

На рис. 4 приведены графики изменения усилий вдоль ребер жесткости $N_1 = N/\alpha_l E t_0$ при $l = 0,2$ м (сплошные линии) и $N_2 = N \cdot 10^{-1}/\alpha_l E t_0$ при $l = 2$ м (штрихпунктирные линии) при $\omega = 0$ (кривые 1) и $\omega = 0,5$ (кривые 2).

Следует отметить, что основным параметром, характеризующим влияние ребер жесткости на стационарное температурное поле пластинки, является q_c , аналогично, как и q_n в нестационарной задаче теплопроводности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боли Б., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений. «Мир», М., 1967.
2. Караванский О. В.— Прикладная механика, 1970, 6, 7.
3. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1963.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию в декабре 1973 г.

ОПТИМИЗАЦИЯ СИЛОВОЙ НАГРУЗКИ ПРИ УЗКИХ ЗОНАХ ЛОКАЛЬНОГО НАГРЕВА ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Ю. Д. Зозуляк

При локальной термообработке сварных цилиндрических оболочек с целью понижения уровня остаточных напряжений температурные напряжения в зоне высоких температур могут достигать значительной величины, особенно при узких зонах нагрева. Для обеспечения оптимальных условий отжига возникает необходимость понижения уровня напряжений при локальном нагреве за счет других факторов, в частности путем дополнительного нагружения конструкции силовой нагрузкой.

Ниже рассматривается решение такой задачи для длинной цилиндрической оболочки радиуса R , находящейся под воздействием заданного осесимметричного постоянного по толщине температурного поля $T(\xi)$, локализованного в области $|\xi| \leq \eta$, и некоторой осесимметричной нормальной силовой нагрузки q_n , приложенной вне зоны нагрева $|\xi| \geq \eta_1$. Для случая силовой нагрузки, приложенной в области нагрева цилиндрической оболочки, такая задача рассмотрена в работе [2].

Сформулируем условия на функцию q_n , при которых обеспечивается требуемый уровень напряженного состояния в зоне высоких температур. При этом ограничимся рассмотрением задачи о выборе такой силовой нагрузки вне зоны нагрева, при которой осевые растягивающие напряжения на внешней поверхности оболочки не превышают заданных.

Будем предполагать, что температурное поле и силовая нагрузка симметричны относительно сечения $\xi = 0$, в котором температура достигает максимального значения.

Термоупругое состояние рассматриваемой оболочки определяется через температуру и функцию прогибов w , которые удовлетворяют уравнению

$$\frac{d^4 w_0}{d\xi^4} + 4(w_0 - \alpha T) = \frac{4R}{D_0} q_n, \quad (1)$$

где

$$w_0 = \frac{w}{R}; \quad \xi = \frac{az}{R}; \quad a^4 = \frac{3(1-\nu^2)R^2}{4h^2}; \quad D_0 = 2Eh;$$

z — осевая координата; $2h$ — толщина оболочки; α — линейный коэффициент температурного расширения; ν — коэффициент Пуассона; E — модуль упругости.

Для указанных выше условий нагружения, с использованием интегрального преобразования Фурье нулевое на бесконечности решение уравнения (1) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \omega_0 = & \frac{\alpha}{2} \int_0^{\eta} T(\xi_0) \{ e^{-|\xi - \xi_0|} [\cos(\xi - \xi_0) + \sin|\xi - \xi_0|] + e^{-|\xi + \xi_0|} [\cos(\xi + \xi_0) + \\ & + \sin|\xi + \xi_0|] \} d\xi_0 + \frac{R}{2D_0} \int_{\eta_1}^{\infty} q_n(\xi_0) \{ e^{-|\xi - \xi_0|} [\cos(\xi - \xi_0) + \\ & + \sin|\xi - \xi_0|] + e^{-|\xi + \xi_0|} [\cos(\xi + \xi_0) + \sin|\xi + \xi_0|] \} d\xi_0. \end{aligned} \quad (2)$$

