ЗАДАЧА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ ОБЛУЧАЕМЫХ МНОГОСЛОЙНЫХ ОБОЛОЧЕК

Ю. А. Чернуха

Известные в литературе уравнения, описывающие процесс теплопроводности в многослойных оболочках (пластинках), относятся к случаям, когда условия теплообмена с окружающей оболочку средой линейны [1, 2, 4]. В настоящее время конструкции в виде многослойных оболочек все чаще применяются в условиях, при которых преобладающим является теплообмен излучением. В данной работе выводятся уравнения теплопроводности и формулируются соответствующие краевые условия для многослойных оболочек, теплообмен которых с окружающей средой описывается законом Стефана — Больцмана; материал каждого из слоев считается ортотропным.

1. Рассмотрим n-слойную оболочку, слои которой выполнены из различных ортотропных материалов, отнесенную к триортогональной системе координатных линий (α, β, γ), являющихся соответственно линиями главных кривизн срединной поверхности и внешней нормалью к ней. Пусть t_i — температура i-го слоя, A_i, B_i — коэффициенты Ляме срединной поверхности, k_{1i}, k_{2i} — кривизны координатных линий, $2h_i$ — толщина, λ_i^α, λ_i^β, λ_i^γ и c_i — коэффициенты теплопроводности и теплоемкость, w_i — плотность тепловых источников, τ — время.

Уравнение теплопроводности при нестационарном нагреве [4] для каждого тонкого слоя примем в виде

$$\lambda_i^\gamma \frac{\partial^2 t_i}{\partial \gamma_i^2} + 2\lambda_i^\gamma k_i \frac{\partial t_i}{\partial \gamma_i} + \nabla_i^2 t_i - c_i \frac{\partial t_i}{\partial \tau} + w_i = 0; \tag{1}$$

$$\nabla_i^2 = \frac{1}{A_i B_i}\left[\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\lambda_i^\alpha \frac{B_i}{A_i}\frac{\partial}{\partial \alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\lambda_i^\beta \frac{A_i}{B_i}\frac{\partial}{\partial \beta}\right)\right], \quad 2k_i = k_{1i} + k_{2i}.$$

Будем считать, что между слоями оболочки осуществляется идеальный тепловой контакт, а теплообмен с окружающей средой происходит по закону Стефана — Больцмана. При этом будем учитывать также конвективную составляющую теплообмена.

Если координату γ_i (в направлении нормали) отсчитывать для каждого слоя от его срединной поверхности, то граничные условия на внешних поверхностях оболочки и условия контакта между слоями запишутся следующим образом:

$$\begin{gathered}\left\{\lambda_1^\gamma \frac{\partial t_1}{\partial \gamma_1} + \varepsilon_1^{(c)}(t_1 - t_1^{(c)}) + \varkappa_1^{(c)}[t_1^4 - (t_1^{(c)})^4]\right\}_{\gamma_1 = h_1} = 0,\\ \left\{\lambda_n^\gamma \frac{\partial t_n}{\partial \gamma_n} - \varepsilon_n^{(c)}(t_n - t_n^{(c)}) - \varkappa_n^{(c)}[t_n^4 - (t_n^{(c)})^4]\right\}_{\gamma_n = -h_n} = 0;\end{gathered} \tag{2}$$

$$\begin{gathered} L_i t_i + \varepsilon_i^{(s)}(t_i - t_i^{(s)}) + \varkappa_i^{(s)}[t_i^4 - (t_i^{(s)})^4]|_S = 0,\\ L_i = n_1 \frac{\lambda_i^\alpha}{A_i}\cdot\frac{\partial}{\partial \alpha} + n_2 \frac{\lambda_i^\beta}{B_i}\frac{\partial}{\partial \beta} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n);\end{gathered} \tag{3}$$

$$\begin{gathered}\left[\lambda_i^\gamma \frac{\partial t_i}{\partial \gamma_i}\right]_{\gamma_i = -h_i} = \left[\lambda_{i+1}^\gamma \frac{\partial t_{i+1}}{\partial \gamma_{i+1}}\right]_{\gamma_{i+1} = h_{i+1}},\\ t_i(-h_i) = t_{i+1}(h_{i+1}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1).\end{gathered} \tag{4}$$

