|\psi\| < \delta_2$, при всех $t > 0$ будут выполняться неравенства $\|u\| < \varepsilon_1$, $\|u_t'\| < \varepsilon_2$. В противном случае оно называется неустойчивым. Если же это решение устойчиво и, кроме того, при $t \to \infty$ $\|u\| \to 0$, $\|u_t'\| \to 0$, то говорят об его асимптотической устойчивости.

Основная задача данной работы состоит в обосновании динамического метода (метода малых колебаний) исследования рассматриваемой упругой системы, т. е. в выяснении условий, при выполнении которых об устойчивости (неустойчивости) нулевого решения задачи (1) (невозмущенной формы равновесия) можно судить на основании свойства устойчивости (неустойчивости) тривиального решения соответствующей линеаризованной задачи, получаемой из выражений (1) при $F \equiv 0$.

2. В дальнейшем определяющей является соответствующая (1) задача на собственные значения

$$L[y(x)] - \omega^2 g(x) \, y(x) = 0;$$

$$V_{i0}[y(x)]_{x=0} = 0, \; V_{i1}[y(x)]_{x=1} = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{2}$$

Отметим, что последовательности $\{y_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{z_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ этой и сопряженной к ней задачи образуют биортогональную систему функций с весом $g(x)$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$, а каждая из последовательностей в отдельности — базис Рисса в пространстве $L_g^2(0, 1)$ [1, 3].

Пусть $\Delta(\omega^2)$ — характеристический определитель задачи (2), все корни $\omega_1^2, \omega_2^2, \ldots, \omega_n^2, \ldots$ которого при $p_k = 0$ являются положительными с единственной точкой сгущения на бесконечности (частоты собственных колебаний соответствующей незагруженной упругой системы); будем считать их простыми.

Далее, без уменьшения общности считаем, что система зависит от одного параметра нагрузки $p \geqslant 0$. Тогда существует максимальный полуинтервал $I = [0, p^*)$ такой, что для значений $p \in I$ выполняются неравенства

$$0 < \omega_1^2(p) < \omega_2^2(p) < \cdots < \omega_n^2(p) < \cdots. \tag{3}$$

При $p = p^* + \nu$, где $\nu > 0$ достаточно мало́, эта ситуация изменяется, как правило, следующим образом: а) какие-либо два соседних корня, совпавшие при $p = p^*$, стали при $p = p^* + \nu$ комплексно-сопряженными (автоколебательный вид потери устойчивости); б) первый из корней $\omega_1^2(p^*) = 0$ стал отрицательным при $p = p^* + \nu$ (потеря устойчивости по Эйлеру).

3. При каждом фиксированном значении $t \in [0, T]$, где $T > 0$, решение $u(x, t)$ задачи (1) удовлетворяет граничным условиям (2). Следовательно, при $p \in I$ или $p = p^* + \nu$ оно представимо [4] равномерно сходящимся рядом

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i(t) \, y_i(x), \tag{4}$$

где $x_i(t)$ — функции, подлежащие определению.

Подставляя ряд (4) в уравнение и начальные условия (1), в случае

$p \in I$ приходим к следующей задаче Коши для счетной системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d^2x_j}{dt^2} + 2b\frac{dx_j}{dt} + \omega_j^2 x_j = \int_0^1 F z_j(x)\,dx,$$

$$x_j(0) = \varphi_j;\quad \frac{dx_j(0)}{dt} = \psi_j;\qquad j = 1,\ 2,\ \ldots, \tag{5}$$

где φ_j и ψ_j — коэффициенты рядов

$$\sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j y_j(x) = \varphi(x),\quad \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j y_j(x) = \psi(x). \tag{6}$$

Если $p = p^* + \nu$ и, например $\omega_1^2(p^*) = \omega_2^2(p^*)$, то из системы (5) для значений $j = 1,\ 2$ получаем

$$\frac{d^2x_{11}}{dt^2} + 2b\frac{dx_{11}}{dt} + \alpha^2 x_{11} - \beta x_{12} = \int_0^1 F z_{11}(x)\,dx;$$

$$\frac{d^2x_{12}}{dt^2} + 2b\frac{dx_{12}}{dt} + \beta x_{11} + \alpha^2 x_{12} = -\int_0^1 F z_{12}(x)\,dx; \tag{7}$$

$$x_{11}(0) = \varphi_{11},\quad x_{12}(0) = \varphi_{12},\quad \left.\frac{dx_{11}}{dt}\right|_{t=0} = \psi_{11},\quad \left.\frac{dx_{12}}{dt}\right|_{t=0} = \psi_{12},$$