Найдем ограничение на силовую нагрузку q_n , при которой в сечении $\xi = 0$ величина осевых напряжений на внешней поверхности оболочки в k раз меньше величины соответствующих напряжений, вызванных только температурным полем, т. е.

$$\sigma_1^{(+)}(0) = k\sigma_{10}^{(+)} \quad (3)$$

Учитывая, что $\sigma_1^{(+)}(0) = -\frac{E}{2} \sqrt{\frac{3}{1-\nu^2}} \frac{d^2\omega_0(0)}{d\xi^2}$, а также соотношение (2), условие (3) можно представить в виде следующего интегрального соотношения:

$$\int_{\eta_1}^{\infty} q_n(\xi) e^{-|\xi|} (\cos \xi - \sin|\xi|) d\xi + \frac{(1-k)\alpha D_0}{R} \int_0^{\eta} T(\xi) e^{-|\xi|} (\cos \xi - \sin|\xi|) d\xi = 0. \quad (4)$$

Следует отметить, что соотношение (4) налагает только интегральное ограничение на силовую нагрузку. Поэтому выполнение условия (3) может быть обеспечено не единственным образом. Приведем два частных варианта решения задачи применительно к локальному нагреву оболочки температурным полем [1].

Пусть силовая нагрузка постоянной интенсивности q_0 задана только на участках оболочки $\eta_1 \leq |\xi| \leq \eta_2$ ($\eta \leq \eta_1 < \eta_2$). Тогда для оптимального температурного поля [1]

$$T = T_0 \left| 1 - 3 \left(\frac{\xi}{\eta} \right)^2 + 2 \left| \frac{\xi}{\eta} \right|^3 \right|, \quad |\xi| \leq \eta; \quad T = 0, \quad |\xi| \geq \eta \quad (5)$$

из соотношения (4) имеем

$$q_0 = -6E\alpha T_0 \frac{h}{R} \frac{(1-k)[\eta - 1 + e^{-\eta}((1+\eta)\cos\eta - \sin\eta)]}{\eta^3 (e^{-\eta_2} \sin\eta_2 - e^{-\eta_1} \sin\eta_1)}. \quad (6)$$

Полученная интенсивность силовой нагрузки q_0 дает возможность обеспечить заданный уровень осевых растягивающих напряжений на внешней поверхности оболочки при нагреве температурным полем (5).

Из выражения (6) видно, что при заданной ширине зоны локального нагрева и величине осевых напряжений в зоне высоких температур интенсивность силовой нагрузки q_0 может меняться в широких пределах в зависимости от ширины и расположения области приложения этой нагрузки, т. е. параметров η_1 и η_2 . В связи с этим представляется важной задача определения таких параметров η_1 и η_2 , при которых q_0 будет минимальным.

а. Рассмотрим случай, когда задана ширина зоны приложения нагрузки $d = \eta_2 - \eta_1$. Тогда интенсивность силовой нагрузки q_0 запишется в виде

$$q_0 = -6E\alpha T_0 \frac{h}{R} \cdot \frac{(1-k)[\eta - 1 - e^{-\eta}((1+\eta)\cos\eta - \sin\eta)]}{\eta^3 [e^{-(d+\eta_1)} \sin(d+\eta_1) - e^{-\eta_1} \sin\eta_1]}. \quad (7)$$

Из необходимого условия экстремума $\frac{dq_0}{d\eta_1} = 0$ получим

$$\eta_1 = \operatorname{arctg} \frac{e^{-d} (\sin d - \cos d) + 1}{1 - e^{-d} (\sin d + \cos d)} + n\pi \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (8)$$

Соотношение (8) позволяет найти экстремальное расположение области силового нагружения. Соответствующая величина интенсивности q_0 при заданной ширине зоны нагрева и величине осевых напряжений в области высоких температур определяется по формуле (7).

