

Рэлея в упругом полупространстве. Для этого необходимо приравнять нулю знаменатель выражения (18), т. е.

$$Z_1 \cos^2 2\gamma_1 + Z_t \sin^2 2\gamma_1 + Z - M \left[Z_1 \cos^2 2\gamma_1 + Z_t \sin^2 2\gamma_1 + Z \left(\cos 2\gamma_1 \frac{Z_1}{Z_2} + 2 \sin^2 \gamma_1 \right) \right] = 0. \quad (19)$$

Так как фазовая скорость волны v_R вдоль границы будет

$$v_R = \frac{b_1}{\sin \gamma_1},$$

то, вводя обозначения

$$r = \left(\frac{b_1}{v_1} \right)^2, \quad q = \left(\frac{b_1}{c_1} \right)^2, \quad s = \sin^2 \gamma_1 = \left(\frac{b_1}{v_R} \right)^2, \quad (20)$$

после несложных преобразований получаем уравнение

$$4s \sqrt{1-s} \sqrt{q-s} + (1-2s)^2 = -\frac{\rho}{\rho_1} \sqrt{\frac{q-s}{r-s}} - M \left\{ 4s \sqrt{1-s} \sqrt{q-s} + (1-2s)^2 + \frac{\rho}{\rho_1} \sqrt{\frac{q-s}{r-s}} \left[(1-2s) \frac{Z_1}{Z_2} + 2s \right] \right\}.$$

В правой части этого уравнения первое слагаемое характеризует влияние жидкости, а остальные — связаны с учетом термоупругих эффектов в твердом теле. Если пренебречь превращением механической энергии в тепловую, т. е. положить $\epsilon = 0$, то получим уравнение, исследованное в [1]. Температурные волны с удалением от границы раздела очень быстро затухают, и поэтому тепловое возмущение будет в основном сконцентрировано в узком слое вдоль границы. В предположении, что ϵ мало, из формул (15) следует, что амплитуда тепловой волны W_2 значительно меньше амплитуды упругой волны W_1 .

ЛИТЕРАТУРА

1. Б р е х о в с к и х Л. М. Волны в слоистых средах. Изд-во АН СССР, М., 1957.
2. К о в а л е н к о А. Д. Основы термоупругости. «Наукова думка», К., 1970.
3. Физическая акустика. Под ред. У. Мэзона. Ч. А. Т. 1. «Мир», М., 1966.
4. S c h a d w i c k P., S n e d d o n I. N.—J. Mech. Phys. Sol., 1958, 6, 3.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию в ноябре 1973 г.

КОЛЕБАНИЯ ОРТОТРОПНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ТИПА ТИМОШЕНКО, СОПРИКАСАЮЩЕЙСЯ СО СЛОЕМ ЖИДКОСТИ

Р. Н. Швец, Р. А. Марчук

1. Рассмотрим упругие колебания бесконечной круговой цилиндрической оболочки, соприкасающейся с невязкой сжимаемой жидкостью. Движение жидкости предполагается безвихревым. Область, заполненная жидкостью, имеет форму полости между двумя круговыми цилиндрами. Одна стенка полости — гибкая оболочка радиуса R_1 , материал которой обладает ортотропными свойствами, вторая — абсолютно жесткая радиуса R_2 .

Введем цилиндрические координаты (r_1, θ, x_1) , совместив полярную ось x_1 с осью оболочки. Прогибы оболочки и перемещения частиц жидкости будем считать достаточно малыми, чтобы задачу можно было рассматривать в линейной постановке [1]. Сжимаемость жидкости учитывается в акустическом приближении.

Линейные уравнения движения ортотропной цилиндрической оболочки [4, 5] толщиной $2h$, учитывающие перерезывающие силы и инерцию