где

$$x_1 = \bar{x}_2 = x_{11} + ix_{12};\ y_1 = \bar{y}_2 = y_{11} + iy_{12};\ z_1 = \bar{z}_2 = z_{11} + iz_{12};$$

$$\varphi_1 = \varphi_{11} + i\varphi_{12};\ \psi_1 = \psi_{11} + i\psi_{12};\ \omega_1^2(p) = \overline{\omega}_2^2(p) = \alpha^2(p) + i\beta(p);$$

остальные уравнения остаются такими, как в выражении (5).

Заметим, что аналогично можно поступать, когда $\omega_k^2(p^*) = \omega_{k+1}^2(p^*)$ $(k = 2,\ 3,\ \ldots)$. Если же $p = p^* + \nu$ и имеет место эйлерова потеря устойчивости, то в уравнениях (5) следует считать $\omega_1^2(p) < 0$.

4. Предположим, что $p \in I$, $t \in [0,\ T]$. Тогда задачу (5) можно записать в виде

$$X(t) = Q(t) + \int_0^t S(t,\ \theta)\left\{\int_0^1 F[\theta,\ Y(x)X(\theta),\ \ldots]\,Z(x)\,dx\right\}d\theta. \tag{8}$$

Здесь $X(t)$, $Q(t)$, $Z(x)$ — вектор-столбцы, составленные из функций $x_j(t)$, $q_j(t)$, $z_j(x)$; $Y(x)$ — вектор-строка из функций $y_j(x)$, где

$$q_j(t) = e^{-\beta t}\left[\varphi_j \cos\beta_j t + \frac{1}{\beta_j}(\psi_j + b\varphi_j)\sin\beta_j t\right],$$

$$\beta_j = \sqrt{\omega_j^2 - b^2},\qquad j = 1,\ 2,\ \ldots,\ b < \omega_1^2(p),$$

$S(t,\ \theta)$ — бесконечномерная диагональная матрица, элементы которой имеют вид

$$\beta_j^{-1} e^{-b(t-\theta)} \sin\beta_j(t - \theta)\,\delta_{ij},$$

δ_{ij} — символ Кронекера.

Далее будем предполагать, что нелинейная функция F и начальные функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ рассматриваемой задачи (1) удовлетворяют следующим условиям:

$$1)\ \|F_1 - F_2\| \leqslant G(t)\,\|u_1 - u_2\|^{1+q}\ \forall\, u_1,\ u_2 \in U,$$

где $F_i = F(u_i)$, $i = 1,\ 2$; $G(t)$ — некоторая непрерывная положительная функция, характеристический показатель которой $\gamma^* \leqslant b$; $q > 0$ — некоторая постоянная;

2) функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ разлагаются по собственным функциям задачи (2) в регулярно сходящиеся ряды;

коэффициенты этих разложений принадлежат некоторому компактному множеству пространства l_2;

регулярно сходятся ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^2 \varphi_n y_n(x) \; (\varphi_n = (\varphi, z_n)); \quad \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^2 \psi_n y_n(x) \; (\psi_n = (\psi, z_n)).$$

Множество начальных функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, удовлетворяющих условию 2), обозначим далее через $\Phi\Psi$.

Для доказательства существования и единственности решения уравнения (8) будем применять принцип сжатых отображений (см., например, [2]).

