

и выбрав функцию Ляпунова в виде \*

$$V = \frac{1}{2} \left[ -(\alpha_1 - b) (\xi_1^2 + \eta_1^2) + (\alpha_1 + b) (\xi_2^2 + \eta_2^2) + b \sum_{n=3}^{\infty} (\xi_n^2 + \eta_n^2) \right],$$

аналогично, как в п. 5, находим оценку

$$\frac{dV}{dt} < -z (\xi_1^2, \eta_1^2, \dots, \xi_n^2, \eta_n^2, \dots) + C \left[ \sum_{n=1}^{\infty} (\xi_n^2 + \eta_n^2) \right]^{1 + \frac{q}{2}}, \quad (37)$$

где

$$C = \max_{0 \leq t < \infty} G(t) A^{1 + \frac{q}{2}} B^2 [m^{1+q} \min_{0 \leq x \leq 1} g(x)]^{-1};$$

$A, B$  — некоторые постоянные;  $z > 0$  — квадратичная форма.

По заданным  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  выбираем область (33) так, чтобы знак правой части выражения (37) определялся в ней выражением  $-z$ . В этой области  $\frac{dV}{dt}$  — отрицательно определенная. Выбирая  $T$  так, чтобы  $0 \leq t_0 < T$ , как и в предыдущем случае, убеждаемся в существовании области такой, что выходящее из нее решение соответствующей системы попадает в область (33). Так как при достаточно малом  $\nu$  числа  $\alpha_1 + b$ ,  $-(\alpha_1 - b)$  имеют противоположные знаки, то функция  $V$  в области (33) может принимать отрицательные значения. Следовательно, имеет место теорема.

**Теорема 3.** Если параметр нагрузки  $p = p^* + \nu$ , выполняются условия 1) — 2) и в случае а)  $2b < \beta\alpha^{-1}$ , то нулевое решение задачи (1) неустойчиво.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Кесельман Г. М. — Изв. вузов СССР. Математика, 1964, 2.
2. Красносельский М. А. и др. Приближенное решение операторных уравнений. «Наука», М., 1969.
3. Михайлов В. П. — ДАН СССР, 1962, 144, 5.
4. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. «Наука», М., 1969.
5. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. 4. Физматгиз, М., 1958.

Львовский филиал  
математической физики  
Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию  
в ноябре 1973 г.

## ТЕМПЕРАТУРНЫЕ ПОЛЯ В ПЛАСТИНКАХ СО СТЕРЖНЕВЫМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ

**М. М. Семерак**

Важное практическое значение имеет решение задач теплопроводности, связанных с изучением температурных полей в пластинках и оболочках, содержащих стержневые включения. В частности, для изучения термостойкости стеклянных элементов электроннолучевых приборов в окрестности стержневых коваровых включений, подвергаемых тепловым воздействиям внешней среды, необходимо предварительное определение температурного поля. Приближенное решение таких задач можно получить, заменяя стержневые включения граничными условиями, в которые входят теплофизические характеристики включений. С помощью операторного метода и операционного исчисления сформулируем такие граничные условия для пластин, содержащих стержневые включения, выходящие части которых значительно превышают толщину пластин или соизмеримы с ней.

\* Если  $\beta = 0$ , то следует пользоваться заменой (24), учитывая, что  $\omega_1^2 = 0$ ,  $\gamma = 0$ . Дальнейшие рассуждения остаются аналогичными случаю  $\beta \neq 0$ .

**Вывод уравнений теплопроводности для стержней.** Рассмотрим цилиндр радиуса  $R$  и длины  $2L$ , через поверхности  $r = R, z = \pm L$  которого осуществляется теплообмен с внешней средой температуры  $t_c, t_c^\pm$  соответственно. Уравнение теплопроводности для определения нестационарного температурного поля в цилиндре имеет вид [3]

$$\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial t}{\partial r} + p^2 t = 0. \quad (1)$$

Краевые условия запишутся так:

$$\lambda \frac{\partial t}{\partial r} + \alpha_R (t - t_c) = 0 \text{ при } r = R, \quad (2)$$

$$\lambda \frac{\partial t}{\partial z} \pm \alpha_{\pm L} (t - t_c^\pm) = 0 \text{ при } z = \pm L, \quad (3)$$

$$t = t_0 \quad \text{при } \tau = 0. \quad (4)$$

Здесь  $p^2 = \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{c}{\lambda} \cdot \frac{\partial}{\partial \tau}$ ;  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности;  $c$  — объемная теплоемкость;  $\tau$  — время;  $\alpha_R, \alpha_{\pm L}$  — коэффициенты теплоотдачи с поверхностей  $r = R, z = \pm L$ .