Пусть известно также начальное распределение температуры

$$t_i|_{\tau=0} = t_{0i}(\alpha, \beta, \gamma). \tag{5}$$

В соотношениях (2) — (5) обозначено: n_1, n_2 — компоненты вектора внешней нормали к торцовой поверхности S; $t^{(s)}$ и $t_1^{(c)}$, $t_2^{(c)}$ — температуры сред, омывающих поверхности оболочки S и $\gamma_1 = h_1$, $\gamma_n = -h_n$; $\varepsilon^{(s)}$, $\varepsilon_1^{(c)}$, $\varepsilon_n^{(c)}$ —

коэффициенты теплоотдачи с этих поверхностей; $\varkappa_i = \sigma E_i$, σ — постоянная Стефана — Больцмана; E_i — относительная излучательная способность поверхности.

Введем в рассмотрение следующие усредненные по толщине каждого слоя характеристики температурного поля:

$$T_i = \frac{1}{2h_i}\int_{-h_i}^{h_i} t_i d\gamma_i; \quad \theta_i = \frac{3}{2h_i^2}\int_{-h_i}^{h_i} t_i\gamma_i d\gamma_i. \tag{6}$$

Обозначив

$$h_i z_i = \gamma_i; \quad p_{*i}^2 = (\lambda_i^\gamma)^{-1}\left(\nabla_i^2 - c_i\frac{\partial}{\partial\tau}\right);$$

$$h_i^{-1}\eta_i = -k_i + (k_i^2 - p_{*i}^2)^{1/2}, \quad h_i^{-1}\zeta_i = -k_i - (k_i^2 - p_{*i}^2)^{1/2}, \tag{7}$$

решение уравнения (1) в соответствии с операторным методом [5] находим в виде

$$t_i = D_i \exp(\eta_i z_i) + G_i \exp(\zeta_i z_i) + t_{*i}, \tag{8}$$

где D_i, G_i — подлежащие определению функции координат α, β, τ; t_{*i} — частное решение уравнения (1), т. е.

$$t_{*i} = (2\lambda_i^\gamma)^{-1}(\eta_i - \zeta_i)^{-1}h_i^2\left\{\int_{z_i}^{1}[\exp(\eta_i z_i - \eta_i x) - \exp(\zeta_i z_i - \zeta_i x)]\, w_i dx -\right.$$

$$\left. - \int_{-1}^{z_i}[\exp(\eta_i z_i - \eta_i x) - \exp(\zeta_i z_i - \zeta_i x)]\, w_i dx\right\}. \tag{9}$$

Подставив в соотношения (6) выражение (8), после интегрирования получим

$$\varphi(\eta_i) D_i + \varphi(\zeta_i) G_i = 2(T_i - T_{*i}); \quad \psi(\eta_i) D_i + \psi(\zeta_i) G_i = \frac{2}{3}(\theta_i - \theta_{*i});$$

$$x\varphi(x) = \exp x - \exp(-x); \quad x\psi(x) = \exp x + \exp(-x) - \varphi(x); \tag{10}$$

$$T_{*i} = \frac{1}{2h_i}\int_{-h_i}^{h_i} t_{*i} d\gamma_i = \frac{h_i^2}{4\lambda_i^\gamma(\eta_i - \zeta_i)}\int_{-1}^{1}\{2(\zeta_i^{-1} - \eta_i^{-1}) + \eta_i^{-1}[\exp(\eta_i - \eta_i z_i) +$$

$$+ \exp(-\eta_i - \eta_i z_i)] - \zeta_i^{-1}[\exp(\zeta_i - \zeta_i z_i) + \exp(-\zeta_i - \zeta_i z_i)]\}\, w_i dz_i; \tag{11}$$