Обозначим через C_T множество непрерывных вектор-функций $X(t)$ на промежутке $[0, T]$ со значениями в некотором компактном множестве пространства l_2 [5]. Тогда существует число $R > 0$ такое, что

$$\| X(t) \|^* = (x_1^2(t) + x_2^2(t) + \cdots + x_n^2(t) + \cdots)^{1/2} < R,$$

и для любого $\varepsilon > 0$ можно указать целое число $n_\varepsilon > 0$ такое, что для всех $X(t) \in C_T$ и $t \in [0, T]$ выполняется неравенство

$$\left(\sum_{i=n_\varepsilon}^{\infty} | x_i(t) |^2 \right)^{1/2} \leqslant \varepsilon.$$

В этом множестве функций определим оператор K правой частью (8). Покажем, что при выполнении условий 1) — 2) имеет место включение $KC_T \subset \subset C_T$ и оператор K является оператором сжатия. Так как собственные функции $\{y_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ образуют базис Рисса в пространстве $L_g^2(0, 1)$, то имеет место двусторонняя оценка [4]

$$m \| u \|^2 \leqslant \| X \|^{*2} \leqslant M \| u \|^2, \tag{9}$$

где m, M — абсолютные постоянные.

Из выражения (8) имеем

$$\| KX(t) \|^* \leqslant \| Q(t) \|^* = \int_0^t \| S(t, \theta) \|^* \left\| \int_0^1 FZ(x)\, dx \right\|^* d\theta. \tag{10}$$

Оценим сверху каждую норму правой части этого неравенства:

$$\| Q(t) \|^* \leqslant \sqrt{2c} \left[\sum_{j=1}^{\infty} (| \varphi_j |^2 + | \psi_j |^2) \right]^{\frac{1}{2}}, \quad c^2 = \max \left\{ \left(1 + \frac{1}{\beta_1}\right)^2; \; \frac{b^2}{\beta_1^2} \right\},$$

$$\| S(t, \theta) \|^* = e^{-b(t-\theta)} \left[\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \beta_j (t - \theta)}{\beta_j^2} \right]^{\frac{1}{2}} < \left[\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_j^2} \right]^{\frac{1}{2}} = k. \tag{11}$$

Учитывая условие 1) и применяя оценку (9), имеем

$$\left| \int_0^1 F[\theta, Y(x) X(\theta), \ldots] z_j(x)\, dx \right|^2 \leqslant k_1^2 G^2(\theta) \| X \|^{*2(1+q)} \int_0^1 g z_j^2(x)\, dx, \tag{12}$$

где

$$k_1^2 = (m^{1+q} \min_{0 \leqslant x \leqslant 1} g(x))^{-1}.$$

Собственные функции $\{y_j(x)\}_{j=1}^{\infty}$ и $\{z_j(x)\}_{j=1}^{\infty}$ определяются, как известно, с точностью до произвольных постоянных. Выбираем эти постоянные таким образом, чтобы выполнялись условия

$$\int_0^1 g(x) y_j(x) z_j(x)\, dx = 1, \quad \int_0^1 g(x) z_j^2(x)\, dx = 2c^2 (\varphi_j^2 + \psi_j^2), \qquad j = 1, 2, \ldots. \tag{13}$$

На основании выражений (12) и (13) находим

$$\left\| \int_0^1 F[\theta, Y(x)X(\theta), \ldots] Z(x)\, dx \right\|^* \leqslant \sqrt{2} k_1 c G(\theta) \| X \|^{*1+q} \left(\sum_{j=1}^{\infty} (\varphi_j^2 + \psi_j^2) \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (14)$$

тогда из выражения (10), учитывая (11) и (14), получаем

$$\| KX(t) \|^* < \sqrt{2} c \left[\sum_{j=1}^{\infty} (\varphi_j^2 + \psi_j^2) \right]^{\frac{1}{2}} \left[1 + kk_1 \int_0^t G(\theta) \| X(\theta) \|^{*1+q} d\theta \right]. \quad (15)$$

Из этого неравенства для всех $t \in [0, T]$, $X(t) \in C_T$ найдем

$$\| KX(t) \|^* < \sqrt{2} c (1 + BR^{1+q}) \left[\sum_{j=1}^{\infty} (\varphi_j^2 + \psi_j^2) \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (16)$$

где $B = kk_1k_2T$; $k_2 = \max\limits_{0 \leqslant \theta \leqslant T} G(\theta)$.