Решение уравнения (1) с учетом ограниченности температуры в цилиндре имеет вид

$$t = J_0(pr) t_{|r=0}, \quad (5)$$

где  $J_\nu(\xi)$  — функция Бесселя первого рода.

Введем в рассмотрение интегральную характеристику температуры

$$T = \frac{2}{R^2} \int_0^R \zeta t(\zeta) d\zeta. \quad (6)$$

Решение (5) через эту интегральную характеристику нетрудно записать в виде

$$t = \frac{pR}{2} \cdot \frac{J_0(pr)}{J_1(pR)} T. \quad (7)$$

Подставляя это выражение в (2), получим следующее уравнение бесконечно высокого порядка:

$$pR \left[ \lambda p - \alpha_R \frac{J_0(pR)}{J_1(pR)} \right] T + 2\alpha_R t_c = 0. \quad (8)$$

Введем в рассмотрение приведенную теплопроводность  $\Lambda = \lambda F$ , приведенную теплоемкость  $C = cF$ ,  $r_R = \frac{1}{2\pi R \alpha_R}$  — сопротивление теплообмену поверхности  $r = R$ , где  $F = \pi R^2$ . Разложив операторы  $J_0(pR) [J_1(pR)]^{-1}$  в ряд, перейдем в уравнении (8) к пределу при  $R \rightarrow 0$ , сохранив при этом постоянными  $\Lambda, C, r_R$ . В результате приходим к следующему уравнению теплопроводности для стержней:

$$\Lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{T - t_c}{r_R} + C \frac{\partial T}{\partial \tau}. \quad (9)$$

Это уравнение, как видим, характеризуется приведенной теплопроводностью  $\Lambda$ , теплоемкостью  $C$  и сопротивлением теплообмену  $r_R$  всей поверхности стержня. Поэтому оно применимо для стержней любого поперечного сечения. Если в соотношении (8) при разложении в ряд оператора  $J_0(pR) [J_1(pR)]^{-1}$  ограничиться вторым членом разложения, то получим такое уравнение теплопроводности для стержней:

$$\Lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{T - t_c}{r_R^*} + C \cdot \frac{\partial T}{\partial \tau}, \quad (10)$$

где

$$r_R^* = r_R \left( 1 + \frac{\text{Bi}_R}{8} \right), \quad \text{Bi}_R = 2 \frac{\alpha_R R}{\lambda}.$$

Граничные условия (3) на поверхности  $z = \pm L$  и начальные условия (4) после интегрирования в соответствии с  $T$  запишутся в виде

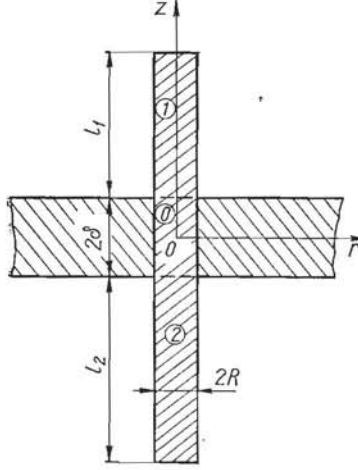
$$\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \pm \alpha_{\pm L} (T - T_c^{\pm}) = 0 \quad \text{при } z = \pm L, \quad (11)$$

$$T = T_0 \quad \text{при } \tau = 0. \quad (12)$$

Переходя к пределу при  $R \rightarrow 0$  в соотношении (7), получим

$$t = T. \quad (13)$$

Нетрудно убедиться, что если температура по площади поперечного сечения изменяется по закону (13), то уравнение теплопроводности имеет вид (9). В самом деле, интегрируя уравнение (1) в соответствии с выражением (6) и учитывая условия (4) и (2), приходим к уравнению (9).



