

$$\begin{aligned} & \lambda_n^{\gamma} h_n^{-1} [\Psi_2^-(T_n - T_{*n}) - \Phi_2^-(\theta_n - \theta_{*n}) + \chi_2^-(\omega_n)] - \\ & - [f_n(\Psi_1^- T_n - \Phi_1^- \theta_n - \Psi_1^- T_{*n} + \Phi_1^- \theta_{*n} - \chi_1^-) (\Psi_1^- (T_n - T_{*n}) - \\ & - \Phi_1^- (\theta_n - \theta_{*n}) + \chi_1^- (\omega_n) - t_n^{(c)})] = 0. \end{aligned}$$

Раскладывая полученные соотношения в ряды по степеням h_i , аналогично предыдущему получим

$$p_1^2 \left(T_1 + \frac{2}{5} \theta_1 \right) - r_1^{-1} (1 - k_1^*) \theta_1 + f_1 (T_1 + \theta_1) [T_1 + \theta_1 - t_1^{(c)}] = -W_1^+;$$

$$p_n^2 \left(T_n - \frac{2}{5} \theta_n \right) + r_n^{-1} (1 + k_n^*) \theta_n - f_n (T_n - \theta_n) [T_n - \theta_n - t_n^{(c)}] = -W_n^-.$$

Присоединяя к этим уравнениям соотношения (15), кроме первых двух из них, получим систему уравнений теплопроводности для n -слойной оболочки, соответствующую случаю (22). Этой системе уравнений соответствуют граничные условия

$$L_i T_i |_S = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f_{st} (T_i + z\theta_i) [T_i + z\theta_i - t_i^{(s)}] dz;$$

$$L_i \theta_i |_S = \frac{3}{2} \int_{-1}^1 f_{st} (T_i + z\theta_i) [T_i + z\theta_i - t_i^{(s)}] z dz,$$

которые получены аналогично условиям (19). В качестве начальных условий остаются справедливыми соотношения (17).

ЛИТЕРАТУРА

1. Береговой С. Г., Подстригач Я. С., Чернуха Ю. А.— Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1972, 3, 105.
2. Григолюк Э. И., Чулков П. П.— Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук, 1964, 6, 2, 88.
3. Лыков А. В. Теория теплопроводности. «Высшая школа», М., 1967.
4. Новикова А. М., Мотовиловець І. О., Святенко О. І.— ДАН УРСР, сер. А, 1972, 3, 250.
5. Підстригач Я. С., Ярема С. Я. Температурні напруження в оболонках. Вид-во АН УРСР, К., 1961.
6. Подстригач Я. С.— ИФЖ, 1963, 6, 10, 129.

Львовский филиал
математической физики Института
математики АН УССР

Поступила в редколлегию
в декабре 1973 г.

ТЕМПЕРАТУРНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ НА СТЫКЕ ПЛАСТИНКИ И ПОДКРЕПЛЯЮЩЕГО ЭЛЕМЕНТА ПРИ НАЛИЧИИ ТЕПЛОТВОДА

Ю. М. Коляно, А. Н. Кулик, Д. Т. Химич, М. И. Микитин

Пусть край тонкой изотропной пластинки толщиной 2δ спаян с подкрепляющим стержнем той же толщины и ширины $2h$, который соприкасается по поверхности $z = +\delta$ с теплоотводящим элементом высотой l (рис. 1). Выведем термомеханические условия на контуре спая пластинки с подкрепляющим стержнем.