Потребуем выполнения неравенства

$$\left[\sum_{j=1}^{\infty} (\varphi_j^2 + \psi_j^2) \right]^{\frac{1}{2}} < \frac{R}{\sqrt{2} c (1 + BR^{1+q})}. \quad (17)$$

При этом из формулы (16) найдем

$$\| KX(t) \|^* < R. \quad (18)$$

Из выражений (11) видно, что $c > 1$, тогда из (17) следует неравенство

$$\left[\sum_{j=1}^{\infty} (\varphi_j^2 + \psi_j^2) \right]^{\frac{1}{2}} < R. \quad (19)$$

Если, кроме того, для всякого $\varepsilon > 0$ существует целое число $n_\varepsilon > 0$ такое, что

$$\left[\sum_{j=n_\varepsilon}^{\infty} (\varphi_j^2 + \psi_j^2) \right]^{\frac{1}{2}} < \varepsilon\text{[1]}, \quad (20)$$

то на основании выражений (16) и (18) получаем включение $KC_T \subset C_T$. Заметим, что выполнение неравенств (19) и (20) следует из первых двух предположений условия 2).

Рассмотрение пространства $C_\tau (0 \leqslant \tau \leqslant T)$ с нормой

$$\| X \|_\tau = \max_{0 \leqslant t \leqslant \tau} \| X(t) \|^*$$

позволяет установить, что в нем оператор K является оператором сжатия. Действительно, если вектор-функции $X(t)$ и $\tilde{X}(t)$ принадлежат пространству C_τ, то

$$\| KX(t) - K\tilde{X}(t) \|_\tau \leqslant k_0 \tau \| X(t) - \tilde{X}(t) \|_\tau,$$

где $k_0 = 2^{q + \frac{1}{2}} kk_1k_2R^{1+q}$. Таким образом, при $k_0\tau < 1$ оператор K будет сжимающим и, следовательно, уравнение (8) имеет единственное решение $X(t) \in C_\tau$, где $\tau < \frac{1}{k_0}$.

[1] Для фиксированных начальных функций, удовлетворяющих неравенству (19), неравенство (20), очевидно, всегда выполняется; однако здесь имеется в виду множество ФΨ начальных условий, удовлетворяющих неравенствам (19), (20).

Нетрудно показать, что фактически решение существует на всем промежутке $[0, T]$. Для этого, как обычно, снова следует воспользоваться теоремой о неподвижной точке, введя в C_T специальную норму [2] $\|X\|_* = \max\limits_{0 \leqslant t \leqslant T} e^{-k_0 t} \|X(t)\|^*$.

Теперь, чтобы доказать существование и единственность решения исходной задачи (1) в виде (4) для $p \in I$ и $t \in [0, T]$, осталось показать, что ряд (4) можно дифференцировать необходимое число раз по переменным t и x. Для этого из выражения (8), учитывая (13), находим оценки

$$|x_j(t)| \leqslant \left(1 + \frac{b+\mu}{\beta_j}\right)|\varphi_j| + \frac{1+\mu}{\beta_j}|\psi_j|,$$

$$|\dot{x}_j(t)| \leqslant \frac{\omega_j^2 + 2b\beta_j + \mu(b+\beta_j)}{\beta_j}|\varphi_j| + \frac{(b+\beta_j)(1+\mu)}{\beta_j}|\psi_j|,$$

$$|\ddot{x}_j(t)| \leqslant \beta_j^{-1}[(\omega_j^2 + 2b\beta_j)(b+\beta_j) + \mu(\omega_j^2 + (2b+1)\beta_j)]|\varphi_j| +$$
$$+ \beta_j^{-1}\{(b+\beta_j)(\omega_j^2 + 2b\beta_j) + \mu(\omega_j^2 + \beta_j(2b+1))\}|\psi_j|, \qquad (21)$$

где $\mu = \sqrt{2}ck_1k_2TR^{1+q}$.

Учитывая третье из условий 2) на начальные функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, а также оценки (21), заключаем, что ряды

$$\sum_{j=1}^{\infty} x_j(t)\, y_j(x), \quad \sum_{j=1}^{\infty} x_j'(t)\, y_j(x), \quad \sum_{j=1}^{\infty} x_j''(t)\, y_j(x)$$

сходятся регулярно при $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant t \leqslant T$, а значит, и равномерно. Поэтому ряд (4) можно дифференцировать дважды по t.

