

высоких температур осуществимо для значений параметра $\eta_1 \leq 1,3$. Если же начало зоны обжима находится в промежутке $1,3 \leq \eta_1 \leq 3$, то уровень осевых напряжений превышает уровень таких напряжений при оптимальном нагреве свободной оболочки. Для значений параметра $\eta_1 \geq 3$ обжим оболочки практически не влияет на ее напряженное состояние в зоне высоких температур. В предельном случае, когда вся оболочка находится в условиях жесткого обжима, как и следовало ожидать, осевые напряжения равны нулю. При этом величина кольцевых напряжений равна $-\epsilon \alpha T_0$.

На рис. 4 приведены кривые распределения осевых напряжений на внешней поверхности и кольцевых — на внутренней поверхности для рассматриваемой выше цилиндрической оболочки при $\eta = \eta_1 = \frac{a}{14}$. Сплошные линии соответствуют случаю свободной оболочки, штриховые — случаю обжима зоны $|\xi| \geq \eta_1$. Результаты расчетов показали, что для узких зон локального нагрева при рациональном выборе областей жесткого обжима оболочки можно обеспечить значительное уменьшение уровня осевых напряжений в зоне высоких температур.

ЛИТЕРАТУРА

1. Григолюк Э. И., Бурак Я. И., Подстригач Я. С.— ДАН СССР, 1967, 174, 3.
2. Підстригач Я. С., Бурак Я. Й., Зозуляк Ю. Д.— ДАН УРСР, 1972, 11.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию в декабре 1973 г.

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ОПТИМАЛЬНЫХ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ ПРИ ЛОКАЛЬНОМ НАГРЕВЕ ОБЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

С. Ф. Будз

В данной работе дается постановка и решение задачи об определении осесимметричных оптимальных по напряжениям температурных полей в оболочках вращения при ограничениях на изменение температуры на внешней поверхности оболочки и напряженное состояние на внешней и внутренней ее поверхностях. Задача решалась с использованием методов вариационного исчисления. В качестве критерия оптимальности принято условие минимума функционала упругой энергии оболочки.

1. Рассмотрим оболочку вращения в канонических координатах линий главных кривизн, которая находится под воздействием осесимметричного температурного поля.

Упругая энергия оболочки [2] запишется в виде

$$K(\theta) = \frac{4\pi D_1}{m} \int_{s_{01}}^{s_{02}} F(s, \theta, V, \dot{\theta}, \dot{V}) ds, \quad (1)$$

где

$$F = \frac{r}{2} \left\{ \dot{V}^2 - 2\nu \frac{\dot{r}}{r} \dot{V}V + \left(\frac{\dot{r}}{r} \right)^2 V^2 + m \left[\dot{\theta}^2 + 2\nu \frac{\dot{r}}{r} \dot{\theta}\theta + \left(\frac{\dot{r}}{r} \right)^2 \theta^2 \right] \right\}. \quad (2)$$

При этом разрешающие функции V и θ связаны между собой уравнениями

$$\begin{aligned} \ddot{V} + \frac{\dot{r}}{r} \dot{V} - \left(\frac{\dot{r}^2}{r^2} - \nu k_1 k_2 \right) V + m(k_2 \theta - \alpha \dot{T}) &= 0, \\ \left[\frac{d}{ds} \left(\frac{d}{ds} + \frac{\dot{r}}{r} \right) + (1 - \nu) k_1 k_2 \right] \theta - k_2 V &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь обозначения соответствуют приведенным в работе [2]; $s = s_{01}$, $s = s_{02}$ — граничные сечения оболочки.

Рассмотрим задачу определения экстремалей функционала упругой энергии на множестве допустимых функций V, θ, T , когда ограничения представлены в таком виде:

функция $T(s)$ положительна и ограничена значением T_0 в области $s_* \leq s \leq s_0$, а вне этой области равна нулю;

температурные напряжения на внешней $\sigma^+ = \sigma(h, s)$ и внутренней $\sigma^- = \sigma(-h, s)$ поверхностях изменяются в заданных пределах

$$\sigma_{1j}^\pm \leq \sigma_j^\pm \leq \sigma_{2j}^\pm; \quad \sigma_{1j}^\pm \leq 0, \quad \sigma_{2j}^\pm \geq 0 \quad (j = 1, 2), \quad (4)$$

здесь индексы $j = 1, 2$ введены для обозначения меридиональных и кольцевых напряжений соответственно;

функция $T(s)$ подчинена системе функциональных условий вида

$$\int_{s_*}^{s_0} s^i T ds = B_i \quad (i = 0, 1, \dots, n), \quad (5)$$

где B_i — некоторые постоянные, которые будут использованы в дальнейшем для удовлетворения ограничений на температуру в фиксированных сечениях.