$$\theta_{*i} = \frac{3}{2h_i^2}\int_{-h_i}^{h_i} t_{*i}\gamma_i d\gamma_i = \frac{3h_i^2}{4\lambda_i^\gamma(\eta_i - \zeta_i)}\int_{-1}^{1}\{2[(\eta_i^{-1} - \zeta_i^{-1})z_i - (\eta_i^{-2} - \zeta_i^{-2})] +$$

$$+ [\eta_i^{-1}\psi(\eta_i) + (\eta_i^{-2} - 1)\varphi(\eta_i)]\exp(-\eta_i z_i) - [\zeta_i^{-1}\psi(\zeta_i) +$$

$$+ (\zeta_i^{-2} - 1)]\exp(-\zeta_i z_i)\}\, w_i dz_i.$$

Из равенств (10) находим

$$D_i = 2f(\eta_i, \zeta_i)\left[\psi(\zeta_i)(T_i - T_{*i}) - \frac{1}{3}\varphi(\zeta_i)(\theta_i - \theta_{*i})\right],$$

$$G_i = -2f(\eta_i, \zeta_i)\left[\psi(\eta_i)(T_i - T_{*i}) - \frac{1}{3}\varphi(\eta_i)(\theta_i - \theta_{*i})\right]; \tag{12}$$

$$f(\eta_i, \zeta_i) = [\varphi(\eta_i)\psi(\zeta_i) - \varphi(\zeta_i)\psi(\eta_i)]^{-1}.$$

Если в соотношения (2) и (4) внесем вместо t_i выражение (8), а вместо D_i и G_i их значения (12), то получим следующую систему уравнений бесконечно высокого порядка для определения усредненных значений температуры T_i и θ_i:

$$\lambda_1^\gamma h_1^{-1}[\Psi_2^+(\eta_1, \zeta_1)(T_1 - T_{*1}) + \Phi_2^+(\eta_1, \zeta_1)(\theta_1 - \theta_{*1}) - \chi_2^+(w_1)] +$$

$$+\varepsilon_1^{(c)}[\Psi_1^+(\eta_1,\zeta_1)(T_1-T_{*1})-\Phi_1^+(\eta_1,\zeta_1)(\theta_1-\theta_{*1})-\chi_1^+(w_1)-t_1^{(c)}]+$$
$$+\varkappa_1^{(c)}\{[\Psi_1^+(\eta_1,\zeta_1)(T_1-T_{*1})-\Phi_1^+(\eta_1,\zeta_1)(\theta_1-\theta_{*1})-\chi_1^+(w_1)]^4-(t_1^{(c)})^4\}=0,$$
$$\lambda_n^\gamma h_n^{-1}[\Psi_2^-(\eta_n,\zeta_n)(T_n-T_{*n})-\Phi_2^-(\eta_n,\zeta_n)(\theta_n-\theta_{*n})+\chi_2^-(w_n)]-$$
$$-\varepsilon_n^{(c)}[\Psi_1^-(\eta_n,\zeta_n)(T_n-T_{*n})-\Phi_1^-(\eta_n,\zeta_n)(\theta_n-\theta_{*n})+\chi_1^-(w_n)-t_n^{(c)}]-$$
$$-\varkappa_n^{(c)}\{[\Psi_1^-(\eta_n,\zeta_n)(T_n-T_{*n})-\Phi_1^+(\eta_n,\zeta_n)(\theta_n-\theta_{*n})+$$
$$+\chi_1^-(w_n)]^4-(t_n^{(c)})^4\}=0; \tag{13}$$
$$\Psi_1^-(\eta_i,\zeta_i)(T_i-T_{*i})-\Phi_1^-(\eta_i,\zeta_i)(\theta_i-\theta_{*i})+\chi_1^-(w_i)=$$
$$=\Psi_1^+(\eta_{i+1},\zeta_{i+1})(T_{i+1}-T_{*i+1})-\Phi_1^+(\eta_{i+1},\zeta_{i+1})(\theta_{i+1}-\theta_{*i+1})-\chi_1^+(w_{i+1}),$$
$$\lambda_i^\gamma h_i^{-1}[\Psi_2^-(\eta_i,\zeta_i)(T_i-T_{*i})-\Phi_2^-(\eta_i,\zeta_i)(\theta_i-\theta_{*i})+\chi_2^-(w_i)]=$$
$$=\lambda_{i+1}^\gamma h_{i+1}^{-1}[\Psi_2^+(\eta_{i+1},\zeta_{i+1})(T_{i+1}-T_{*i+1})+\Phi_2^+(\eta_{i+1},\zeta_{i+1})(\theta_{i+1}-\theta_{*i+1})-$$
$$-\chi_2^+(w_{i+1})]\qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1).$$