Аналогично убеждаемся в регулярной сходимости такого ряда:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \omega_j^2 x_j(t)\, y_j(x), \quad x \in [0, 1], \quad t \in [0, T]. \qquad (22)$$

Установим равномерную сходимость рядов, получаемых из ряда (4) при $2n$-кратном дифференцировании по переменной x.

Пусть $G(x, \xi)$ — функция Грина дифференциального оператора, порожденного дифференциальным выражением $L[y(x)]$ и краевыми условиями (2). Тогда

$$x_n(t)\, y_n'(x) = \omega_n^2 \int_0^1 g(\xi) \frac{\partial G}{\partial x} x_n(t)\, y_n(\xi)\, d\xi. \qquad (23)$$

Принимая во внимание равномерную относительно x сходимость ряда (22) в промежутке $[0, 1]$ для всех $t \in [0, T]$, убеждаемся, что ряд

$$g(\xi) \frac{\partial G}{\partial x} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^2 x_n(t)\, y_n(\xi)$$

равномерно сходится в этом же промежутке, откуда с учетом выражения (23) следует также свойство равномерной сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n(t)\, y_n'(x).$$

Используя соответствующие свойства функции $G(x, \xi)$, аналогично можно доказать сходимость рядов, получаемых при $2n$-кратном дифференцировании по аргументу x.

Итак, существование и единственность решения задачи (1) в виде (4) для случая $p \in I$ полностью доказано.

Этот вывод справедлив также тогда, когда $p = p^* + \nu$. Легко убедиться в том, что задача (1) и в этом случае эквивалентна интегральному уравнению вида (8). Если при $p = p^*$ у характеристического определителя соответствующей краевой задачи появляется конечное число кратных корней, то в матрице $S(t, \theta)$ будет появляться конечное число двумерных клеток по главной диагонали; изменятся также соответственно некоторые составляющие вектора $Q(t)$, что приведет лишь к изменению оценок типа (11). Таким образом установлена следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть нелинейная функция F и начальные возмущения $\varphi(x)$, $\psi(x)$ задачи* (1) *удовлетворяют условиям* 1) *и* 2); *параметр нагрузки $p \in I$ или $p = p^* + \nu$. Тогда существует единственное решение $u(x, t) \in U$ $(0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant t \leqslant T)$ этой задачи, представимое в виде* (4), *причем имеет место оценка* (9).

5. Свойства устойчивости (неустойчивости) по первому приближению нулевого решения задачи (1) будем исследовать путем применения прямого метода Ляпунова к эквивалентным задачам для соответствующих счетных систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Рассмотрим случай, когда $p \in I$. Сделав замену

$$\xi_j(t) = e^{\nu t}\left[\frac{b}{\omega_j^2} x_j'(t) + x_j(t)\right], \quad \eta_j(t) = -\frac{\beta_j}{\omega_j^2} e^{\nu t} x_j'(t), \tag{24}$$

где $q\gamma < \gamma^*$, $j = 1, 2, \ldots$, вместо выражений (5), получим

$$\begin{gathered}
\frac{d\xi_j}{dt} = (\gamma - b)\xi_j - \beta_j\eta_j + \frac{be^{\nu t}}{\omega_j^2}\int_0^1 Fz_j(x)\,dx; \\
\frac{d\eta_j}{dt} = \beta_j\xi_j + (\gamma - b)\eta_j - \frac{\beta_j e^{\nu t}}{\omega_j^2}\int_0^1 Fz_j(x)\,dx; \\
\xi_j(0) = \frac{b}{\omega_j^2}\psi_j + \varphi_j,\ \eta_j(0) = -\frac{\beta_j}{\omega_j^2}\psi_j, \qquad j = 1, 2, \ldots,
\end{gathered} \tag{25}$$

причем

$$u(x, t) = e^{-\nu t}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\xi_n + \frac{b}{\beta_n}\eta_n\right) y_n(x). \tag{26}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что из сходимости рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^2$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dot{x}^2$ вытекает сходимость рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \xi_n^2$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \eta_n^2$.