поворота, в безразмерных ортогональных отнесенных к радиусу R_1 координатах x, θ имеют вид

$$\begin{aligned} L_{11}u + L_{12}v + L_{13}w &= a_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \quad L_{21}u + L_{22}v + L_{23}w + \frac{a_2}{\varepsilon_2} \gamma_\theta = a_1 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}; \\ L_{31}u + L_{32}v - L_{33}w - L_{34}\gamma_x - L_{35}\gamma_\theta &= -a_1 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{p}{k_0} \text{sign } \Delta R \right); \\ &- \frac{1}{k^2} L_{43}w + L_{44}\gamma_x + L_{45}\gamma_\theta = -a_1 \frac{\partial^2 \gamma_x}{\partial t^2}; \\ \frac{a_2}{k^2 \varepsilon_2} v - \frac{1}{k^2} L_{53}w + L_{54}\gamma_x + L_{55}\gamma_\theta &= -a_1 \frac{\partial^2 \gamma_\theta}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь

$$\begin{aligned} L_{11} &= a_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}; \quad L_{12} = L_{21} = (1 + a_{12}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta}; \\ L_{22} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + a_2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{a_2}{\varepsilon_2}; \quad L_{13} = L_{31} = a_{12} \frac{\partial}{\partial x}; \\ L_{33} &= \frac{a_1}{\varepsilon_1} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{a_2}{\varepsilon_1} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - a_2; \quad L_{23} = L_{32} = a_2 \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_2} \right) \frac{\partial}{\partial x}; \\ L_{44} &= a_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{a_1}{k^2 \varepsilon_1}; \quad L_{43} = L_{34} = \frac{a_1}{\varepsilon_1} \frac{\partial}{\partial x}; \\ L_{55} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + a_2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{a_2}{\varepsilon_2}; \quad L_{35} = L_{53} = \frac{a_2}{\varepsilon_2} \frac{\partial}{\partial \theta}; \quad L_{45} = L_{54} = (1 + a_{12}) \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta}; \\ a_i &= \frac{E_i}{G_{12}(1 - \nu_{12}\nu_{21})}; \quad \varepsilon_i = \frac{E_i}{k'G_{13}(1 - \nu_{12}\nu_{21})} \quad (i = 1, 2); \\ p &= P \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21}}{E_1}; \quad k_0 = \frac{2h}{R_1}; \quad k = \frac{1}{2\sqrt{3}} k_0; \quad c_1^2 = \frac{E_1}{\rho_1(1 - \nu_{12}\nu_{21})}; \quad t = \frac{c_1 t_1}{R_1}; \\ a_{12} &= \nu_{21} a_1 = \nu_{12} a_2; \quad \Delta R = R_2 - R_1; \end{aligned}$$

u, v, w — безразмерные компоненты перемещений срединной поверхности оболочки, отнесенные к радиусу R_1 ; γ_x, γ_θ — углы поворота нормали; t_1 — время; P — давление жидкости на стенку оболочки; ρ_1 — плотность материала оболочки; ν_{ij} — коэффициенты Пуассона; k' — коэффициент сдвига; E_i, G_{ij} — модули упругости при растяжении и сдвиге; модулями G_{13} учитывается анизотропия упругих свойств по толщине оболочки.

Уравнения системы (1) описывают движения упругой цилиндрической оболочки, ортотропия материала которой совпадает с ее главными кривизнами и направлением нормали к срединной поверхности. Нормаль направлена в сторону выпуклости поверхности.

При определении давления P , которое испытывает оболочка со стороны жидкости, будем считать, что при отсутствии колебаний оболочки жидкость неподвижна. В этом случае безразмерный потенциал скорости φ связан с безразмерным давлением p соотношением [1, 2]

$$p = -\rho \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right]_{r=1}, \quad (2)$$

где $\rho = \frac{\rho_0}{\rho_1}$; $\varphi_1 = R_1 c_1 \varphi$; $r = \frac{r_1}{R_1}$; ρ_0 — массовая плотность жидкости; φ_1 — потенциал скоростей. Потенциал скоростей φ_1 удовлетворяет волновому уравнению в безразмерной форме

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{1}{\mu^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \quad (3)$$

и граничным условиям

$$\left[\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right]_{r=1} = \frac{\partial w}{\partial t}; \quad \left[\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right]_{r=\alpha} = 0. \quad (4)$$

Здесь $\mu = \frac{c_0}{c_1}$; $\alpha = \frac{R_2}{R_1}$; c_0 — скорость звука в жидкости.