Рассмотрим две сопряженные пластинки толщиной 2δ . Ширина первой пластинки равна $2h$, второй — D . Температурные напряжения и перемещения в первой пластинке определяются по формулам [2]

$$\sigma_{xx}^0 = -2G_0 \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial y^2} + \frac{2G_0}{1-\nu_0} \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu_0 \frac{\partial^2 \chi_0}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \chi_0}{\partial x^2} \right),$$

$$\begin{aligned}\sigma_{xy}^0 &= 2G_0 \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x \partial y} + \frac{2G_0}{1-\nu_0} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \chi_0}{\partial x^2} - \nu_0 \frac{\partial^2 \chi_0}{\partial y^2} \right), \\ \sigma_{yy}^0 &= -2G_0 \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x^2} + \frac{2G_0}{1-\nu_0} \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial^2 \chi_0}{\partial y^2} + (2+\nu_0) \frac{\partial^2 \chi_0}{\partial x^2} \right], \\ u_0 &= \frac{\partial \Phi_0}{\partial x} - \frac{1+\nu_0}{1-\nu_0} \frac{\partial^2 \chi_0}{\partial x \partial y}, \quad v_0 = \frac{\partial \Phi_0}{\partial y} + \frac{2}{1-\nu_0} \frac{\partial^2 \chi_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \chi_0}{\partial y^2},\end{aligned}\quad (1)$$

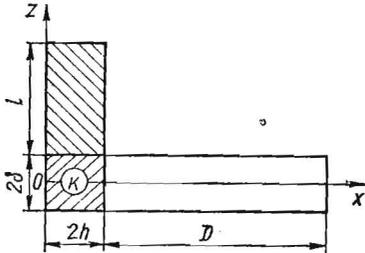


Рис. 1.

где ν_0 — коэффициент Пуассона; G_0 — модуль сдвига; функция χ_0 — общее решение уравнения

$$\Delta \Delta \chi_0 = 0; \quad (2)$$

функция Φ_0 — частное решение уравнения

$$\Delta \Phi_0 = (1 + \nu_0) \alpha_i^0 T_0. \quad (3)$$

Записывая решения уравнений (2), (3) в виде

$$\chi_0 = (A + xB) \cos \beta x + (C + xD) \sin \beta x,$$

$$\Phi_0 = \frac{(1 + \nu_0) \alpha_i^0}{\beta} \int_0^x T_0 \sin \beta (x - \xi) d\xi$$

и используя условия $\sigma_{xx}^0 = 0$, $\sigma_{xy}^0 = 0$ при $x = 0$, $u_0 = u$, $v_0 = v$ при $x = 2h$, постоянные A , B , C , D определим в виде

$$\begin{aligned}A &= -\frac{1}{\beta^2 \Delta_1 (1 + \nu_0) (3 + \nu_0)} \left\{ b \left(2h\beta \frac{1 + \nu_0}{1 - \nu_0} \cos 2h\beta + \sin 2h\beta \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2d}{1 - \nu_0} [\cos 2h\beta + h\beta (1 + \nu_0) \sin 2h\beta] \right\}, \quad D = \frac{1}{2} \beta (1 + \nu_0) A, \quad (4)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C &= \frac{1}{\beta^2 \Delta_1 (1 + \nu_0)} \left\{ \frac{b}{1 - \nu_0} [\cos 2h\beta - h\beta (1 + \nu_0) \sin 2h\beta] + \right. \\ &\quad \left. + d \left(h\beta \frac{1 + \nu_0}{1 - \nu_0} \cos 2h\beta - \frac{1}{2} \sin 2h\beta \right) \right\}, \quad B = -\beta \frac{1 + \nu_0}{3 + \nu_0} C,\end{aligned}$$

где

$$\Delta_1 = \frac{2}{3 + \nu_0} \left[h^2 \beta^2 \left(\frac{1 + \nu_0}{1 - \nu_0} \right)^2 - \frac{1}{4} - \frac{(1 + \nu_0)(3 - \nu_0)}{4(1 - \nu_0)^2} \cos^2 2h\beta \right],$$

$$b = u|_{x=2h} - \alpha_i^0 (1 + \nu_0) \int_0^{2h} T_0 \cos \beta (2h - \xi) d\xi, \quad \beta = \frac{\partial}{\partial y}, \quad (5)$$

$$d = v|_{x=2h} - \alpha_i^0 (1 + \nu_0) \int_0^{h^2} T_0 \sin \beta (2h - \xi) d\xi;$$

u , v — перемещения в пластинке.