На рис. 1 приведены кривые зависимости силовой нагрузки $q_* = \frac{-q_0 \eta^3 R}{6E\alpha T_0 (1-k) [\eta - 1 + e^{-\eta} ((1+\eta) \cos \eta - \sin \eta)]}$ и параметра η_1 от ширины зоны приложения нагрузки. Из анализа полученных данных видно, что минимальная по величине силовая нагрузка соответствует $n = 0$. При этом с увели-

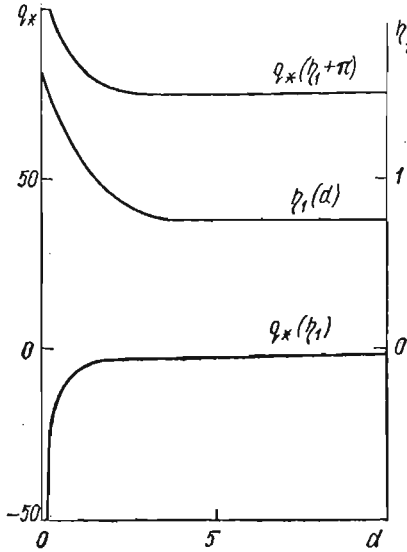


Рис. 1.

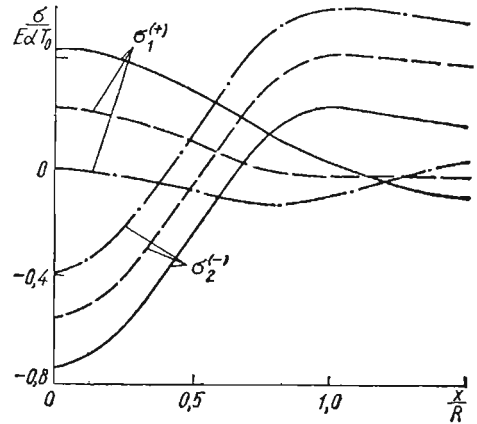


Рис. 2.

чением ширины области приложения нагрузки в диапазоне $0 < d \leq 3$ величина параметра, определяющего начало области приложения нагрузки и ее интенсивность, монотонно уменьшаются. Для значения $d \geq 3$ эти величины практически постоянны.

На рис. 2 показано распределение осевых напряжений $\sigma_1^{(+)}$ на внешней и кольцевых $\sigma_2^{(-)}$ на внутренней поверхностях оболочки с $\frac{R}{h} = 40$ при $\nu = 0,3$, $\eta_1 = \eta = \frac{a}{7}$. Здесь сплошными линиями изображены напряжения, соответствующие значению параметра $k = 1$ (случай ненагруженной оболочки), штриховыми — $k = 0,5$, штрихпунктирными — $k = 0$. Ширина области приложения силовой нагрузки определялась согласно данным рис. 1 таким образом, чтобы ее интенсивность была минимальной. Из приведенных результатов видно, что с помощью постоянной нагрузки, приложенной вне зоны нагрева, можно достичь низкого уровня напряженного состояния в зоне высоких температур. Следует отметить, что с уменьшением параметра k возрастает величина кольцевых напряжений в зоне низких температур.

б. В случае, когда расположение и ширина области нагружения не фиксированы, то из необходимых условий экстремума q по параметрам η_1 и η_2 получим

$$\eta_1 = \frac{\pi}{4} + n\pi, \quad \eta_2 = \frac{\pi}{4} + m\pi, \quad (9)$$

где $n, m = 0, 1, 2, \dots$

Поскольку по условию $\eta_1 < \eta_2$, то из выражения (9) находим наименьшую оптимальную ширину зоны приложения силовой нагрузки

$$\min d \equiv \min (\eta_2 - \eta_1) = \pi. \quad (10)$$

Отметим, что полученные в данном случае экстремальные значения параметров η_1 и η_2 могут быть найдены на основании результатов, приведенных на рис. 1.