2. Рассмотрим распространение гармонических волн в системе оболочка — жидкость. В этом случае имеем

$$\begin{aligned} \{u, w, \gamma_x, \varphi\} &= \{u_0, w_0, \gamma_x^0, \varphi_0\} \cos n\theta \exp [i (\xi x - \lambda t)]; \\ \{v, \gamma_\theta\} &= \{v_0, \gamma_\theta^0\} \sin n\theta \exp [i (\xi x - \lambda t)], \end{aligned} \quad (5)$$

где $u_0, v_0, w_0, \gamma_x^0, \gamma_\theta^0$ — амплитуды волн; n — количество полуволн по окружности поперечного сечения оболочки; ξ — безразмерное волновое число; λ — безразмерная круговая частота. Подставляя выражения (5) в уравнение (3) и учитывая граничные условия (4), находим

$$\varphi = i\lambda w_0 F_n(\beta r) \exp [i (\xi x - \lambda t)] \cos n\theta, \quad (6)$$

где

$$F_n(\beta r) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon\beta} \frac{I'_n(\xi\beta\alpha) K_n(\xi\beta r) - K'_n(\xi\beta\alpha) I_n(\xi\beta r)}{K'_n(\xi\beta\alpha) I'_n(\xi\beta) - I'_n(\xi\beta\alpha) K'_n(\xi\beta)} & (c < \mu); \\ \frac{1}{i\xi\beta} \frac{J'_n(i\xi\beta\alpha) Y'_n(i\xi\beta r) - Y'_n(i\xi\beta\alpha) J_n(i\xi\beta r)}{Y'_n(i\xi\beta\alpha) J'_n(i\xi\beta) - Y'_n(i\xi\beta) J'_n(i\xi\beta\alpha)} & (c > \mu). \end{cases} \quad (7)$$

Здесь $\beta^2 = \xi^2 \left(1 - \frac{c^2}{\mu^2}\right)$; $c = \frac{\lambda}{\xi}$ — безразмерная фазовая скорость; I_n, K_n, J_n, Y_n — бесселевы функции n -го порядка действительного и мнимого аргумента; знак «штрих» обозначает дифференцирование по всему аргументу. На основании выражений (2) и (6) давление жидкости на оболочку можно выразить через прогиб

$$p = \rho F_n(\beta) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}; \quad F_n(\beta) = [F_n(\beta r)]_{r=1}. \quad (8)$$

Учитывая полученные результаты, правый член третьего уравнения системы (1) записываем в виде

$$-a_1 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{p}{k_0} \text{sign } \Delta R \right) = -a_1 (1 + m_n) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \quad (9)$$

Величина

$$m_n = \frac{\delta}{k} F_n(\beta) \text{sign } \Delta R \left(\delta = \frac{\rho_0}{2\rho_1 \sqrt{3}} \right) \quad (10)$$

характеризует противодействие среды колебанию оболочки в пределах данного тона и называется присоединенной массой жидкости. Эта величина растет при уменьшении размера кольцевой полости ΔR . При $R_2 \rightarrow 0$ из формулы (10) получим решение для случая колебаний оболочки, наполненной жидкостью [1, 3, 6], а при $R_2 \rightarrow \infty$ и $c < \mu$ — для случая колебания оболочки, находящейся в бесконечной акустической среде. При $c > \mu$ выражение (10) не может быть использовано при исследовании колебаний оболочки в неограниченной жидкой среде, поскольку оно включает в себя расходящиеся и сходящиеся волны.

Уравнения (1) с учетом равенства (9) могут быть использованы как при исследовании собственных колебаний цилиндрической оболочки в жидкости в достаточно широком диапазоне частот, так и при исследовании в системе оболочка — жидкость распространения волн, длина которых больше радиуса оболочки или, по крайней мере, больше его порядка.

Подставляя выражения (5) в уравнения (1), в случае бесконечной оболочки находим характеристическое уравнение, левую часть которого запишем в виде детерминанта

$$\det (A_{ij}) = 0 \quad (i, j = 1, 2, \dots, 5). \quad (11)$$

Здесь

$$\begin{aligned} A_{ij} &= A_{ji}; \quad A_{11} = -(a_1 \xi^2 + n^2 - a_1 \lambda^2); \quad A_{12} = (1 + a_{12}) n \xi i; \\ A_{22} &= \xi^2 + a_2 n^2 + \frac{a_2}{\varepsilon_2} - a_1 \lambda^2; \quad A_{13} = a_{12} \xi i; \quad A_{23} = a_2 \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_2}\right) n; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{33} &= \frac{a_1}{\varepsilon_1} \xi^2 + \frac{a_2}{\varepsilon_2} n^2 + a_2 - a_1 \lambda^2 (1 + m_n); & A_{25} &= -\frac{a_2}{\varepsilon_2}; \\
A_{44} &= -k^2 \left(a_1 \xi^2 + n^2 + \frac{a_1}{\varepsilon_1 k^2} + a_1 \lambda^2 \right); & A_{34} &= -\frac{a_1}{\varepsilon_1} \xi i; & A_{35} &= -\frac{a_2}{\varepsilon_2} n; \\
A_{55} &= k^2 \left(\xi^2 + a_2 n^2 + \frac{a_2}{\varepsilon_2 k^2} + a_1 \lambda^2 \right); & A_{45} &= k^2 (1 + a_{12}) n \xi i; \\
A_{14} &= A_{15} = A_{24} = 0; & i &= \sqrt{-1}.
\end{aligned}$$