Условия теплообмена для пластин с короткими стержневыми включениями. Рассмотрим пластинку, в которую впаян стержень радиуса  $R$  (рисунок). Части стержня  $r = R$ ,  $z > \delta$ ,  $z < -\delta$  испытывают теплообмен с внешней средой температуры  $t_c^+$  и  $t_c^-$  соответственно по закону Ньютона. Поверхность стержня  $z = l_1 + \delta$  поддерживается при температуре  $t_c^+$ , а поверхности  $z = -l_2 - \delta$  стержня и  $z = -\delta$ ,  $r > R$  пластинки теплоизолированы. Через поверхность  $z = \delta$ ,  $r > R$  пластинки осуществляется теплообмен с внешней средой температуры  $t_c^+$  по закону Ньютона.

Для определения температуры в частях «1» и «2» (см. рисунок), согласно (9), имеем уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial^2 t_1}{\partial z^2} + p_1^2 t_1 = -\beta_0^{(1)} t_c^+, \quad \frac{\partial^2 t_2}{\partial z^2} + p_2^2 t_2 = -\beta_0^{(2)} t_c^- \quad (14)$$

и граничные условия

$$\left. \begin{aligned} t_1 = t_c^+ \quad \text{при } z = l_1 + \delta, \quad t_1 = t_0 \quad \text{при } z = \delta, \\ \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = 0 \quad \text{при } z = -l_2 - \delta, \quad t_2 = t_0 \quad \text{при } z = -\delta, \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

где [2]

$$t_0 = T_0 + \frac{z}{\delta} T_0^*, \quad T_0 = \frac{1}{2\delta} \int_{-\delta}^{\delta} t_0 dz, \quad T_0^* = \frac{3}{2\delta^2} \int_{-\delta}^{\delta} z t_0 dz, \quad (16)$$

$p_i^2 = -\beta_0^{(i)} - \frac{1}{a_0} \frac{\partial}{\partial \tau}$ ,  $\beta_0^{(i)} = \frac{2\alpha_0^{(i)}}{\lambda_0 R}$ ,  $\alpha_0^{(1)}$ ,  $\alpha_0^{(2)}$  — коэффициенты теплоотдачи с поверхностей стержня  $r = R$ ,  $z > \delta$ ,  $z < -\delta$ ;  $\lambda_0$  — коэффициент теплопроводности стержня;  $t_0$  — температура части стержня «0», равная температуре  $t$  пластинки при  $r = R$ .

Решения уравнений (14) при граничных условиях (15) имеют соответственно вид

$$\left. \begin{aligned} t_1 = \frac{\sin p_1 z - \cos p_1 z \operatorname{tg} p_1 (l_1 + \delta)}{\sin p_1 \delta - \cos p_1 \delta \operatorname{tg} p_1 (l_1 + \delta)} \left[ T_0 + T_0^* + \frac{\beta_0^{(1)}}{p_1^2} t_c^+ - \frac{\cos p_1 \delta}{\cos p_1 (l_1 + \delta)} \times \right. \\ \left. \times \left( 1 + \frac{\beta_0^{(1)}}{p_1^2} \right) t_c^+ \right] + \frac{\cos p_1 z}{\cos p_1 (l_1 + \delta)} \left( 1 + \frac{\beta_0^{(1)}}{p_1^2} \right) t_c^+ + \frac{\beta_0^{(1)}}{p_1^2} t_c^+, \\ t_2 = \frac{\cos p_2 z \operatorname{ctg} p_2 (l_2 + \delta) - \sin p_2 z}{\cos p_2 \delta \operatorname{ctg} p_2 (l_2 + \delta) + \sin p_2 z} \left[ T_0 - T_0^* + \frac{\beta_0^{(2)}}{p_2^2} t_c^- \right] - \frac{\beta_0^{(2)}}{p_2^2} t_c^-. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Поскольку рассматривается тонкий стержень, средняя температура по его сечению в части  $|z| \ll \delta$  является постоянной и равной температуре поверхности  $r = R$  пластинки. Поэтому граничные условия на поверхности  $r = R$ ,  $|z| \ll \delta$  стержня, согласно [1], имеют такой вид:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial z^2} + \frac{2\lambda}{\lambda_0 R} \cdot \frac{\partial t}{\partial r} = \frac{1}{a_0} \cdot \frac{\partial t}{\partial \tau} \quad \text{при } r = R, \quad (18)$$

где  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности пластинки.