В качестве второго примера рассмотрим цилиндрическую оболочку, в которой область $|\xi| \geq \eta_1$ находится под воздействием силовой нагрузки, обеспечивающей условия жесткого обжима этой области, т. е.

$$\omega_0(\xi) = 0 \text{ для } |\xi| \geq \eta_1. \quad (11)$$

Тогда для температурного поля (5) выражение функции прогибов (2) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \omega_0 = \frac{3\alpha T_0}{2\eta^3} \left\{ e^{-|\xi+\eta|} [\cos(\xi+\eta) + \sin|\xi+\eta|] + e^{-|\xi-\eta|} [\cos(\xi-\eta) + \right. \\ \left. + \sin|\xi-\eta|] - 2e^{-|\xi|} (\cos\xi + \sin|\xi|) + \eta [e^{-|\xi+\eta|} \sin(\xi+\eta) - \right. \\ \left. - e^{-|\xi-\eta|} \sin(\xi-\eta)] + \frac{2\eta^3}{3} (A \operatorname{ch}\xi \cos\xi + B \operatorname{sh}\xi \sin\xi) \right\} \text{ для } |\xi| \leq \eta_1; \quad (12) \\ \omega_0 = 0 \text{ для } |\xi| \geq \eta_1. \end{aligned}$$

Здесь постоянные величины A и B определяются из условий сопряжения и выражаются так:

$$\begin{aligned} A = \frac{\omega_0(\eta_1) \operatorname{sh}\eta_1 \sin\eta_1 - \omega_0(\eta_1) (\operatorname{ch}\eta_1 \sin\eta_1 + \operatorname{sh}\eta_1 \cos\eta_1)}{\operatorname{sh}\eta_1 \operatorname{ch}\eta_1 + \sin\eta_1 \cos\eta_1}, \\ B = \frac{\omega_0(\eta_1) (\operatorname{sh}\eta_1 \cos\eta_1 - \operatorname{ch}\eta_1 \sin\eta_1) - \omega_0(\eta_1) \operatorname{ch}\eta_1 \cos\eta_1}{\operatorname{sh}\eta_1 \operatorname{ch}\eta_1 + \sin\eta_1 \cos\eta_1}. \end{aligned}$$

Из условия (3) получим следующее соотношение:

$$(1-k)[\eta - 1 - e^{-\eta}((1+\eta)\cos\eta - \sin\eta)] = \frac{\eta^3 B}{3}, \quad (13)$$

которое представляет собой связь между параметром η_1 , характеризующим начало зоны жесткого обжима оболочки, и коэффициентом k изменения температурных напряжений при жестком обжиме оболочки. Нами выполнены численные расчеты по определению зависимости параметра k от начала зоны обжима η_1 для некоторых значений параметра η , характеризующего ширину

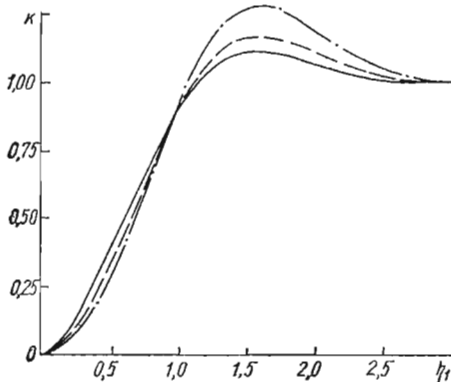


Рис. 3.

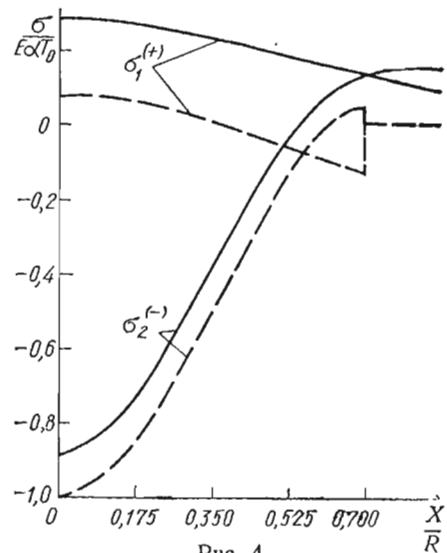


Рис. 4.