С учетом сформулированных ограничений функции T и σ_j^\pm представим в виде

$$T = \frac{T_0}{2} (1 + \sin \varphi_1(s)) (S_+(s - s_*) - S_+(s - s_0)), \quad (6)$$

$$\left[\sigma_j^\pm - \frac{\sigma_{2j}^\pm - \sigma_{1j}^\pm}{2} \left(\sin \varphi_{2j}^\pm(s) \pm \frac{\sigma_{2j}^\pm + \sigma_{1j}^\pm}{\sigma_{2j}^\pm - \sigma_{1j}^\pm} \right) \right] (S_+(s - s_*) - S_+(s - s_0)) = 0,$$

где $\varphi_1(s), \varphi_{2j}^\pm(s)$ — неизвестные функции.

Таким образом, решение вариационной задачи сводится к нахождению экстремалей функционала (1) на множестве функций $\theta, V, T, \varphi_1(s), \varphi_{2j}^\pm(s)$, которые удовлетворяют выражениям (4) — (6) и разрешающим уравнениям (3).

Из необходимого условия экстремума [1] функционала (1) приходим к следующей системе уравнений Эйлера:

$$\begin{aligned} \ddot{V} + \frac{\dot{r}}{r} \dot{V} - \left(\frac{\dot{r}^2}{r^2} - \nu k_1 k_2 \right) V - \frac{1}{r} \left\{ \ddot{\lambda}_1 - \dot{\lambda}_1 \frac{\dot{r}}{r} + \lambda_1 (1 + \nu) k_1 k_2 - \lambda_2 k_2 + \right. \\ \left. + \left[\dot{\lambda}_{42}^+ + \dot{\lambda}_{42}^- - \frac{\dot{r}}{r} (\lambda_{41}^+ + \lambda_{41}^-) \right] (S_+(s - s_*) - S_+(s - s_0)) \right\} = 0, \\ \ddot{\theta} + \frac{\dot{r}}{r} \dot{\theta} - \left(\frac{\dot{r}^2}{r^2} + \nu k_1 k_2 \right) \theta - \frac{1}{mr} \left\{ \ddot{\lambda}_2 - \dot{\lambda}_2 \frac{\dot{r}}{r} + \lambda_2 (1 - \nu) k_1 k_2 + \lambda_1 m k_2 + \right. \\ \left. + \frac{3}{h} \left[(\lambda_{41}^- - \lambda_{41}^+) \nu \frac{\dot{r}}{r} + \dot{\lambda}_{41}^+ - \dot{\lambda}_{41}^- + (\lambda_{42}^- - \lambda_{42}^+) \frac{\dot{r}}{r} + \nu (\dot{\lambda}_{42}^+ - \dot{\lambda}_{42}^-) \right] (S_+(s - \right. \\ \left. - s_*) - S_+(s - s_0)) \right\} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_3 + m \dot{\lambda}_1 + \sum_{i=0}^n \lambda_{0i} s^i (S_+(s - s_*) - S_+(s - s_0)) = 0, \\ \lambda_3 \cos \varphi_1(s) (S_+(s - s_*) - S_+(s - s_0)) = 0, \\ \lambda_{41}^+ \cos \varphi_{21}^+(s) (S_+(s - s_*) - S_+(s - s_0)) = 0, \\ \lambda_{41}^- \cos \varphi_{21}^-(s) (S_+(s - s_*) - S_+(s - s_0)) = 0, \\ \lambda_{42}^+ \cos \varphi_{22}^+(s) (S_+(s - s_*) - S_+(s - s_0)) = 0, \\ \lambda_{42}^- \cos \varphi_{22}^-(s) (S_+(s - s_*) - S_+(s - s_0)) = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

$$-\frac{3}{h} [\theta_1(s_0) (\lambda_{41}^+(s_0) - \lambda_{41}^-(s_0) + \nu \lambda_{42}^+(s_0) - \nu \lambda_{42}^-(s_0)) - \theta_1(s_*) (\lambda_{41}^+(s_*) - \lambda_{41}^-(s_*) + \nu \lambda_{42}^+(s_*) - \nu \lambda_{42}^-(s_*))] + V_1(s_0) (\lambda_{42}^+(s_0) + \lambda_{42}^-(s_0)) - V_1(s_*) (\lambda_{42}^+(s_*) + \lambda_{42}^-(s_*)) = 0.$$