Интегрируя уравнение (18) в соответствии с выражениями (16) для  $T$  и  $T^*$  и используя соотношения

$$\frac{\partial t}{\partial z} = \frac{\partial t_1}{\partial z} \quad \text{при } z = \delta, \quad \frac{\partial t}{\partial z} = \frac{\partial t_2}{\partial z} \quad \text{при } z = -\delta, \quad (19)$$

находим следующие граничные условия на поверхности  $r = R$  для определения интегральных характеристик температуры пластинки:

$$\left. \begin{aligned} 2\lambda \frac{\partial T}{\partial r} &= \frac{\lambda_0 R}{2\delta} \left\{ p_1 \operatorname{ctg} p_1 l_1 \left[ T + T^* - \frac{\cos p_1 \delta}{\cos p_1 (l_1 + \delta)} \left( 1 + \frac{\beta_0^{(1)}}{p_1^2} \right) t_c^+ + \right. \right. \\ &+ \left. \frac{\beta_0^{(1)}}{p_1^2} t_c^+ \right] + p_1 \frac{\sin p_1 \delta}{\cos p_1 (l_1 + \delta)} \left( 1 + \frac{\beta_0^{(1)}}{p_1^2} \right) t_c^+ - p_2 \operatorname{tg} p_2 l_2 \left[ T - T^* + \right. \\ &+ \left. \frac{\beta_0^{(2)}}{p_2^2} t_c^- \right] \left. \right\} + R c_0 \frac{\partial T}{\partial \tau}, \\ 2\lambda \frac{\partial T^*}{\partial r} &= \frac{3\lambda_0 R}{2\delta^2} \left\{ p_1 \delta \operatorname{ctg} p_1 l_1 \left[ T + T^* - \frac{\cos p_1 \delta}{\cos p_1 (l_1 + \delta)} \left( 1 + \frac{\beta_0^{(1)}}{p_1^2} \right) \times \right. \right. \\ &\times \left. t_c^+ \right] + p_1 \delta \frac{\sin p_1 \delta}{\cos p_1 (l_1 + \delta)} \left( 1 + \frac{\beta_0^{(1)}}{p_1^2} \right) t_c^+ + p_2 \delta \operatorname{tg} p_2 l_2 \times \\ &\times \left[ T - T^* + \frac{\beta_0^{(2)}}{p_2^2} t_c^- \right] + 2T^* \left. \right\} + R c_0 \frac{\partial T^*}{\partial \tau}. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Введем в рассмотрение приведенную теплопроводность поверхности контакта  $\Lambda = S\lambda$ ;  $R_0 = \frac{\delta}{\lambda_0 S_0}$ ,  $R_1 = \frac{l_1}{\lambda_0 S_0}$  — приведенное внутреннее термосопротивление частей «0» и «1» стержня;  $C_0 = c_0 \delta S_0$ ,  $C_1 = c_0 l_1 S_0$ ,  $C_2 = c_0 l_2 S_0$  — приведенные теплоемкости частей «0», «1» и «2» стержня;  $A_1 = S_1 l_1 \alpha_0^{(1)}$ ,  $A_2 = S_1 l_2 \alpha_0^{(2)}$  — приведенные теплоотдачи поверхностей части «1» и «2» стержня, где  $S_0 = \pi R^2$ ,  $S = 4\pi R\delta$ ,  $S_1 = 2\pi R$ .

Предполагая, что части стержня «1» и «2», контактирующие со средой, соизмеримы с радиусом включения  $R$  и полутолщиной  $\delta$ , перейдем в условиях (20) к пределу при  $R \rightarrow 0$ , сохранив при этом  $\Lambda$ ,  $R_0$ ,  $R_1$ ,  $C_0$ ,  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $A_1$ ,  $A_2$  постоянными. В результате на крае  $r = R$  получим искомые условия теплообмена для определения температурных характеристик в пластинке со стержневым включением, контактирующие части со средой которого соизмеримы с радиусом включения, в виде

