РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПЛОСКИХ ВОЛН В ТЕПЛОПРОВОДЯЩЕЙ СЛОИСТОЙ СРЕДЕ ЖИДКОСТЬ — ТВЕРДОЕ ТЕЛО

Р. Н. Швец, А. А. Лопатьев

В последнее время проведено ряд исследований, учитывающих взаимодействие полей деформации и температуры. Например, в работе [4] изучалось влияние взаимосвязанных объемных и температурных изменений в теле на распространение плоских гармонических волн. Изучены также вопросы, связанные с тепловой релаксацией в невязкой теплопроводящей жидкости [3].

В данной работе исследуется распространение и рассеяние плоских гармонических волн в среде жидкость — твердое тело с учетом термоупругих эффектов.

1. Рассматривая распространение плоских гармонических термоупругих волн в твердом теле, исходим из системы уравнений [2]

$$\mu\Delta\vec{u} + (\lambda+\mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{u} - (3\lambda+2\mu)\alpha_T\operatorname{grad}(T-T_0) = \rho_1\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2},$$

$$\Delta T - \frac{1}{a}(1+\varepsilon)\frac{\partial T}{\partial t} = 0, \tag{1}$$

$$\sigma_{ij} = \lambda e_{kk}\delta_{ij} + 2\mu e_{ij} - (3\lambda+2\mu)\alpha_T(T-T_0)\delta_{ij},$$

где λ, μ — коэффициенты Ляме; $\vec{u}$ — вектор перемещения; a — температуропроводность; T — температура; T_0 — начальная температура; α_T — коэффициент линейного расширения; ρ_1 — плотность; σ_{ij} — компоненты тензора напряжений; e_{ij} — компоненты тензора деформаций; $e_{kk} = e_{11}+e_{22}+e_{33}$; δ_{ij} — символ Кронекера; $\varepsilon = \frac{(3\lambda+2\mu)^2\alpha_T^2 T_0}{(\lambda+2\mu)c_e}$; c_e — теплоемкость единицы объема при постоянной деформации; Δ — оператор Лапласа.

Если вектор перемещений $\vec{u}$ представить в виде

$$\vec{u} = \operatorname{grad}\Phi + \operatorname{rot}\vec{\Psi}, \tag{2}$$

то потенциалы Φ и $\vec{\Psi}$ будут определяться из уравнений

$$\square^2\square_1^2\Phi - \frac{\varepsilon}{a}\frac{\partial}{\partial t}\Delta\Phi = 0, \tag{3}$$

$$\square_2^2\vec{\Psi} = 0,$$

а температура

$$T - T_0 = \frac{\lambda+2\mu}{(3\lambda+2\mu)\alpha_T}\square_1^2\Phi, \tag{4}$$

где

$$\square^2 = \Delta - \frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial t}; \quad \square_1^2 = \Delta - \frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}; \quad \square_2^2 = \Delta - \frac{1}{b_1^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2};$$

c_1, b_1 — скорости распространения упругих волн расширения и сдвига.

В случае гармонических волн Φ представляется в виде

$$\Phi = \sum_{j=1}^{2}\varphi_j e^{i\omega t},$$

причем φ удовлетворяет уравнению

$$(\Delta + k_1^2)(\Delta + k_2^2)\varphi = 0, \tag{5}$$

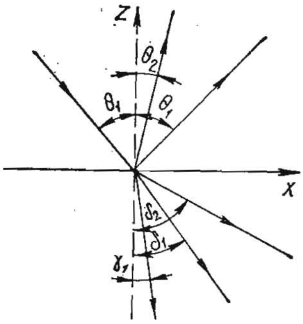
где k_1, k_2 определяются при решении биквадратного уравнения, а k_1^2, k_2^2 определяются формулой

$$k_1^2,\ k_2^2 = \frac{\omega^2}{2c_1^2}\left\{\left(1+\frac{1+\varepsilon}{\chi'}\right) \pm \left[1 - \frac{2(1-\varepsilon)}{\chi'} + \left(\frac{1+\varepsilon}{\chi'}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\right\}, \quad \chi' = \frac{ia\omega}{c_1^2}. \tag{6}$$

Корень k_1 характеризует квазиупругую, а корень k_2 — квазитепловую волны, которые подвергаются затуханию и дисперсии.