Здесь

$$\chi_k^\pm(\eta,\zeta,w)=h^2[2\lambda^\gamma(\eta-\zeta)]^{-1}\int_{-1}^{1}\{\eta^{k-1}\exp[\pm\eta(1\mp z)]-$$
$$-\zeta^{k-1}\exp[\pm\zeta(1\mp z)]\}\,wdz; \tag{14}$$
$$\Psi_k^\pm(\eta,\zeta)=2f(\eta,\zeta)[\psi(\zeta)\eta^{k-1}\exp(\pm\eta)-\psi(\eta)\zeta^{k-1}\exp(\pm\zeta)].$$

Выражения для $\Phi_k^\pm$ определяются последней из формул (14), если в ней ψ заменить на $^1/_3\varphi$.

Если выражения, входящие в уравнения (13), разложить по степеням h и затем в этих разложениях отбросить члены порядка h^{2m+1}и выше, то получим приближенную систему $2n$ дифференциальных уравнений порядка $2m$ для определения $2n$ величин T_i и θ_i $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$. Считая толщину каждого из слоев достаточно малой, указанным путем получаем следующую (простейшую) систему $2n$ уравнений второго порядка для n-слойной оболочки:

$$p_1^2\left(T_1+\frac{2}{5}\theta_1\right)-r_1^{-1}(1-k_1^*)\theta_1-\varepsilon_1^{(c)}(T_1+\theta_1-t_1^{(c)})-$$
$$-\varkappa_1^{(c)}[(T_1+\theta_1)^4-(t_1^{(c)})^4]=-W_1^+;$$
$$p_n^2\left(T_n-\frac{2}{5}\theta_n\right)+r_n^{-1}(1+k_n^*)\theta_n-\varepsilon_n^{(c)}(T_n-\theta_n-t_n^{(c)})-$$
$$-\varkappa_n^{(c)}[(T_n-\theta_n)^4-(t_n^{(c)})^4]=-W_n^-;$$
$$p_i^2\left(T_i-\frac{1}{5}\theta_i\right)-3r_i^{-1}T_i+r_i^{-1}(3+k_i^*)\theta_i+V_i^-=$$
$$=r_{i+1}r_i^{-1}\left[p_{i+1}^2\left(T_{i+1}+\frac{1}{5}\theta_{i+1}\right)-3r_{i+1}^{-1}T_{i+1}-r_{i+1}^{-1}(3-k_{i+1}^*)\theta_{i+1}+V_{i+1}^+\right]; \tag{15}$$
$$p_i^2\left(\frac{2}{5}\theta_i-T_i\right)-r_i^{-1}(1+k_i^*)\theta_i-W_i^-=p_{i+1}^2\left(\frac{2}{5}\theta_{i+1}+T_{i+1}\right)-$$
$$-r_{i+1}^{-1}(1-k_{i+1}^*)\theta_{i+1}+W_{i+1}^+\qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1).$$