Подставляя выражения (4) в остальные условия на контуре сая

$$\sigma_{xx}^0 = \sigma_{xx}, \quad \sigma_{xy}^0 = \sigma_{xy} \quad \text{при } x = 2h \quad (6)$$

и переходя к пределу при $h \rightarrow 0$, $\delta \rightarrow 0$, сохраняя при этом постоянными приведенные теплофизические характеристики подкрепления $\Lambda_0 = \lambda_0 F_0$, $\Lambda_M = \lambda_M F_M$, $C_0^* = c_0^* F_0$, $C_M^* = c_M^* F_M$, его жесткости на растяжение — сжатие $g_0 = E_0 F_0$, на изгиб $g_0^* = E_0 I$ и жесткость пластинки на сдвиг $G^* = 2\delta G$, получим на контуре сая $x = 2h$ подкрепляющего стержня и пластинки искомые термомеханические граничные условия:

$$\begin{aligned}- \left[(\Lambda_0 + \Lambda_M) \frac{\partial^2}{\partial y^2} - (C_0^* + C_M^*) \frac{\partial}{\partial \tau} \right] \sigma_{xy} &= \frac{\alpha_i^0}{2\delta} g_0 \frac{\partial}{\partial y} \left[Q_0 + \Lambda (1 + \nu) \frac{\partial T}{\partial x} + \right. \\ &\quad \left. + \Lambda \varepsilon \frac{\partial T^*}{\partial x} \right] + \frac{g_0}{2\delta} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[(\Lambda_0 + \Lambda_M) \frac{\partial^2}{\partial y^2} - (C_0^* + C_M^*) \frac{\partial}{\partial \tau} \right] v, \quad (7)\end{aligned}$$

$$\sigma_{xx} = \frac{2g_0^*}{\delta} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}; \quad Q_0 = \int_0^{2h+\delta} W_0 dx dz.$$

Рассмотрим теперь полубесконечную пластинку, занимающую область $2h \leq x < +\infty$, $-\infty < y < +\infty$, $-\delta \leq z \leq +\delta$ с подкрепляющим стержнем $0 \leq x \leq 2h$, $-\infty < y < +\infty$, $-\delta \leq z \leq +\delta$. По ребру $x=0$, $z = +\delta$ подкрепляющего стержня движется в положительном направлении оси y с постоянной скоростью V точечный источник тепла мощностью q . Принимается, что между подкрепляющим стержнем и теплоотводящим элементом $\delta \leq z \leq \delta + l$ осуществляется идеальный тепловой контакт. Поверхность $z = \delta + l$ теплоотводящего элемента и поверхности $x=0$ и $z = -\delta$ подкрепляющего стержня теплоизолированы.

Трансформированные по Фурье — Лапласу условия теплообмена на стыке $x = 2h$ пластинки и подкрепляющего стержня [1] имеют вид

$$(1 + \varepsilon) \Lambda \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} - [(\Lambda_0 + \Lambda_m) \eta^2 + (C_0^* + C_m^*) s] \bar{T} + \varepsilon \Lambda \frac{\partial \bar{T}^*}{\partial x} - \\ - \left[\Lambda_m \eta^2 - \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} (C_0^* + C_m^*) s \right] \bar{T}^* = \frac{q}{4\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{s - i\eta V}, \quad (8)$$

$$\left\{ \Lambda_m - \frac{(1 + 3\varepsilon)(1 + \varepsilon)}{6\varepsilon} \Lambda_0 \right\} \eta^2 + \frac{9\varepsilon^2 + 4\varepsilon + 1}{6\varepsilon(1 + \varepsilon)} (C_0^* + C_m^*) s \bar{T}^* = 0.$$