2. Выделим решение экстремальной задачи для бесконечной свободной цилиндрической оболочки для условий локального нагрева зоны $-z_0 \leq z \leq z_0$ (z — осевая координата).

Рассмотрим случай, когда кольцевые напряжения и осевые сжимающие не превышают допустимых, т. е. необходимо учитывать только ограничения на величину растягивающих осевых напряжений $\sigma_1^\pm \leq \sigma_{21}^\pm$. Примем также, что $\sigma_{21}^+ = \sigma_{21}^- \equiv \sigma_2$. В этом случае $\varphi_{21}^+(s) = \varphi_{21}^-(s) \equiv \varphi_{21}(s)$, $\lambda_{41}^+ = \lambda_{41}^- \equiv \lambda_{41}$, $\lambda_{42}^\pm \equiv 0$.

Полагая в соотношениях (3), (6), (7) $k_1 = 0$, $k_2 = \frac{1}{R}$, $r = R$, $\dot{r} = 0$, $V_1(s_0) = 0$, $V_1(s_*) = 0$, $\theta_1(s_0) = 0$, $\theta_1(s_*) = 0$, получим систему уравнений Эйлера, разрешающее уравнение и выражения (6) в таком виде:

$$\begin{aligned} \frac{d^4 \mu_1}{dx^4} + \frac{3(1-\nu^2)}{h^2 R^2} \mu_1 + \frac{d^2 \mu_{31}}{dx^2} [S_+(x+x_0) - S_+(x-x_0)] &= 0, \\ (1-\nu^2)(\alpha T - \omega_0) - \frac{3(1-\nu^2)}{h^2 R} \mu_1 + \mu_2 + \sum_{i=0}^n \gamma_i x^i [S_+(x+x_0) - S_+(x-x_0)] &= 0, \\ \mu_2 \cos \varphi_1(x) [S_+(x+x_0) - S_+(x-x_0)] &= 0, \\ \mu_{31} \cos \varphi_{21}(x) [S_+(x+x_0) - S_+(x-x_0)] &= 0, \\ \frac{d^4 \omega_0}{dx^4} + 4(\omega_0 - \alpha T) &= 0, \end{aligned} \quad (8)$$

$$T = \frac{T_0}{2} (1 + \sin \varphi_1(x)) (S_+(x+x_0) - S_+(x-x_0)),$$

$$\left[\sigma_1 - \frac{\sigma_{21} - \sigma_{11}}{2} \left(\sin \varphi_{21}(x) + \frac{\sigma_{21} + \sigma_{11}}{\sigma_{21} - \sigma_{11}} \right) \right] (S_+(x+x_0) - S_+(x-x_0)) = 0.$$

Здесь $\omega_0 = \frac{w}{R}$, $x = a \frac{z}{R}$, $a^4 = \frac{3(1-\nu^2)R^2}{4h^2}$; $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \gamma_i$ — приведенные множители Лагранжа.

Пусть в области $-x_0 \leq x \leq x_0$ температура $T < T_0$ и напряжения $\sigma_1^\pm < \sigma_{21}$, за исключением, быть может, отдельных точек, где они достигают своего допустимого значения. Тогда $\cos \varphi_1(x) \neq 0$, $\cos \varphi_{21}(x) \neq 0$, т. е. $\mu_2 = 0$, $\mu_{31} = 0$.

Решая систему уравнений (8), находим

$$T = T_0 \left[\sum_{i=0}^n \zeta_i \left(x^i + \frac{4x^{i+4}}{(i+1)(i+2)(i+3)(i+4)} \right) + C_3 x^3 + C_2 x^2 + C_1 x + C_0 \right] \times [S_+(x+x_0) - S_+(x-x_0)], \quad (9)$$

$$\omega_0 = \frac{\alpha}{2} \int_{-\infty}^{\infty} T(\xi) e^{-|x-\xi|} [\cos(x-\xi) + \sin|x-\xi|] d\xi, \quad (10)$$

где ζ_i, C_i — приведенные множители Лагранжа и произвольные постоянные, которые будут использованы далее для удовлетворения условий локального нагрева.