зоны нагрева. На рис. 3 сплошная линия соответствует значению $\eta = 1,437$; штриховая — $\eta = 0,82$; штрихпунктирная — $\eta = 0,41$. Из приведенных данных видно, что эффективное понижение уровня осевых напряжений в зоне

высоких температур осуществимо для значений параметра $\eta_1 \leq 1,3$. Если же начало зоны обжима находится в промежутке $1,3 \leq \eta_1 \leq 3$, то уровень осевых напряжений превышает уровень таких напряжений при оптимальном нагреве свободной оболочки. Для значений параметра $\eta_1 \geq 3$ обжим оболочки практически не влияет на ее напряженное состояние в зоне высоких температур. В предельном случае, когда вся оболочка находится в условиях жесткого обжима, как и следовало ожидать, осевые напряжения равны нулю. При этом величина кольцевых напряжений равна $-E\alpha T_0$.

На рис. 4 приведены кривые распределения осевых напряжений на внешней поверхности и кольцевых — на внутренней поверхности для рассматриваемой выше цилиндрической оболочки при $\eta = \eta_1 = \frac{a}{14}$. Сплошные линии соответствуют случаю свободной оболочки, штриховые — случаю обжима зоны $|\xi| \geq \eta_1$. Результаты расчетов показали, что для узких зон локального нагрева при рациональном выборе областей жесткого обжима оболочки можно обеспечить значительное уменьшение уровня осевых напряжений в зоне высоких температур.

ЛИТЕРАТУРА

1. Григолюк Э. И., Бурак Я. И., Подстригач Я. С.— ДАН СССР, 1967, 174, 3.
2. Підстригач Я. С., Бурак Я. Й., Зозуляк Ю. Д.— ДАН УРСР, 1972, 11.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию в декабре 1973 г.

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ОПТИМАЛЬНЫХ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ ПРИ ЛОКАЛЬНОМ НАГРЕВЕ ОБЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

С. Ф. Будз

В данной работе дается постановка и решение задачи об определении осесимметричных оптимальных по напряжениям температурных полей в оболочках вращения при ограничениях на изменение температуры на внешней поверхности оболочки и напряженное состояние на внешней и внутренней ее поверхностях. Задача решалась с использованием методов вариационного исчисления. В качестве критерия оптимальности принято условие минимума функционала упругой энергии оболочки.

1. Рассмотрим оболочку вращения в канонических координатах линий главных кривизн, которая находится под воздействием осесимметричного температурного поля.

Упругая энергия оболочки [2] запишется в виде

$$K(\theta) = \frac{4\pi D_1}{m} \int_{s_{01}}^{s_{02}} F(s, \theta, V, \dot{\theta}, \dot{V}) ds, \quad (1)$$

где

$$F = \frac{r}{2} \left\{ \dot{V}^2 - 2\nu \frac{\dot{r}}{r} \dot{V}V + \left(\frac{\dot{r}}{r} \right)^2 V^2 + m \left[\dot{\theta}^2 + 2\nu \frac{\dot{r}}{r} \dot{\theta}\theta + \left(\frac{\dot{r}}{r} \right)^2 \theta^2 \right] \right\}. \quad (2)$$

При этом разрешающие функции V и θ связаны между собой уравнениями

$$\begin{aligned} \ddot{V} + \frac{\dot{r}}{r} \dot{V} - \left(\frac{\dot{r}^2}{r^2} - \nu k_1 k_2 \right) V + m(k_2 \theta - \alpha \dot{T}) &= 0, \\ \left[\frac{d}{ds} \left(\frac{d}{ds} + \frac{\dot{r}}{r} \right) + (1 - \nu) k_1 k_2 \right] \theta - k_2 V &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь обозначения соответствуют приведенным в работе [2]; $s = s_{01}$, $s = s_{02}$ — граничные сечения оболочки.