Здесь обозначено

$$\lambda_i^\gamma r_i=h_i;\quad C_i=h_ic_i;\quad \Lambda_i^{\alpha,\beta}=h_i\lambda_i^{\alpha,\beta};\quad k_i^*=2h_ik_i;$$

$$p_i^2 = \frac{1}{A_iB_i}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\Lambda_i^\alpha \frac{B_i}{A_i}\frac{\partial}{\partial\alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\Lambda_i^\beta \frac{A_i}{B_i}\frac{\partial}{\partial\beta}\right) - C_i\frac{\partial}{\partial\tau}\right];$$

$$W_i^\pm = \frac{h_i}{4}\int_{-1}^{1} w_i(2 \pm 3z_i \mp z_i^3)\,dz_i; \quad V_i^\pm = \frac{3h_i}{4}\int_{1}^{-1} w_i(1 \pm z_i - z_i^2 \mp z_i^3)\,dz_i. \tag{16}$$

2. Полученные уравнения для T_i и θ_i необходимо дополнить начальными и граничными условиями. Интегрирование соотношений (5) по толщине каждого из слоев приводит к обычным начальным условиям

$$T_i|_{\tau=0} = \frac{1}{2h_i}\int_{-h_i}^{h_i} t_{0i}d\gamma_i; \quad \theta_i|_{\tau=0} = \frac{3}{2h_i^2}\int_{-h_i}^{h_i} t_{0i}\gamma_i d\gamma_i. \tag{17}$$

Интегрируя по γ_i соотношения (3), будем считать (для сокращения вычислений) $w = 0$ на S. Используя при этом формулу (8), получим

$$(L_i + \varepsilon_i^{(s)})[\varphi(\eta_i)D_i + \varphi(\zeta_i)G_i] + \varkappa_i^{(s)}\{\varphi(4\eta_i)D_i^4 +$$
$$+ 4\varphi(3\eta_i + \zeta_i)D_i^3G_i + 6\varphi(2\eta_i + 2\zeta_i)D_i^2G_i^2 + 4\varphi(\eta_i + 3\zeta_i)D_iG_i^3 +$$
$$+ \varphi(4\zeta_i)G_i^4\}|_S = \frac{1}{h_i}\int_{-h_i}^{h_i}[\varepsilon_i^{(s)}t_i^{(s)} + \varkappa_i^{(s)}(t_i^{(s)})^4]\,d\gamma_i; \tag{18}$$

$$(L_i + \varepsilon_i^{(s)})[\psi(\eta_i)D_i + \psi(\zeta_i)G_i] + \varkappa_i^{(s)}\{\psi(4\eta_i)D_i^4 + 4\psi(3\eta_i + \zeta_i)D_i^3G_i +$$
$$+ 6\psi(2\eta_i + 2\zeta_i)D_i^2G_i^2 + 4\psi(\eta_i + 3\zeta_i)D_iG_i^3 + \psi(4\zeta_i)G_i^4\}|_S =$$
$$= \frac{1}{h_i^2}\int_{-h_i}^{h_i}[\varepsilon_i^{(s)}t_i^{(s)} + \varkappa_i^{(s)}(t_i^{(s)})^4]\,\gamma_i d\gamma_i.$$

Если в равенства (18) подставим вместо D_i и G_i их значения (12), а затем выражения, содержащиеся в фигурных скобках, разложим в ряд по степеням h, то, поступая, как и при выводе уравнений (15), находим

$$(L_i + \varepsilon_i^{(s)})T_i + \varkappa_i^{(s)}\left(T_i^4 + 2T_i^2\theta_i^2 + \frac{1}{5}\theta_i^4\right)\Big|_S =$$
$$= \frac{1}{2h_i}\int_{-h_i}^{h_i}[\varepsilon_i^{(s)}t_i^{(s)} + \varkappa_i^{(s)}(t_i^{(s)})^4]\,d\gamma_i; \tag{19}$$
$$(L_i + \varepsilon_i^{(s)})\theta_i + 4\varkappa_i^{(s)}\left(T_i^3\theta_i + \frac{3}{5}T_i\theta_i^3\right)\Big|_S =$$
$$= \frac{3}{2h_i^2}\int_{-h_i}^{h_i}[\varepsilon_i^{(s)}t_i^{(s)} + \varkappa_i^{(s)}(t_i^{(s)})^4]\,\gamma_i d\gamma_i.$$

Сформулированная задача теплопроводности (15), (17), (19) при $\varkappa_i = 0$ переходит в задачу теплопроводности для многослойных оболочек, теплообмен которых с окружающей средой осуществляется по закону Ньютона [1].