Методику решения задачи проиллюстрируем для следующих условий локального нагрева зоны $-x_0 \leq x \leq x_0$ цилиндрической оболочки:

$$T(\pm x_0) = 0, \quad T(0) = T_0, \quad \dot{T}(0) = 0. \quad (11)$$

В этом случае температурное поле (9) при $\zeta_i = 0$ будет иметь вид

$$T = T_0 \left(1 - \frac{x^2}{x_0^2} \right). \quad (12)$$

Соответствующие температурные напряжения для бесконечной свободной цилиндрической оболочки определяются по формулам [3]

$$\sigma_1^\pm = \mp \frac{Eha^2}{(1-\nu^2)R} \cdot \frac{d^2\omega_0}{dx^2}, \quad (13)$$

$$\sigma_2^\pm = E(\omega_0 - \alpha T) + \nu\sigma_1^\pm. \quad (14)$$

Подставляя в (13) и (14) выражения (10), (12), для $x \geq 0$ запишем

$$\begin{aligned} \sigma_1^\pm = \mp \frac{a^2 E h \alpha T_0}{(1-\nu^2) R x_0^2} \{ & e^{-(x+x_0)} [(1+x_0) \cos(x+x_0) + x_0 \sin(x+x_0)] - \\ & - e^{-x} (\cos x - x_0^2 \sin x) - [e^{-(x-x_0)} ((1-x_0) \cos(x-x_0) - x_0 \sin(x-x_0)) - \\ & - e^{-x} (\cos x - x_0^2 \sin x)] S_+(x-x_0) + [e^{-(x_0-x)} ((1+x_0) \cos(x_0-x) + \\ & + x_0 \sin(x_0-x)) + e^{-x} (\cos x - x_0^2 \sin x) - 2] S_+(x_0-x) \}, \quad (15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_2^\pm = \frac{E \alpha T_0}{2x_0^2} \{ & e^{-(x+x_0)} [x_0 \cos(x+x_0) - (1+x_0) \sin(x+x_0)] + e^{-x} (x_0^2 \cos x + \\ & + \sin x) + [e^{-(x-x_0)} (x_0 \cos(x-x_0) + (1-x_0) \sin(x-x_0)) - e^{-x} (x_0^2 \cos x + \\ & + \sin x)] S_+(x-x_0) + [e^{-(x_0-x)} (x_0 \cos(x_0-x) - (1+x_0) \sin(x_0-x)) - \\ & - e^{-x} (x_0^2 \cos x + \sin x)] S_+(x_0-x) \} + \nu\sigma_1^\pm. \end{aligned}$$

На рис. 1 представлены графики зависимостей $\frac{\sigma_1^\pm}{E\alpha T_0}$, $\frac{\sigma_2^\pm}{E\alpha T_0}$, $\frac{T}{T_0}$ для $\nu = 0,3$; $\frac{R}{h} = 20; 40$ при ширине зоны нагрева, равной радиусу цилиндра.

Результаты исследований, приведенные на рис. 1, показывают, что для температурного поля (12) максимум осевых растягивающих напряжений на внеш-

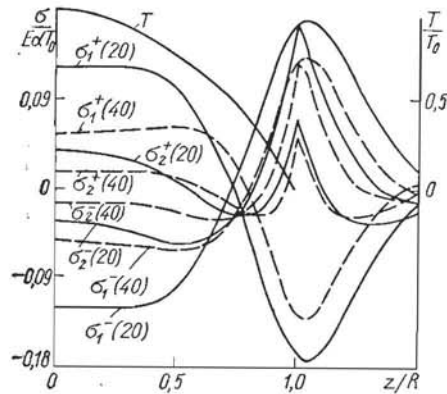


Рис. 1.