Теперь в качестве функций Ляпунова для системы (25) введем функцию

$$V = V_1 + V_2 = \frac{b}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n^2 + \frac{b}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\eta_n^2.$$

Вычисляя, как обычно, производную этой функции, находим

$$\frac{dV}{dt} = 2(\gamma - b)V + be^{\nu t}\int_0^1 Fw(x, t)\,dx,$$

где

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\omega_n^2}(b\xi_n - \beta_n\eta_n)\,z_n(x). \tag{27}$$

Отсюда имеем неравенство

$$\frac{dV}{dt} \leqslant 2(\gamma - b)V + be^{\nu t}\int_0^1 |F|\,|w(x, t)|\,dx. \tag{28}$$

Поскольку ряд, составленный из суммы квадратов коэффициентов разложения (28), является сходящимся, а система собственных функций $\{z_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ образует в пространстве $L_g^2(0, 1)$ базис Рисса, то функция $w(x, t) \in L_g^2(0, 1)$ при каждом $t \in [0, T]$, и для оценки ее нормы можно применять неравенство (9). Учитывая это, находим последовательно

$$\int_0^1 g(x)\,|\,w(x,\ t)\,|^2\,dx = \|\,w\,\|^2 \leqslant \frac{1}{m}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\omega_n^4}(b\xi_n - \beta_n\eta_n)^2 <$$

$$< \frac{2}{m}\left[\frac{2b}{\omega_1^4}V_1 + \frac{2\beta_1^2}{b\omega_1^4}V_2\right] \leqslant \frac{4}{mb\omega_1^2}V. \qquad (29)$$

Далее, приняв во внимание условие 1) и оценку (29), получим

$$\int_0^1 |\,F\,|\,|\,w(x,\ t)\,|\,dx \leqslant \frac{G(t)}{\min\limits_{0\leqslant x\leqslant 1} g(x)}\|\,u\,\|^{1+q}\|\,w\,\| < \frac{2G(t)\,V^{\frac{1}{2}}\,\|\,u\,\|^{1+q}}{\min\limits_{0\leqslant x\leqslant 1} g(x)\sqrt{mb}\,\omega_1}. \qquad (30)$$

Применяя теперь неравенство (9) к функции (26), находим

$$\|\,u\,\|^2 \leqslant \frac{e^{-2\gamma t}}{m}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\xi_n + \frac{b}{\beta_n}\eta_n\right)^2 \leqslant \frac{2e^{-2\gamma t}}{m}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\xi_n^2 + \frac{b^2}{\beta_n^2}\eta_n^2\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4e^{-2\gamma t}}{mb}\left(V_1 + \frac{b^2}{\beta_1^2}V_2\right) \leqslant \frac{4\omega_1^2}{mb\beta_1}Ve^{-2\gamma t}. \qquad (31)$$

Возвращаясь к неравенству (28), на основании выражений (30), (31) приходим к следующей оценке для производной функции Ляпунова:

$$\frac{dV}{dt} < 2\left(-b + \gamma + AG(t)\,e^{-q\gamma t}V^{\frac{q}{2}}\right)V, \qquad (32)$$

где

$$A = \frac{(mb)^{-\frac{1}{2}}}{\min\limits_{0\leqslant x\leqslant 1} g(x)}\left(\frac{2\omega_1}{mb\beta_1}\right)^{1+q}.$$

Покажем, что из полученных оценок и некоторых свойств функций V и $\frac{dV}{dt}$ вытекает заключение об асимптотической устойчивости нулевого решения рассматриваемой задачи.