Отметим также, что оболочки, применяемые в условиях, когда преобладающим является теплообмен излучением, обычно бывают либо замкнутыми, и тогда отпадает необходимость использования граничных условий (19), либо контактируют по торцовым поверхностям с соседними элементами конструкции, и тогда вместо нелинейных граничных условий (19) используются условия (линейные) теплового контакта, что также значительно облегчает решение задачи. В общем случае условия (19) можно заменить (приближенно) линейными, поскольку относительная роль торцовой поверхности оболочки в общем ее теплообмене невелика.

3. При выводе уравнений (15) толщины всех слоев считались величинами одного порядка. Пусть теперь $h_{2i} \ll h_{2i+1}$ ($i = 1, 2, \ldots, m$; $2m = n - 1$; n — нечетное). Исключая из уравнений (15) величины T_{2i} и θ_{2i}, с использованием указанного неравенства получим

$$\begin{gathered}
\left[(1+\delta_{2i}^{-}) p_{2i-1}^2 + \frac{1}{3} p_{2i}^2\right] T_{2i-1} - \frac{2}{5}\left[\left(1+\frac{1}{2}\delta_{2i}^{-}\right) p_{2i-1}^2 + \frac{5}{6} p_{2i}^2\right] \theta_{2i-1} + \\
+ [r_{2i-1}^{-1} + r_{2i}^{-1} + (1+\delta_{2i}^{-}) \overset{*}{k}_{2i-1} r_{2i-1}^{-1}]\, \theta_{2i-1} - r_{2i}^{-1} T_{2i-1} + W_{2i-1}^{-} + \delta_{2i}^{-} V_{2i}^{-} - W_{2i}^{-} = \\
= \left[(1+\delta_{2i}^{+}) p_{2i+1}^2 + \frac{1}{3} p_{2i}^2\right] T_{2i+1} + \frac{2}{5}\left[\frac{5}{6} p_{2i}^2 + \left(1+\frac{1}{2}\delta_{2i}^{+}\right) p_{2i+1}^2\right] \theta_{2i+1} - \\
- [r_{2i+1}^{-1} + r_{2i}^{-1} - (1+\delta_{2i}^{+}) \overset{*}{k}_{2i+1} r_{2i+1}^{-1}]\, \theta_{2i+1} - r_{2i}^{-1} T_{2i+1} + W_{2i+1}^{+} + \\
+ \delta_{2i}^{+} V_{2i+1}^{+} - W_{2i}^{+}; \qquad (20) \\
\left(\frac{2}{5} p_{2i-1}^2 + p_{2i}^2\right) \theta_{2i-1} - (p_{2i-1}^2 + p_{2i}^2)\, T_{2i-1} + \overset{*}{k}_{2i} r_{2i}^{-1} (\theta_{2i-1} - T_{2i-1}) - \\
- (1 + \overset{*}{k}_{2i-1})\, r_{2i-1}^{-1} \theta_{2i-1} - W_{2i-1}^{-} - W_{2i}^{-} = \left(\frac{2}{5} p_{2i+1}^2 + p_{2i}^2\right) \theta_{2i+1} + \\
+ (p_{2i+1}^2 + p_{2i}^2)\, T_{2i+1} - \overset{*}{k}_{2i} r_{2i}^{-1} (\theta_{2i+1} + T_{2i+1}) - (1 - \overset{*}{k}_{2i+1})\, r_{2i+1}^{-1} \theta_{2i+1} + \\
+ W_{2i+1}^{+} + W_{2i}^{+}; \qquad (i = 1, 2, \ldots, m; \quad 2m = n - 1); \quad (3\delta_{2i}^{\pm} = r_{2i\pm1} r_{2i}^{-1}).
\end{gathered}$$

К уравнениям (20) следует присоединить (без изменений) первые два из уравнений (15). Таким образом, получим $2m + 2$ уравнений для определения $2m + 2$ функций T_{2i-1}, θ_{2i-1} ($i = 1, 2, \ldots, m + 1$).