$$\left. \begin{aligned} \Lambda \frac{\partial T}{\partial r} &= \left( \frac{A_1 + 3A_2}{3} + \frac{1}{R_1} + \frac{C_1 + 3(C_0 + C_2)}{3} \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} \right) T + \frac{A_1 - 3A_2}{3} + \\ &+ \frac{1}{R_1} + \frac{C_1 - 3C_2}{3} \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} \left. \right\} T^* - \\ &- \left( \frac{A_1}{3} + \frac{1}{R_1} + \frac{C_1 + 3C_2}{3} \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} \right) t_c^+ - A_2 t_c^-, \end{aligned} \right\}$$

$$\Lambda \frac{\partial T^*}{\partial r} = 3 \left( \frac{A_1 - 3A_2}{3} + \frac{1}{R_1} + \frac{C_1 - 3C_2}{3} \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} \right) T + \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} (21)$$

$$+ 3 \left( \frac{A_1 + 3A_2}{3} + \frac{1}{R_1} + \frac{2}{R_0} + \frac{C_0 + C_1 + 3C_2}{3} \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} \right) T^* -$$

$$- 3 \left( \frac{A_1}{3} + \frac{1}{R_1} + \frac{C_1 + 3C_2}{3} \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} \right) t_c^+ + 3A_2 t_c^-.$$

Эти условия, как видим, характеризуются приведенной теплопроводностью поверхности контакта  $\Lambda$ , приведенным внутренним термосопротивлением  $R_0, R_1$  частей «0» и «1» стержня, приведенной теплоемкостью  $C_0, C_1, C_2$  частей «0», «1» и «2» и приведенной теплоотдачей  $A_1, A_2$  поверхности частей «1» и «2» стержня. Поэтому они применимы для нахождения интегральных температурных характеристик пластинки с тонкими включениями любой конфигурации поперечного сечения.

**Условия теплообмена для пластин с длинными стержневыми включениями.** Рассмотрим пластинку, в которую впаян стержень радиуса  $R$  (см. рисунок). Части «1» и «2» стержня, испытывающие теплообмен с внешней средой, температуры  $t_c(\tau)$  и нулевой соответственно, могут быть произвольной длины. Поверхности стержня  $z = l_1 + \delta$  и  $z = -l_2 - \delta$  теплоизолированы. Через поверхность  $z = \delta, r > R$  пластинки осуществляется теплообмен с внешней средой температуры  $t_c(\tau)$  по закону Ньютона. Поверхность  $z = -\delta, r > R$  пластинки теплоизолирована. В этом случае для определения температуры в частях «1» и «2» стержня, согласно (9), имеем уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial^2 t_1}{\partial z^2} - \beta_0^{(1)} (t_1 - t_c) = \frac{1}{a_0} \cdot \frac{\partial t_1}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial^2 t_2}{\partial z^2} - \beta_0^{(2)} t_2 = \frac{1}{a_0} \cdot \frac{\partial t_2}{\partial \tau} \quad (22)$$

и краевые условия

$$t_1|_{z=\delta} = T + T^*, \quad t_2|_{z=-\delta} = T - T^*, \quad \frac{\partial t_1}{\partial z}|_{z=l_1+\delta} = 0,$$

$$\frac{\partial t_2}{\partial z}|_{z=-l_2-\delta} = 0, \quad (23)$$

$$t_1 = 0, \quad t_2 = 0 \quad \text{при } \tau = 0, \quad (24)$$

где  $a_0$  — коэффициент температуропроводности;  $T$  и  $T^*$  определяются соотношениями (16).

Воспользовавшись преобразованием Лапласа по времени  $\tau$ , учитывая при этом краевые условия (23), (24), решения уравнений (22) находим в виде

$$\left. \begin{array}{l} \bar{T} + \bar{T}^* - \frac{\beta_0^{(1)}}{\gamma_1^2} \bar{t}_c \\ \bar{t}_1 = \frac{\gamma_1^2}{1 + e^{-2l_1\gamma_1}} (e^{-z\gamma_1} + e^{-2(l_1+\delta)\gamma_1 + z\gamma_1}) e^{\delta\gamma_1} + \frac{\beta_0^{(1)}}{\gamma_1^2} \bar{t}_c, \\ \bar{t}_2 = \frac{\bar{T} - \bar{T}^*}{1 + e^{2l_2\gamma_2}} (e^{-z\gamma_2} + e^{2(l_2+\delta)\gamma_2 + z\gamma_2}) e^{-\delta\gamma_2}, \end{array} \right\} (25)$$