Таким образом, для температуры получим

$$T - T_0 = \frac{\lambda + 2\mu}{(3\lambda + 2\mu)\,\alpha_T} \sum_{j=1}^{2} \left(\frac{\omega^2}{c_1^2} - k_j^2\right) \varphi_j e^{i\omega t}. \tag{7}$$



Аналогичное выражение было получено в работе [3] при рассмотрении полной системы гидродинамических уравнений.

Движение невязкой акустической теплопроводящей жидкости можно описать уравнениями (3) — (4), положив в них $\mu = 0$, $\vec{\Psi} = 0$ и взяв соответствующие упругие постоянные для жидкости.

При переходе через границу раздела сред должны выполняться условия непрерывности нормальных и касательных напряжений, нормальных перемещений, а также равенство температуры и теплового потока, т. е.

$$\sigma_{zz}^{(1)} = \sigma_{zz},\quad \sigma_{xz}^{(1)} = 0,\quad u_z^{(1)} = u_z,$$
$$[T - T_0]^{(1)} = [T - T_0],\ K_1 \frac{\partial T^{(1)}}{\partial n} = K \frac{\partial T}{\partial n}. \tag{8}$$

Здесь индекс «1» вверху относится к твердому телу.

2. Рассмотрим падение под углом θ_1 плоской гармонической продольной волны из жидкости на границу ее с твердым телом (рисунок). Очевидно, поле возмущений в жидкости будет определяться падающей и отраженной упругой волнами, а также отраженной тепловой волной. В твердом теле возникнут преломленные упругая и тепловая волны, а также волна сдвига. Если падающую волну задавать потенциалом

$$\varphi_{\text{пад}} = Ae^{is_1(x\sin\theta_1 - z\cos\theta_1)}, \tag{9}$$

то систему волн в жидкости, опуская множитель $e^{i\omega t}$, можно записать в виде

$$\varphi = Ae^{is_1(x\sin\theta_1 - z\cos\theta_1)} + AV_1e^{is_1(x\sin\theta_1 + z\cos\theta_1)} + AV_2e^{is_2(x\sin\theta_2 + z\cos\theta_2)}. \tag{10}$$

Аналогично для твердого тела можно записать

$$\varphi_1 = AW_1e^{ik_1(x\sin\delta_1 - z\cos\delta_1)} + AW_2e^{ik_2(x\sin\delta_2 - z\cos\delta_2)},$$
$$\psi_1 = AP_1e^{i\varkappa_1(x\sin\gamma_1 - z\cos\gamma_1)}, \tag{11}$$

где A, AV_1, AV_2 — амплитуды падающей, отраженной упругой и отраженной тепловой волн в жидкости; AW_1, AW_2, AP_1 — амплитуды преломленной упругой и тепловой волн, а также возникающей в твердом теле волны сдвига.

Удовлетворяя граничным условиям (8), нетрудно получить систему пяти линейных уравнений относительно пяти неизвестных амплитуд V_1, V_2, W_1, W_2, P_1:

$$\frac{1}{m}(1 + V_1 + V_2) = (W_1 + W_2)\cos 2\gamma_1 - P_1\sin 2\gamma_1,$$
$$k_1^2 \sin 2\delta_1\left(W_1 + \frac{Z_1}{Z_2}W_2\right) + \varkappa_1^2 P_1\cos 2\gamma_1 = 0, \tag{12}$$

$$s_1\cos\theta_1\left(V_1-1+\frac{Z}{Z_4}V_2\right)=-\left(W_1+\frac{Z_1}{Z_2}W_2\right)k_1\cos\delta_1+\varkappa_1P_1\sin\gamma_1,$$

$$\frac{\lambda+2\mu}{(3\lambda+2\mu)\,\alpha_T}\left[\left(\frac{\omega^2}{c_1^2}-k_1^2\right)\frac{1}{k_1}W_1+\left(\frac{\omega^2}{c_1^2}-k_2^2\right)\frac{1}{k_2}W_2\right]=$$