Здесь $\Lambda = 2\delta\lambda$, $\varepsilon = \frac{\Lambda_m}{\Lambda_0} = \frac{\lambda_m F_m}{\lambda_0 F_0}$. Из второго условия (8) следует, что $T^* = 0$. Поэтому для определения температурного поля в пластинке при $x = 2h$ имеем

$$(1 + \varepsilon) \Lambda \frac{\partial T}{\partial x} + (\Lambda_m + \Lambda_0) \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + (C_0^* + C_m^*) \frac{\partial T}{\partial \tau} = -\frac{q}{4} \delta(y - V\tau).$$

В дальнейшем для определения температурного поля в пластинке используем упрощенное граничное условие

$$(1 + \varepsilon) \Lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=2h} = -\frac{q}{4} \delta(y - V\tau). \quad (9)$$

В этом случае при $T^* = 0$ первое из граничных условий (7) принимает вид

$$\sigma_{xy} \Big|_{x=2h} = -\frac{g_0}{2\delta} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}. \quad (10)$$

Для определения температурного поля при квазистационарном тепловом режиме в пластинке с теплоизолированными поверхностями $z = \pm \delta$ имеем уравнение

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y_1^2} + 2\omega \frac{\partial T}{\partial y_1} = 0 \quad (11)$$

с граничными условиями (9) и $T|_{x \rightarrow \infty} = 0$. Здесь $y_1 = y - V\tau$, $\omega = \frac{V}{2a}$.

Опуская в выражениях (1) — (3) индекс «0» и применяя к ним, а также к (9) — (11) и ко второму из граничных условий (7) преобразование Фурье по переменной y_1 , учитывая при этом, что $\sigma_{xx}|_{x \rightarrow \infty} = 0$, $\sigma_{xy}|_{x \rightarrow \infty} = 0$, получаем

$$\bar{\chi} = (C_1 + xD_1) e^{-x\eta}, \quad \bar{\Phi} = -\frac{iN}{\eta\gamma} e^{-\gamma(x-2h)},$$

где

$$\gamma^2 = \eta^2 + 2i\omega\eta, \quad N = \frac{(1 + \nu) \alpha_t q}{8\sqrt{2\pi\omega\Lambda(1 + \varepsilon)}}.$$

Используя второе трансформированное граничное условие (7) и трансформированное условие (10), находим постоянные C и D , а затем трансформанты $\bar{\sigma}_{xx}$, $\bar{\sigma}_{xy}$, $\bar{\sigma}_{yy}$ напряжений при $x = 2h$ в пластинке. Так как $\sigma_{ij} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times$

$\times \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\sigma}_i e^{-iy_1 \eta} d\eta$, то, учитывая, что

$$\gamma = \begin{cases} \kappa_+ + i\kappa_- & \text{при } \eta \geq 0, \\ \kappa_+ - i\kappa_- & \text{при } \eta \leq 0, \end{cases} \quad \kappa_{\pm} = \sqrt{\frac{V\eta^4 + 4\omega^2\eta^2 \pm \eta^2}{2}},$$

$$e^{\pm iy_1 \eta} = \cos y_1 \eta \pm i \sin y_1 \eta,$$

и вводя безразмерные переменные $\xi = y_1 \omega$, $\zeta = \frac{\eta}{\omega}$, получим при $x = 2h$:

$$\sigma_x = \frac{2\omega^3 g_0^*}{1 + \varepsilon} \int_0^{\infty} \frac{\zeta^3}{\Delta_3(\zeta)} (g_0 \omega \zeta + 2G^*) \left(\sin \zeta \xi - \frac{\kappa_1 \sin \zeta \xi + \kappa_2 \cos \zeta \xi}{\sqrt{\zeta^2 + 4}} \right) d\zeta, \quad (12)$$