Величины T_{2i} и θ_{2i} выражаются через температурные характеристики соседних слоев по формулам

$$\begin{gathered}
6T_{2i} = (3 + r_{2i} p_{2i}^2)(T_{2i-1} + T_{2i+1} - \theta_{2i-1} + \theta_{2i+1}) - r_{2i-1} p_{2i-1}^2 \left(T_{2i-1} - \frac{1}{5}\theta_{2i-1} - \right. \\
\left. - r_{2i+1} p_{2i+1}^2 \left(T_{2i+1} + \frac{1}{5}\theta_{2i+1}\right) - \overset{*}{k}_{2i} (T_{2i-1} - T_{2i+1} + \theta_{2i-1} + \theta_{2i+1}) + \right. \\
+ V_{2i}^{+} + V_{2i}^{-} - r_{2i-1} V_{2i-1}^{-} - r_{2i+1} V_{2i+1}^{+}; \\
6\theta_{2i} = \left(3 + \frac{1}{5} r_{2i} p_{2i}^2\right)(T_{2i-1} - T_{2i+1} - \theta_{2i-1} - \theta_{2i+1}) - \qquad (21) \\
- r_{2i-1} p_{2i-1}^2 (T_{2i-1} - \theta_{2i-1}) + r_{2i+1} p_{2i+1}^2 (T_{2i+1} + \theta_{2i+1}) - \\
- \overset{*}{k}_{2i-1} \theta_{2i-1} + \overset{*}{k}_{2i+1} \theta_{2i+1} - r_{2i-1} V_{2i-1}^{-} + r_{2i+1} V_{2i+1}^{+}.
\end{gathered}$$

Точно к такой же системе уравнений придем, если оболочку рассматривать как $(m + 1)$-слойную с неидеальным тепловым контактом между слоями, т. е. если вместо условий (4) в качестве исходных принять условия неидеального теплового контакта [6].

Соотношения (20) и (21) допускают дальнейшее упрощение. Если $\Lambda_{2i} \ll \Lambda_{2i\pm1}$, $C_{2i} \ll C_{2i\pm1}$, то в этих соотношениях можно положить $p_{2i}^2 = 0$, т. е. промежуточные слои принимаются в этом случае теплопроводными только в направлении нормали к их срединным поверхностям.

4. Рассмотрим случай, когда коэффициенты теплоотдачи являются функциями температуры, т. е.

$$\varepsilon_1^{(c)} = f_1(t), \quad \varepsilon_n^{(c)} = f_n(t), \quad \varepsilon_i^{(s)} = f_{si}(t). \qquad (22)$$

Подставляя выражение (8) в соотношения (2) при $\varkappa_i = 0$ и используя при этом формулы (12) и (14), с учетом (22) находим

$$\begin{gathered}
\lambda_1^{\gamma} h_1^{-1} [\Psi_2^{+} (T_1 - T_{*1}) + \Phi_2^{+} (\theta_1 - \theta_{*1}) - \chi_2^{+} (w_1)] + \\
+ f_1 (\Psi_1^{+} T_1 - \Phi_1^{+} \theta_1 - \Psi_1^{+} T_{*1} + \Phi_1^{+} \theta_{*1} - \chi_1^{+}) [\Psi_1^{+} (T_1 - T_{*1}) - \\
- \Phi_1^{+} (\theta_1 - \theta_{*1}) - \chi_1^{+} (w_1) - t_1^{(c)}] = 0,
\end{gathered}$$