$$=\frac{1}{\beta}\left[\left(\frac{\omega^2}{v_1^2}-s_1^2\right)\frac{1}{s_1}(1+V_1)+\left(\frac{\omega^2}{v_1^2}-s_2^2\right)\frac{1}{s_2}V_2\right],$$

$$K_1\frac{\lambda+2\mu}{(3\lambda+2\mu)\,\alpha_T}\left[\left(\frac{\omega^2}{c_1^2}-k_1^2\right)W_1+\left(\frac{\omega^2}{c_1^2}-k_2^2\right)W_2\right]=$$

$$=K\frac{1}{\beta}\left[\left(\frac{\omega^2}{v_1^2}-s_1^2\right)(1+V_1)+\left(\frac{\omega^2}{v_1^2}-s_2^2\right)V_2\right],$$

где K, K_1 — коэффициенты теплопроводности жидкости и твердого тела; $m=\frac{\rho_1}{\rho}$; ρ — плотность жидкости; β — коэффициент объемного расширения жидкости;

$$Z=\frac{\rho v_1}{\cos\theta_1},\quad Z_4=\frac{\rho v_2}{\cos\theta_2},\quad Z_1=\frac{\rho_1c_1}{\cos\delta_1},\quad Z_2=\frac{\rho_1c_2}{\cos\delta_2};\tag{13}$$

v_1 — скорость упругой волны сжатия в жидкости; v_2 — скорость тепловой волны в жидкости; c_1 — скорость упругой безвихревой волны в твердом теле; c_2 — скорость тепловой волны в твердом теле.

Если пренебречь тепловыми эффектами в жидкости, то, требуя на границе $z=0$ отсутствия теплового потока из твердого тела в жидкость (при предыдущих условиях на механические характеристики), получаем систему четырех уравнений относительно четырех неизвестных, т. е.

$$\frac{1}{m}(1+V_1)=(W_1+W_2)\cos2\gamma_1-P_1\sin2\gamma_1,$$

$$k_1^2\sin2\delta_1\left(W_1+\frac{Z_1}{Z_2}W_2\right)+\varkappa_1^2P_1\cos2\gamma_1=0,$$

$$s_1\cos\theta_1(V_1-1)=-\left(W_1+\frac{Z_1}{Z_2}W_2\right)k_1\cos\theta_1+\varkappa_1P_1\sin\gamma_1,\tag{14}$$

$$\left(\frac{\omega^2}{c_1^2}-k_1^2\right)W_1+\left(\frac{\omega^2}{c_1^2}-k_2^2\right)W_2=0.$$

Решая эту систему относительно V_1, W_1, W_2 и P_1, после некоторых преобразований находим

$$V_1=\frac{1}{N_1}(a_1Z_1\cos^2 2\gamma_1+Z_t\sin^2 2\gamma_1-Z),$$

$$P_1=-\frac{1}{N_1}\frac{\rho}{\rho_1}2Z_t\sin2\gamma_1,\quad W_1=a_1\frac{k_2^2-\frac{\omega^2}{c_1^2}}{k_2^2-k_1^2}\cdot\frac{\rho}{\rho_1}\cdot\frac{1}{N_1}2Z_1\cos2\gamma_1,$$

$$W_2=-a_1\frac{k_1^2-\frac{\omega^2}{c_1^2}}{k_2^2-k_1^2}\cdot\frac{\rho}{\rho_1}\cdot\frac{1}{N_1}2Z_1\cos2\gamma_1,\tag{15}$$

$$W_1+W_2=a_1\frac{\rho}{\rho_1}\cdot\frac{1}{N_1}2Z_1\cos2\gamma_1,$$

где

$$a_1=\frac{(k_2^2-k_1^2)\,Z_2}{Z_2\left(k_2^2-\frac{\omega^2}{c_1^2}\right)-Z_1\left(k_1^2-\frac{\omega^2}{c_1^2}\right)},\quad Z_t=\frac{\rho_1b_1}{\cos\gamma_1},\quad N_1=a_1Z_1\cos^2 2\gamma_1+$$

$$+Z_t\sin^2 2\gamma_1+Z.\tag{16}$$

3. Рассмотрим случай, когда на границу раздела из твердого тела падает продольная волна, амплитуду потенциала которой обозначим A_1. Эта волна возбуждает систему волн, которую можно записать в виде

$$\varphi = D_1 e^{is_1(x\sin\theta_1+z\cos\theta_1)} + D_2 e^{is_2(x\sin\theta_2+z\cos\theta_2)} —$$