Соотношение (11), описывающее неосесимметричные колебания рассматриваемой системы оболочка — жидкость, является трансцендентным уравнением, которое связывает величины ξ и λ . Это уравнение имеет бесчисленное множество действительных корней, которые характеризуют такое же количество форм колебаний, отличающихся между собой распределением смещений.

Фазовая скорость c^* распространения волн в оболочке имеет вид

$$c^* = \frac{\lambda}{\xi} c_1 \left(c = \frac{c^*}{c_1} \right), \quad (12)$$

где ξ — корни уравнения (11), которые характеризуют расходящиеся волны, соответствующие разным типам колебаний.

При $\alpha = 0$, $v_{12} = v_{21} = v$; $E_1 = E_2$ и $G_{13} \neq G_{12}$ уравнения (11) описывают колебания трансверсально изотропной, а при $G_{13} = G_{12}$ — изотропной упругой оболочек, наполненных жидкостью.

3. В случае осесимметричных движений оболочки ($n = 0$) дисперсионное уравнение с учетом выражения (12) запишется так:

$$\begin{aligned}
&\lambda^4 k^2 (1 - \eta_1 c^2) (1 - \eta_0 c^2) \left[1 - \frac{\eta^*}{k^2} c^2 (1 + m_0) \right] + \\
&+ \lambda^2 c^2 (1 - \eta_0 c^2) \left[\eta^* (1 - v_{12} v_{21}) m - \eta^* \eta_1 m c^2 - c^2 \frac{1 - \eta_1 c^2}{1 - \eta_0 c^2} (1 + m_0) \right] + \\
&+ c^4 m (1 - v_{12} v_{21} - \eta_1 c^2) = 0, \quad (13)
\end{aligned}$$

где

$$m = \frac{E_2}{E_1}; \quad \eta^* = \frac{k^2 E_1}{k' G_{13} (1 - v_{12} v_{21})}; \quad m_0 = [m_n]_{n=0};$$

η_0, η_1 — «трассеры», принимающие значения либо нуль, либо единица в зависимости от того, учитывается или нет инерция вращения и инерция продольного перемещения оболочки соответственно. При $v_{ij} = 0$ уравнение (13) распадается на два уравнения, одно из которых определяет фазовую скорость продольных колебаний, второе — фазовую скорость радиальных колебаний с учетом вращательного движения оболочки и движения жидкости. В противном случае ($v_{ij} \neq 0$) они взаимосвязаны.

В пределе, при $\lambda = 0$, т. е. в случае длинных волн, получим

$$\eta_1 (m - f_0) c^4 - [m (1 - v_{12} v_{21} + \eta_1 \mu^2) - f_0] c^2 + m \mu^2 (1 - v_{12} v_{21}) = 0, \quad (14)$$

где $f_0 = \frac{2\delta\mu^2}{k(1-\alpha^2)} \text{sign } \Delta R$ — всегда отрицательная величина.

В случае, когда $c \rightarrow \infty$, имеем уравнение

$$\eta_0 \eta^* (\lambda^2 + \lambda^2 m_0^* - m) - (1 + m_0^*) = 0, \quad (16)$$

где

$$m_0^* = \frac{\delta\mu}{k\lambda} \cdot \frac{J_1\left(\frac{\lambda}{\mu}\alpha\right)Y_0\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) - Y_1\left(\frac{\lambda}{\mu}\alpha\right)J_0\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)}{J_1\left(\frac{\lambda}{\mu}\alpha\right)Y_1\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) - Y_1\left(\frac{\lambda}{\mu}\alpha\right)J_1\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)}.$$

В общем случае дисперсионное уравнение (13), которое связывает фазовую скорость с частотой λ , включает в себя безразмерные параметры η^* , m , v_{ij} , ρ , μ , k , α , характеризующие упругие свойства оболочки в жидкости, а также геометрию полости с оболочкой.