$$\tau_{xy} = \frac{\omega g_0}{1 + \varepsilon} \int_0^{\infty} \frac{\zeta}{\Delta_3(\zeta)} (2g_0^* \omega^3 \zeta^3 + G^*) \left(\cos \zeta \xi - \frac{\kappa_1 \cos \zeta \xi - \kappa_2 \sin \zeta \xi}{\sqrt{\zeta^2 + 4}} \right) d\zeta, \quad (13)$$

$$\sigma_y = \frac{1}{1 + \varepsilon} \int_0^{\infty} \left[R(\zeta) \sin \zeta \xi + \left(\frac{1}{\zeta} - \frac{M(\zeta)}{\sqrt{\zeta^2 + 4}} \right) (\kappa_1 \sin \zeta \xi - \kappa_2 \cos \zeta \xi) \right] d\zeta, \quad (14)$$

где

$$R(\zeta) = \frac{2}{\Delta_3(\zeta)} [g_0 g_0^* \nu \omega^4 \zeta^4 - 2G^* g_0^* \omega^3 \zeta^3 - G^{*2} (1 + \nu)],$$

$$M(\zeta) = \frac{1}{\Delta_3(\zeta)} [g_0 g_0^* (3 + \nu) \omega^4 \zeta^4 + g_0 G^* \omega \zeta - G^{*2} (1 + \nu)],$$

$$\Delta_3(\zeta) = g_0 g_0^* (3 - \nu) \omega^4 \zeta^4 + 4G^* g_0^* \omega^3 \zeta^3 + G^* g_0 \omega \zeta + (1 + \nu) G^{*2},$$

$$\sigma_i = \sigma_{if} \frac{8\pi\lambda}{\alpha_l E q}, \quad (i = x, y), \quad \tau_{xy} = \sigma_{xy} \frac{8\pi\lambda}{\alpha_l E q}, \quad \kappa_{1,2} = \sqrt{\frac{\zeta \sqrt{\zeta^2 + 4} \pm \zeta^2}{2}}.$$

По формулам (12) — (14) на ЭЦВМ «Минск-32» произведены расчеты, результаты которых в виде графиков представлены на рис. 2—4 (кривые 1 на

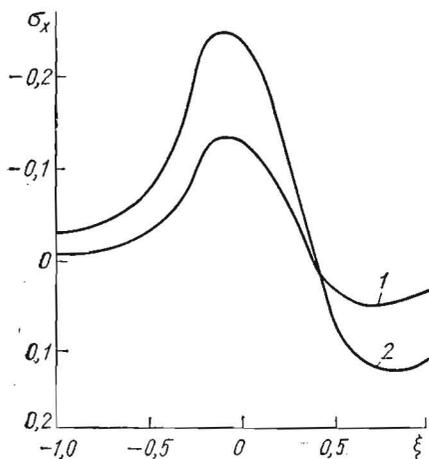


Рис. 2.

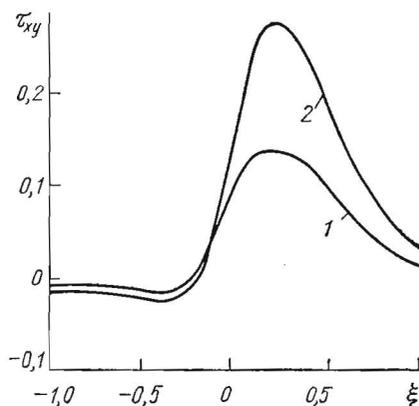


Рис. 3.