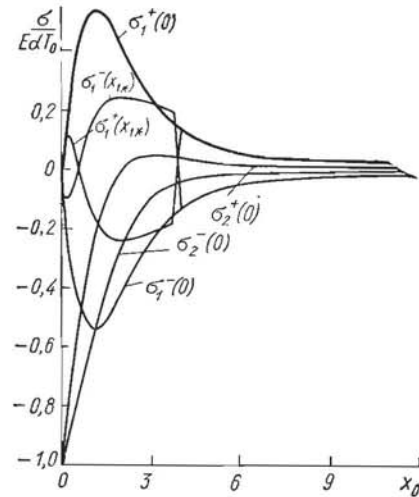


Рис. 2.

ней поверхности достигается в сечении $x = 0$, а на внутренней — в некотором сечении $x = x_1$.

На рис. 2 приведены графики зависимости напряжений в сечениях $x = 0$ и $x = x_1$ от параметра $x_0 = a \frac{z_0}{R}$. По данным этого рисунка можно установить наибольшую величину растягивающих напряжений на внешней или внутренней поверхности в зависимости от x_0 .

Рассмотрим методику определения оптимального температурного поля T в случае, когда растягивающие осевые напряжения, соответствующие температурному полю (12), превышают допустимые в зоне максимальной температуры. В этом случае, согласно выражению (6), примем, что в области $|x| < x_1$ ($0 < x_1 < x_0$) осевые растягивающие напряжения равны допустимым, т. е. $\sigma_1 = \sigma_{21} = m_1 \sigma_1(0)$. Здесь $0 < m < 1$, $\sigma_1(0)$ — растягивающие осевые напряжения в сечении $x = 0$, соответствующие температурному полю (12). Будем предполагать также, что температура в этой области меньше T_0 для всех точек, за исключением $x = 0$, в которой она достигает своего максимального значения, равного T_0 . Тогда в рассматриваемой области $|\varphi_1(x)| < \frac{\pi}{2}$, $\varphi_{21}(x) = \frac{\pi}{2}$ и, следовательно, $\mu_2 = 0$, $\mu_{21} \neq 0$. Из системы уравнений (8) и выражения (13) для напряжения σ_1^\pm , учитывая при этом, что

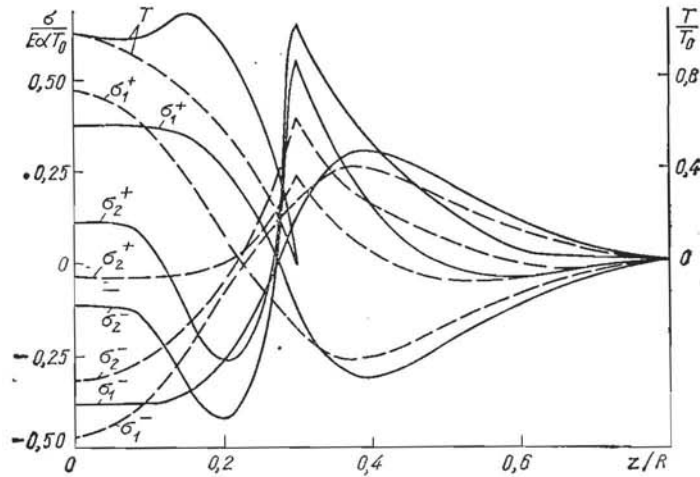


Рис. 3.

оно равно допустимому σ_{21} , получим следующее симметричное относительно сечения $x = 0$ температурное поле:

$$T = T_0 \frac{(1 - \nu^2) R \sigma_{21}}{2 E h \alpha a^2} x^2, \quad (16)$$

которое удовлетворяет условиям $T(0) = T_0$, $\dot{T}(0) = 0$. Функция прогибов w_0 для рассматриваемой области согласно выражению (6) запишется в виде

$$w_0 = \alpha T_0 - \frac{(1 - \nu^2) R \sigma_{21}}{2 E h a^2} x^2. \quad (17)$$

Отметим, что для выполнения условия $T > 0$ в области $|x| < x_1$ необходимо, чтобы $x_1 < \sqrt{\frac{2 E h \alpha a^2 T_0}{(1 - \nu^2) R \sigma_{21}}}$. Характерным является то, что в данном случае в области $|x| < x_1$ $\sigma_2^\pm = \nu \sigma_1^\pm$.