На рис. 1—3 представлены дисперсионные кривые для первых нескольких типов колебаний изотропной и ортотропной оболочек. При этом принималось $\frac{h}{R_1} = \frac{1}{16}$; $k' = \frac{5}{6}$; $\rho = \frac{1}{7,8}$; $\mu = 0,3$; $\alpha = 0,5$; 2. Сплошные кривые соответствуют изотропной оболочке с параметрами $m = 1$; $\nu = 0,3$; $E = 2G_{13}(1 + \nu)$. Штриховыми линиями показаны колебания ортотропной оболочки с параметрами $\nu_{12} = 0,3$; $\nu_{21} = 0,15$; $m = 0,5$; $\frac{E_1}{G_{13}} = 40$.

Из анализа уравнения (13) и рис. 1, 2 видно, что при $\lambda \rightarrow \infty$ все дисперсионные кривые имеют асимптотой прямую $c = \mu = 0,3$. Безразмерная фазовая скорость основного (нулевого) типа (a_0) колебаний всегда меньше μ и существует, как и в случае первого типа (a_1), для всего диапазона частот. С уменьшением величины μ кривая нулевого типа колебаний приближается к асимптоте $c = \mu$. Последующие типы колебаний существуют для частот выше критических.

На рис. 1 приведены для сравнения кривые первых двух типов колебаний для пустой ортотропной (штрихпунктирная линия) и изотропной (штрихпунктирная линия с двумя точками) оболочек. Нулевой тип колебаний для пустой оболочки не существует. Как видно из рисунка, жидкость существенно влияет на фазовые скорости распространения волн.

На рис. 1 показаны зависимости фазовых скоростей c от частоты λ в случае, когда жидкость и жесткая стенка находятся внутри оболочки

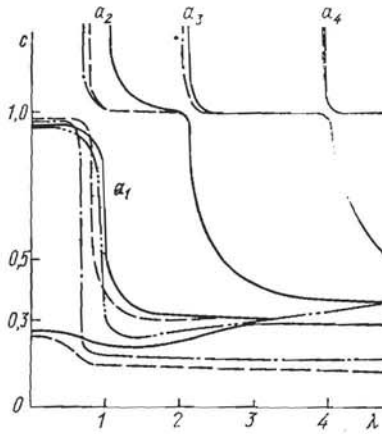


Рис. 1.

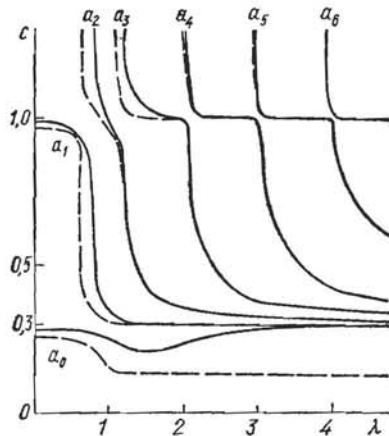


Рис. 2.

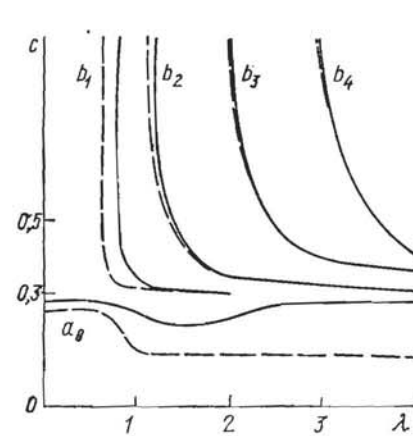


Рис. 3.

($R_1 = 2R_2$), а на рис. 2 — когда жидкость и жесткая стенка находятся вне оболочки ($R_2 = 2R_1$). Во втором случае с увеличением отношения $\frac{R_2}{R_1}$ дисперсионные кривые ложатся гуще.

На рис. 3 приведены кривые фазовых скоростей при $R_2 = 2R_1$ для случая, когда не учитывались продольные инерционные силы ($\eta_1 = 0$). Из сравнения рис. 2 и 3 видно, что инерционные силы значительно влияют на волновое движение со скоростями $c > \mu$ и это влияние, как следует из выражения (15), уменьшается при $c \rightarrow \infty$.