Пусть, начиная с некоторого момента времени $t = t_0$, функция $G(t)\,e^{-q\gamma t}$ не возрастает. По заданным произвольным $\varepsilon_1 > 0$ и $\varepsilon_2 > 0$ выбираем область

$$\sum_{n=1}^{\infty}[\xi_n^2(t_0) + \eta_n^2(t_0)] \leqslant \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 \qquad (33)$$

так, чтобы выполнялось неравенство

$$G(t_0)\,e^{-q\gamma t_0}V^{\frac{q}{2}}(t_0) < \eta.$$

Это возможно, поскольку $V(t_0) \leqslant \frac{1}{2}b(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)$. Считая η и γ достаточно малыми, получим

$$-b + \gamma + A\eta < 0. \qquad (34)$$

Тогда из неравенства (32) следует, что

$$\left(\frac{dV}{dt}\right)_{t=t_0} < 0.$$

В силу непрерывности функция $\frac{dV}{dt}$ будет оставаться отрицательной, по меньшей мере, в некоторой достаточно малой окрестности точки t_0, т. е. для $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + h$ причем

$$\left(\frac{dV}{dt}\right)_{t=t_0+h} < 0.$$

Проводя последовательно такие рассуждения, находим

$$\frac{dV}{dt} < 0 \text{ для } t \geqslant t_0.$$

Следовательно, начиная с момента времени $t = t_0$, функция V, убывая, стремится к нулю вдоль решений системы (25). Эти решения, попадая в область (33), в дальнейшем ($t > t_0$) из нее не выходят. Если начальные условия $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют требованиям теоремы 1, то, как следует из нее, в окрестности нулевого решения для конечного интервала $[0, T]$ существует единственное решение уравнений (25.). Выбрав T так, чтобы $0 \leqslant t_0 < T$, установим существование области начальных значений

$$\sum_{n=1}^{\infty} [\xi_n^2(0) + \eta_n^2(0)] < R_1 \tag{35}$$

такой, что любое из указанных решений, выходящих из нее, попадает в область (33).

При $\|\varphi\| < \delta_1$, $\|\psi\| < \delta_2$ в качестве числа R_1, входящего в выражение (35), можно принять $R_1 = 2M\delta_1^2 + M\omega_1^{-2}(2b^2 + \beta_1\omega_1^{-2})\delta_2^2$ и область (35) будет содержаться в (33), если по заданным ε_1 и ε_2 выбрать δ_1 и δ_2 следующим образом:

$$\delta_1 < \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{2M}}, \quad \delta_2 < \frac{\varepsilon_2\omega_1^2}{\sqrt{M(2b\omega_1^2 + \beta_1^2)}}.$$

Возвращаясь теперь к оценке (31), заключаем, что $\|u\| \underset{t\to\infty}{\to} 0$.

Аналогичный вывод получим для $\|u_t'\|$. В самом деле,

$$\|u_t'\|^2 \leqslant \frac{1}{m}\sum_{n=1}^{\infty}\dot{x}_n^2 \leqslant \frac{1}{m}e^{-2\gamma t}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n^2\eta_n^2 + \frac{\omega_1^2 b^2}{\beta_1^2}\sum_{n=1}^{\infty}\eta_n^2\right\} \tag{36}$$

вдоль решений функция $V \underset{t\to\infty}{\to} 0$, поэтому для всех значений n имеем $\eta_n(t) \underset{t\to\infty}{\to} 0$. Поскольку, кроме того, ряды правой части неравенства (36) сходятся равномерно, то $\|u_t'\| \underset{t\to\infty}{\to} 0$.

Таким образом, для рассматриваемой задачи (1) справедлива следующая теорема об устойчивости по первому приближению.

Теорема 2. *Если параметр нагрузки $p \in I$ и выполняются условия 1) и 2) на нелинейную часть F и начальные возмущения, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ соответственно, то нулевое решение задачи (1) устойчиво асимптотически.*

6. Рассмотрим случай, когда $p = p^* + \nu$. Задача (1) сводится при этом к задаче (5), причем первые два уравнения (5) необходимо заменить уравнениями (7). Сделав замену

$$\xi_1 = \alpha\beta x_{11} - \beta^2\alpha^{-1}x_{12} - \beta\alpha^{-1}(\alpha_1 - b)x_{11}' - \beta\beta_1\alpha^{-1}x_{12}';$$

$$\eta_1 = -\beta^2\alpha^{-1}x_{11} - \alpha\beta x_{12} - \beta\beta_1\alpha^{-1}x_{11}' + \beta\alpha^{-1}(\alpha_1 - b)x_{12}';$$