упругая и тепловая волны в жидкости,

$$\varphi_1 = Ae^{ik_1(x\sin\delta_1+z\cos\delta_1)} + B_1 e^{ik_1(x\sin\delta_1-z\cos\delta_1)} + B_2 e^{ik_2(x\sin\delta_2-z\cos\delta_2)} —$$

падающая, отраженная упругая и отраженная тепловая волны,

$$\psi_1 = B_t e^{i\varkappa_1(x\sin\gamma_1-z\cos\gamma_1)} —$$

отраженная поперечная волна.

Используя граничные условия, находим систему пяти уравнений относительно пяти неизвестных

$$\begin{gathered}
\frac{1}{m}(D_1 + D_2) = (A_1 + B_1 + B_2)\cos 2\gamma_1 - B_t\sin 2\gamma_1, \\
-k_1^2\sin 2\delta_1\left(A_1 - B_1 - \frac{Z_1}{Z_2}B_2\right) + \varkappa_1^2 B_t\cos 2\gamma_1 = 0, \\
s_1\cos\theta_1\left(D_1 + \frac{Z}{Z_4}D_2\right) = k_1\cos\delta_1\left(A_1 - B_1 - \frac{Z_1}{Z_2}B_2\right) + \varkappa_1\sin\gamma_1 B_t, \\
\frac{\lambda+2\mu}{(3\lambda+2\mu)\alpha_T}\left[\left(\frac{\omega^2}{c_1^2} - k_1^2\right)\frac{1}{k_1}(A_1 + B_1) + \left(\frac{\omega^2}{c_1^2} - k_2^2\right)\frac{1}{k_2}B_2\right] = \\
= \frac{1}{\beta}\left[\left(\frac{\omega^2}{v_1^2} - s_1^2\right)\frac{1}{s_1}D_1 + \left(\frac{\omega^2}{v_1^2} - s_2^2\right)\frac{1}{s_2}D_2\right], \qquad (17) \\
K_1\frac{\lambda+2\mu}{(3\lambda+2\mu)\alpha_T}\left[\left(\frac{\omega^2}{c_1^2} - k_1^2\right)(A_1 + B_1) + \left(\frac{\omega^2}{c_1^2} - k_2^2\right)B_2\right] = \\
= K\frac{1}{\beta}\left[\left(\frac{\omega^2}{v_1^2} - s_1^2\right)D_1 + \left(\frac{\omega^2}{v_1^2} - s_2^2\right)D_2\right].
\end{gathered}$$

При учете температурных изменений только в твердом теле получим систему четырех уравнений относительно четырех неизвестных, из которой получаем

$$V' = \frac{B_1}{A_1} =$$

$$= \frac{Z + Z_t\sin^2 2\gamma_1 - Z_1\cos^2 2\gamma_1 + M\left[Z\left(\cos 2\gamma_1\frac{Z_1}{Z_2} + 2\sin^2\gamma_1\right) + Z_t\sin^2 2\gamma_1 + Z_1\cos^2 2\gamma_1\right]}{Z + Z_t\sin^2 2\gamma_1 + Z_1\cos^2 2\gamma_1 - M\left[Z\left(\cos 2\gamma_1\frac{Z_1}{Z_2} + 2\sin^2\gamma_1\right) + Z_t\sin^2 2\gamma_1 + Z_1\cos^2 2\gamma_1\right]}, \qquad (18)$$

$$M = \frac{\dfrac{\omega^2}{c_1^2} - k_1^2}{\dfrac{\omega^2}{c_1^2} - k_2^2}, \quad \frac{D_1}{A_1} = \frac{v_1\cos\delta_1}{c_1\cos\theta_1\cos 2\gamma_1}\left(L_1 - L_2\frac{B_1}{A_1}\right),$$

$$\frac{B_2}{A_1} = -M\left(1 + \frac{B_1}{A_1}\right), \quad \frac{B_t}{A_1} = \left(\frac{b_1}{c_1}\right)^2\frac{\sin 2\delta_1}{\cos 2\gamma_1}\left(L_1 - L_2\frac{B_1}{A_1}\right),$$