Анизотропия материала, как следует из рисунков и формулы (14), значительно влияет на фазовые скорости распространения волн для первых

типов колебаний, причем на нулевой тип колебаний влияет величина отношения $\frac{E_1}{G_{13}}$, особенно для высоких частот. Для высших типов колебаний влияние анизотропии материала наблюдается для больших фазовых скоростей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин В. В.— В кн.: Инженерный сборник. Изд-во АН СССР, М., 1956, 24.
2. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. Т. 1. Гостехиздат, М., 1955.
3. Мнев Е. Н.— Прикладная механика, 1963, 9, 2.
4. Швец Р. Н., Лунь Е. И.— Прикладная механика, 1971, 7, 10.
5. Швец Р. Н., Флячок В. М.— Прикладная механика, 1973, 9, 11.
6. Lipton C., Morgan G. W.— J. of Acoustical Society of America, 1956, 28, 6.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию в сентябре 1973 г.

ИЗГИБ ТРАНСВЕРСАЛЬНО ИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ С ОТВЕРСТИЕМ, ПОДКРЕПЛЕННЫМ ПО КОНТУРУ УПРУГИМ КОЛЬЦОМ

В. А. Лазько, С. А. Пелех

Рассмотрим напряженно-деформированное состояние бесконечной трансверсально изотропной плиты с круговым отверстием, подкрепленным широким упругим кольцом, геометрические и физические характеристики которого отличны от характеристик плиты; плита деформируется «на бесконечности» равномерно распределенными изгибающими моментами M .

Если кольцо достаточно широкое и имеет постоянную толщину, то его можно рассматривать как пластинку [2].

В рамках обобщенной теории изгиба трансверсально изотропных пластинок задача заключается в нахождении решений уравнений

$$\Delta \Delta \omega_j = 0, \quad \Delta \varphi_j - \delta_j^2 \varphi_j = 0 \quad (j = 1, 2), \quad (1)$$

где индексом «1» будем отмечать величины, относящиеся к плите, индексом «2» — величины, относящиеся к кольцу.

Все расчетные величины (углы поворота нормального волокна $\gamma_\rho^{(j)}$ и $\gamma_\theta^{(j)}$, перерезывающие усилия $N_\rho^{(j)}$ и $N_\theta^{(j)}$, изгибающие $M_\rho^{(j)}$ и $M_\theta^{(j)}$ и крутящий $H_{\rho\theta}^{(j)}$ моменты) выражаются через функции прогибов ω_j и углов поворота φ_j [1].

Решения уравнений (1), соответствующие рассматриваемому случаю, с учетом условий «на бесконечности» запишутся так: для пластинки ($\rho \gg a$)

$$\omega_1 = -\frac{M\rho^2}{4D_1(1-\nu_1)} [1 - \nu_1 + (1 + \nu_1) \cos 2\theta] + c_1^{(1)} \ln \rho + (c_2^{(1)} \rho^{-2} + c_3^{(1)}) \cos 2\theta, \quad (2)$$

$$\varphi_1 = c_4^{(1)} K_0(\delta_1 \rho) + c_5^{(1)} K_2(\delta_1 \rho) \sin 2\theta;$$

для кольца ($b \leq \rho \leq a$)

$$\begin{aligned} \omega_2 &= c_1^{(2)} \ln \rho + (c_2^{(2)} \rho^{-2} + c_3^{(2)}) \cos 2\theta + d_1 \rho^2 + \rho^2 (d_2 + d_3 \rho^2) \cos 2\theta, \\ \varphi_2 &= c_4^{(2)} K_0(\delta_2 \rho) + c_5^{(2)} K_2(\delta_2 \rho) \sin 2\theta + d_4 I_0(\delta_2 \rho) + d_5 I_2(\delta_2 \rho) \sin 2\theta. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $\delta_j^2 = 6k'(1 + \nu_j) h_j^{-2} \frac{G_j'}{E_j}$; k' — коэффициент сдвига; E_j, ν_j — упругие постоянные в плоскости изотропии, совпадающей со срединной; G_j' — модуль сдвига в плоскости, нормальной к срединной; $2h_j$ — толщина; $C_m^{(j)}, d_m$ — произвольные постоянные; $I_n(\delta_j \rho), K_n(\delta_j \rho)$ — модифицированные функции Бесселя I и II рода соответственно; ρ, θ — полярные координаты.