$$\lambda_n^{\nu} h_n^{-1} [\Psi_2^- (T_n - T_{*n}) - \Phi_2^- (\theta_n - \theta_{*n}) + \chi_2^- (w_n)] -$$
$$- f_n (\Psi_1^- T_n - \Phi_1^- \theta_n - \Psi_1^- T_{*n} + \Phi_1^- \theta_{*n} - \chi_1^-) [\Psi_1^- (T_n - T_{*n}) -$$
$$- \Phi_1^- (\theta_n - \theta_{*n}) + \chi_1^- (w_n) - t_n^{(c)}] = 0.$$

Раскладывая полученные соотношения в ряды по степеням h_i, аналогично предыдущему получим

$$p_1^2 \left(T_1 + \frac{2}{5} \theta_1 \right) - r_1^{-1} (1 - \overset{*}{k}_1) \theta_1 + f_1 (T_1 + \theta_1) [T_1 + \theta_1 - t_1^{(c)}] = - W_1^+;$$

$$p_n^2 \left(T_n - \frac{2}{5} \theta_n \right) + r_n^{-1} (1 + \overset{*}{k}_n) \theta_n - f_n (T_n - \theta_n) [T_n - \theta_n - t_n^{(c)}] = - W_n^-.$$

Присоединяя к этим уравнениям соотношения (15), кроме первых двух из них, получим систему уравнений теплопроводности для n-слойной оболочки, соответствующую случаю (22). Этой системе уравнений соответствуют граничные условия

$$L_i T_i |_S = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} f_{si} (T_i + z\theta_i) [T_i + z\theta_i - t_i^{(s)}] \, dz;$$

$$L_i \theta_i |_S = \frac{3}{2} \int_{-1}^{1} f_{si} (T_i + z\theta_i) [T_i + z\theta_i - t_i^{(s)}] \, z dz,$$

которые получены аналогично условиям (19). В качестве начальных условий остаются справедливыми соотношения (17).

ЛИТЕРАТУРА

1. Береговой С. Г., Подстригач Я. С., Чернуха Ю. А.— Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1972, 3, 105.
2. Григолюк Э. И., Чулков П. П.— Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук, 1964, 6, 2, 88.
3. Лыков А. В. Теория теплопроводности. «Высшая школа», М., 1967.
4. Новікова А. М., Мотовиловець І. О., Святенко О. І.— ДАН УРСР, сер. А, 1972, 3, 250.
5. Підстригач Я. С., Ярема С. Я. Температурні напруження в оболонках. Вид-во АН УРСР, К., 1961.
6. Подстригач Я. С.— ИФЖ, 1963, 6, 10, 129.

Львовский филиал
математической физики Института
математики АН УССР

Поступила в редколлегию
в декабре 1973 г.

ТЕМПЕРАТУРНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ НА СТЫКЕ ПЛАСТИНКИ И ПОДКРЕПЛЯЮЩЕГО ЭЛЕМЕНТА ПРИ НАЛИЧИИ ТЕПЛООТВОДА

Ю. М. Коляно, А. Н. Кулик, Д. Т. Химич, М. И. Микитин

Пусть край тонкой изотропной пластинки толщиной 2δ спаян с подкрепляющим стержнем той же толщины и ширины $2h$, который соприкасается по поверхности $z = +\delta$ с теплоотводящим элементом высотой l (рис. 1). Выведем термомеханические условия на контуре спая пластинки с подкрепляющим стержнем.

Рассмотрим две сопряженные пластинки толщиной 2δ. Ширина первой пластинки равна $2h$, второй — D. Температурные напряжения и перемещения в первой пластинке определяются по формулам [2]

$$\sigma_{xx}^0 = - 2G_0 \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial y^2} + \frac{2G_0}{1 - \nu_0} \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu_0 \frac{\partial^2 \chi_0}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \chi_0}{\partial x^2} \right),$$