Температурное поле вне зоны ограничения, т. е. в областях $x_1 < x < x_0$, $-x_0 < x < -x_1$ представляется в виде (9). На основании выражений (9) при $\zeta_i = 0$ и (16) симметричное относительно сечения $x = 0$ экстремальное температурное поле T , удовлетворяющее условиям $T(\pm x_0) = 0$, $T(0) = T_0$, $\dot{T}(0) = 0$, запишется в виде

$$T = T_0 \left[\left(1 - \sqrt{\frac{1 - \nu^2}{3}} \cdot \frac{\sigma_{21}}{E \alpha} x^2 \right) S_+(x_1 - x) + (C_3 x^3 + C_2 x^2 + C_1 x + C_0) \times \right. \\ \left. \times (S_+(x - x_1) - S_+(x - x_0)) \right]. \quad (18)$$

Здесь C_i — произвольные постоянные, которые при заданном допустимом напряжении σ_{21} определяются из условий сопряжения температурного поля (18) для $x < x_1$ и $x > x_1$ в сечении $x = x_1$, условия $T(\pm x_0) = 0$, а также

из условия того, что функция прогибов w_0 в области $x < x_1$ определяется выражением (17).

Температурные напряжения определяются через функцию w_0 по формулам (13), (14).

На рис. 3 приведены графики экстремального температурного поля (18) и соответствующих ему температурных напряжений (сплошные линии) для $\nu = 0,3$; $\frac{R}{h} = 40$; $m_1 = 0,8$ при ширине зоны нагрева оболочки $|z| \leq 0,3R$. На этом же рисунке для сравнения штриховыми линиями нанесены графики экстремального температурного поля (12) и соответствующих ему температурных напряжений.

На рис. 4 приведены графики зависимости параметра x_1 , характеризующего ширину зоны ограничения растягивающих осевых напряжений, от коэффициента m_1 для $\frac{R}{h} = 20$ (сплошная линия) и $\frac{R}{h} = 40$ (штриховая) при ширине зоны нагрева оболочки $|z| \leq 0,3R$.

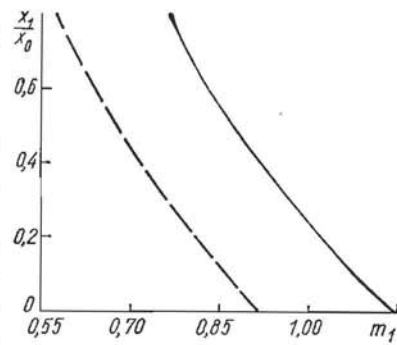


Рис. 4.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гельфанд И. М., Фомин С. В. Вариационное исчисление. Физматгиз, М., 1961.
2. Григолюк Э. И., Бурак Я. И., Подстригач Я. С.— ПМТФ, 1968, 4.
3. Підстригач Я. С., Ярема С. Я. Температурні напруження в оболонках. Вид-во АН УРСР, К., 1961.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию в сентябре 1973 г.

ОПТИМАЛЬНЫЕ ПЛАСТИЧЕСКИЕ ДЕФОРМАЦИИ В ПОЛОГОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ С КОЛЬЦЕВЫМ СВАРНЫМ ШВОМ

Л. П. Беседина, Н. Н. Тимошенко

Одним из методов снятия остаточных сварочных напряжений является метод создания дополнительных пластических деформаций, которые вместе с начальными остаточными сварочными обеспечивают оптимальное понижение уровня суммарных напряжений.

В данной работе с использованием методов вариационного исчисления определены такие оптимальные осесимметричные пластические деформации в пологой сферической оболочке с кольцевым сварным швом.

Рассмотрим пологую сферическую оболочку с круговым отверстием радиуса r_0 в полярной системе координат $\rho = \frac{r}{r_0}$ и θ . Вблизи отверстия расположен кольцевой сварной шов, в окрестности $\rho_1 \leq \rho \leq \rho_2$ которого имеются постоянные по толщине осесимметричные начальные остаточные деформации:

$$e_r^{(0)} = \varphi_0(\rho), \quad e_\theta^{(0)} = \psi_0(\rho). \quad (1)$$

Найдем оптимальные пластические деформации $e_r^{(p)}$, $e_\theta^{(p)}$, которые вместе с начальными остаточными $e_r^{(0)}$, $e_\theta^{(0)}$ вызывают в оболочке оптимально низкий уровень напряжений. Для этого рассмотрим энергию упругой деформации оболочки [1, 2], которая является интегральной мерой ее напря-