где

$$L_1 = 1 + \frac{Z_1}{Z_2}M, \quad L_2 = 1 - \frac{Z_1}{Z_2}M.$$

4. Рассмотрим случай распространения волн параллельно поверхности раздела. Найдем комплексный угол θ_1, при котором появляются волны

Рэлея в упругом полупространстве. Для этого необходимо приравнять нулю знаменатель выражения (18), т. е.

$$Z_1 \cos^2 2\gamma_1 + Z_t \sin^2 2\gamma_1 + Z - M [Z_1 \cos^2 2\gamma_1 + \\ + Z_t \sin^2 2\gamma_1 + Z \left(\cos 2\gamma_1 \frac{Z_1}{Z_2} + 2 \sin^2 \gamma_1\right)\Big] = 0. \tag{19}$$

Так как фазовая скорость волны v_R вдоль границы будет

$$v_R = \frac{b_1}{\sin \gamma_1},$$

то, вводя обозначения

$$r = \left(\frac{b_1}{v_1}\right)^2, \quad q = \left(\frac{b_1}{c_1}\right)^2, \quad s = \sin^2 \gamma_1 = \left(\frac{b_1}{v_R}\right)^2, \tag{20}$$

после несложных преобразований получаем уравнение

$$4s\sqrt{1-s}\sqrt{q-s} + (1-2s)^2 = -\frac{\rho}{\rho_1}\sqrt{\frac{q-s}{r-s}} - \\ - M\left\{4s\sqrt{1-s}\sqrt{q-s} + (1-2s)^2 + \frac{\rho}{\rho_1}\sqrt{\frac{q-s}{r-s}}\left[(1-2s)\frac{Z_1}{Z_2} + 2s\right]\right\}.$$

В правой части этого уравнения первое слагаемое характеризует влияние жидкости, а остальные — связаны с учетом термоупругих эффектов в твердом теле. Если пренебречь превращением механической энергии в тепловую, т. е. положить $\varepsilon = 0$, то получим уравнение, исследованное в [1]. Температурные волны с удалением от границы раздела очень быстро затухают, и поэтому тепловое возмущение будет в основном сконцентрировано в узком слое вдоль границы. В предположении, что ε мало, из формул (15) следует, что амплитуда тепловой волны W_2 значительно меньше амплитуды упругой волны W_1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. Изд-во АН СССР, М., 1957.
2. Коваленко А. Д. Основы термоупругости. «Наукова думка», К., 1970.
3. Физическая акустика. Под ред. У. Мэзона. Ч. А. Т. 1. «Мир», М., 1966.
4. Schadwick P., Sneddon I. N.—J. Mech. Phys. Sol., 1958, 6, 3.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию в ноябре 1973 г.

КОЛЕБАНИЯ ОРТОТРОПНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ТИПА ТИМОШЕНКО, СОПРИКАСАЮЩЕЙСЯ СО СЛОЕМ ЖИДКОСТИ

Р. Н. Швец, Р. А. Марчук

1. Рассмотрим упругие колебания бесконечной круговой цилиндрической оболочки, соприкасающейся с невязкой сжимаемой жидкостью. Движение жидкости предполагается безвихревым. Область, заполненная жидкостью, имеет форму полости между двумя круговыми цилиндрами. Одна стенка полости — гибкая оболочка радиуса R_1, материал которой обладает ортотропными свойствами, вторая — абсолютно жесткая радиуса R_2.

Введем цилиндрические координаты (r_1, θ, x_1), совместив полярную ось x_1 с осью оболочки. Прогибы оболочки и перемещения частиц жидкости будем считать достаточно малыми, чтобы задачу можно было рассматривать в линейной постановке [1]. Сжимаемость жидкости учитывается в акустическом приближении.

Линейные уравнения движения ортотропной цилиндрической оболочки [4, 5] толщиной $2h$, учитывающие перерезывающие силы и инерцию