$$\xi_2 = \alpha\beta x_{11} - \beta^2\alpha^{-1}x_{12} + \beta\alpha^{-1}(\alpha_1 + b)x_{11}' + \beta\beta_1\alpha^{-1}x_{12}';$$

$$\eta_2 = -\beta^2\alpha^{-1}x_{11} - \alpha\beta x_{12} + \beta\beta_1\alpha^{-1}x_{11}' - \beta\alpha^{-1}(\alpha_1 + \beta)x_{12}';$$

$$\xi_j = x_j + \frac{b}{\omega_j^2}x_j', \ \eta_j = -\frac{\beta_j}{\omega_j^2}x_j', \ \ j = 3, 4, \ldots, \ \ \alpha_1 + i\beta_1 =$$

$$= \sqrt{b^2 - \alpha^2 - i\beta}, \ \ \beta \neq 0$$

и выбрав функцию Ляпунова в виде *

$$V=\frac{1}{2}\left[-(\alpha_1-b)(\xi_1^2+\eta_1^2)+(\alpha_1+b)(\xi_2^2+\eta_2^2)+b\sum_{n=3}^{\infty}(\xi_n^2+\eta_n^2)\right],$$

аналогично, как в п. 5, находим оценку

$$\frac{dV}{dt}<-z(\xi_1^2,\ \eta_1^2,\ \ldots,\ \xi_n^2,\ \eta_n^2,\ \ldots)+C\left[\sum_{n=1}^{\infty}(\xi_n^2+\eta_n^2)\right]^{1+\frac{q}{2}}, \tag{37}$$

где

$$C=\max_{0\leqslant t<\infty}G(t)\,A^{1+\frac{q}{2}}B^{\frac{1}{2}}[m^{1+q}\min_{0\leqslant x\leqslant 1}g(x)]^{-1};$$

A, B — некоторые постоянные; $z>0$ — квадратичная форма.

По заданным ε_1 и ε_2 выбираем область (33) так, чтобы знак правой части выражения (37) определялся в ней выражением $-z$. В этой области $\frac{dV}{dt}$ — отрицательно определенная. Выбирая T так, чтобы $0\leqslant t_0<T$, как и в предыдущем случае, убеждаемся в существовании области такой, что выходящее из нее решение соответствующей системы попадает в область (33). Так как при достаточно малом ν числа α_1+b, $-(\alpha_1-b)$ имеют противоположные знаки, то функция V в области (33) может принимать отрицательные значения. Следовательно, имеет место теорема.

Теорема 3. *Если параметр нагрузки $p=p^*+\nu$, выполняются условия 1) — 2) и в случае а) $2b<\beta\alpha^{-1}$, то нулевое решение задачи (1) неустойчиво.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Кесельман Г. М.— Изв. вузов СССР. Математика, 1964, 2..
2. Красносельский М. А. и др. Приближенное решение операторных уравнений. «Наука», М., 1969.
3. Михайлов В. П.— ДАН СССР, 1962, 144, 5.
4. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. «Наука», М., 1969.
5. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. 4. Физматгиз, М., 1958.

Львовский филиал
математической физики
Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию
в ноябре 1973 г.

ТЕМПЕРАТУРНЫЕ ПОЛЯ В ПЛАСТИНКАХ СО СТЕРЖНЕВЫМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ

М. М. Семерак

Важное практическое значение имеет решение задач теплопроводности, связанных с изучением температурных полей в пластинках и оболочках, содержащих стержневые включения. В частности, для изучения термопрочности стеклянных элементов электроннолучевых приборов в окрестности стержневых коваровых включений, подвергаемых тепловым воздействиям внешней среды, необходимо предварительное определение температурного поля. Приближенное решение таких задач можно получить, заменяя стержневые включения граничными условиями, в которые входят теплофизические характеристики включений. С помощью операторного метода и операционного исчисления сформулируем такие граничные условия для пластин, содержащих стержневые включения, выходящие части которых значительно превышают толщину пластин или соизмеримы с ней.

* Если $\beta=0$, то следует пользоваться заменой (24), учитывая, что $\omega_1^2=0$, $\gamma=0$. Дальнейшие рассуждения остаются аналогичными случаю $\beta\neq 0$.