где

$$\gamma_i = \sqrt{\beta_0^{(i)} + \frac{s}{a_0}}.$$

Применим преобразование Лапласа к соотношениям (16), (18) и (19). Проинтегрируем преобразованное условие (18) в соответствии с  $\bar{T}$  и  $\bar{T}^*$ , учи-

тывая соотношения (25) и преобразованные условия (19). В результате нахо-

$$\left. \begin{aligned} \frac{2\lambda}{\lambda_0 R} \cdot \frac{\partial \bar{T}}{\partial r} &= -\frac{1}{2\delta} \left[ m_1^* \left( \bar{T} + \bar{T}^* - \frac{\beta_0^{(1)}}{\gamma_1^2} \bar{t}_c \right) + m_2^* (\bar{T} - \bar{T}^*) \right] + \frac{s}{a_0} \bar{T}, \\ \frac{2\lambda}{\lambda_0 R} \cdot \frac{\partial \bar{T}^*}{\partial r} &= -\frac{3}{2\delta^2} \left[ m_1^* \left( \bar{T} + \bar{T}^* - \frac{\beta_0^{(1)}}{\gamma_1^2} \bar{t}_c \right) - \right. \\ &\left. - m_2^* (\bar{T} - \bar{T}^*) - 2 \frac{\bar{T}^*}{\delta} \right] + \frac{s}{a} \bar{T}^* \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

при  $r = R$ ,

где

$$m_i^* = \frac{1 - e^{2l_i \gamma_i}}{1 + e^{2l_i \gamma_i}} \gamma_i, \quad i = 1, 2.$$

При стационарном тепловом режиме получаем

$$\left. \begin{aligned} 2\lambda \frac{dT}{dr} &= -\lambda_0 [m_1 (T + T^* - t_c) + m_2 (T - T^*)], \\ 2\lambda \frac{dT^*}{dr} &= -3\lambda_0 m_1 (T + T^* - t_c) - m_2 (T - T^*) - 2R_1 T^* \end{aligned} \right\} \quad \text{при } r = R, \quad (27)$$

где

$$m_i = \frac{1 - e^{2L_i \sqrt{\text{Bi}_0^{(i)}}}}{1 + e^{2L_i \sqrt{\text{Bi}_0^{(i)}}}} \sqrt{\text{Bi}_0^{(i)}}, \quad R_1 = \frac{R}{\delta}, \quad \text{Bi}_0^{(i)} = 2 \frac{\alpha_0^{(i)} R}{\lambda_0}, \quad L_i = \frac{l_i}{R},$$

$i = 1, 2.$

В случае, если поверхности стержня  $z < -\delta$ ,  $r = R$  теплоизолирована,  $z = -l_2 - \delta$  имеет нулевую температуру, а  $z = l_1 + \delta$  поддерживается при температуре  $t_c$ , аналогично при стационарном тепловом режиме получаем граничные условия теплообмена на стыке пластинки и стержня

$$\left. \begin{aligned} 2\lambda \frac{dT}{dr} &= \lambda_0 \left[ \frac{T - T^*}{L_2} - m (T + T^* - t_c) \right], \\ \Lambda \frac{d}{dr} (3T - T^*) &= 3\lambda_0 \left( \frac{T - T^*}{L_2} - R_1 T^* \right), \end{aligned} \right\} \quad \text{при } r = R, \quad (28)$$

где

$$m = \frac{1 + e^{2L_1 \sqrt{\text{Bi}_0^{(1)}}}}{1 - e^{2L_1 \sqrt{\text{Bi}_0^{(1)}}}} \sqrt{\text{Bi}_0^{(1)}}, \quad \Lambda = 2\delta\lambda.$$

Сформулированные граничные условия дают возможность определять температурные поля в пластинках со стержневыми включениями, выходящие части которых значительно превышают толщину пластинки или соизмеримы с ней.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Подстригач Я. С., Воробец Б. С., Чернуха Ю. А.— Прикладная механика, 1973, 4.
2. Подстригач Я. С., Коляно Ю. М. Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках. «Наукова думка», К., 1972.
3. Лыков А. В. Теория теплопроводности. «Высшая школа», М., 1967.

Львовский филиал математической  
физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию  
в декабре 1973 г.