этих рисунках получены в случае Н-образного поперечного сечения, кривые 2 — в случае прямоугольного). При этом приняты такие исходные данные для пластинки: $\omega = 2,78 \text{ сек}^{-1}$; $\alpha_l = 5 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{град}}$; $\nu = 0,2$; $\lambda = 3,1 \times 10^{-3} \text{ кал/см} \cdot \text{сек} \cdot \text{град}$; $G^* = 1,98 \cdot 10^5 \text{ кг/см}$. Для подкрепляющего стержня прямоугольного поперечного сечения $g_0^* = 0,0356g_0$, $G^* = 0,2088g_0$; для

подкрепляющего стержня Н-образного поперечного сечения $g_0^* = 0,0280g_0$, $G^* = 0,3489g_0$. Кроме того, принято, что площадь F_m поперечного сечения теплоотводящего элемента равна площади F_0 поперечного сечения Н-образного подкрепляющего элемента. Тогда, если $\frac{\lambda_m}{\lambda_0} = 9$, то $\varepsilon = 9$ и $\varepsilon = 5$ для Н-образного и прямоугольного поперечных сечений подкрепляющего стержня соответственно. При Н-образном поперечном сечении подкрепляющего стержня напряжение σ_y (рис. 4, кривая 1) в пластинке на стыке ее с подкреплением уменьшается в 1,7 раза по сравнению с напряжением в пластинке с прямоугольным поперечным сечением (рис. 4, кривая 2) подкрепляющего стержня.

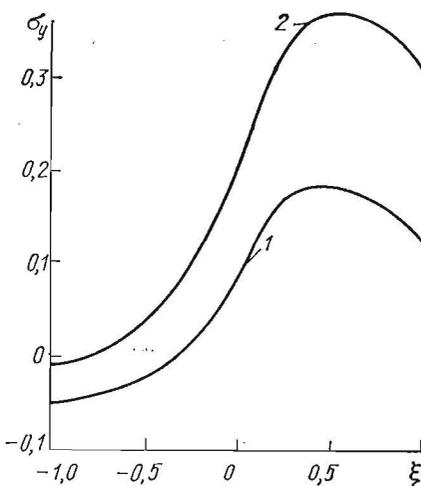


Рис. 4.

Как следует из формул (12) — (14), наличие теплоотводящего элемента приводит к уменьшению температурных напряжений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коляно Ю. М., Кулик А. Н.— Доклады и научные сообщения Львовского политехн. ин-та, 1974, 2, 52.
2. Новацкий В. Вопросы термоупругости. Изд-во АН СССР, М., 1962, 186.

Львовский филиал математической физики
Института математики АН УССР,
Всесоюзный научно-исследовательский институт
электроннолучевых приборов,
Львовский политехнический институт

Поступила в редколлегию
в январе 1974 г.

О ВЛИЯНИИ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ПОДКРЕПЛЯЮЩИХ ЭЛЕМЕНТОВ НА ТЕРМОУПРУГОЕ СОСТОЯНИЕ ПЛАСТИНКИ

О. В. Караванский

Рассмотрим бесконечную тонкую пластинку, симметрично подкрепленную относительно ее срединной плоскости системой тонких прямых ребер жесткости прямоугольного поперечного сечения с интервалом между ребрами $2l$. Предполагаем, что ребра изготовлены из одного материала и размеры их одинаковы. С боковых поверхностей системы пластинка—ребра осуществляется теплообмен по закону Ньютона со средой температуры t_c , изменяющейся во времени и вдоль ребер.

Задачу теплопроводности для такой системы, учитывая ее периодичность, если ребро жесткости рассматривать как тонкий стержень, в соответствии с [2], можно свести к определению усредненной по толщине температуры T для повторяющегося элемента пластинки, заключенного между двумя ребрами жесткости, из уравнения

$$\Delta T - \varepsilon T = \varepsilon t_c + \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (-1 < \xi < 1) \quad (1)$$

при таких краевых условиях:

$$\kappa \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} - \varepsilon_p T + \varepsilon_p t_c \pm \frac{\partial T}{\partial \xi} - k \frac{\partial T}{\partial \tau} = 0 \quad \text{при } \xi = \mp 1; \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \eta} = 0 \quad \text{при } |\eta| = \infty; \quad T = 0 \quad \text{при } \tau = 0,$$