

При решении данной задачи в рамках классической теории Кирхгофа [2] оптимальное подкрепляющее кольцо при заданной его ширине выбиралось так, чтобы моменты M_θ и M_ρ на контуре сая были сбалансированы (на рис. 1 — точка пересечения штриховых линий).

Для трансверсально изотропных пластинок такой критерий оптимальности подкрепляющего кольца, вообще говоря, неприемлем. Оптимальное кольцо в этом случае должно выбираться из расчета на прочность системы пластинка — подкрепляющее кольцо по критериям прочности для анизо-

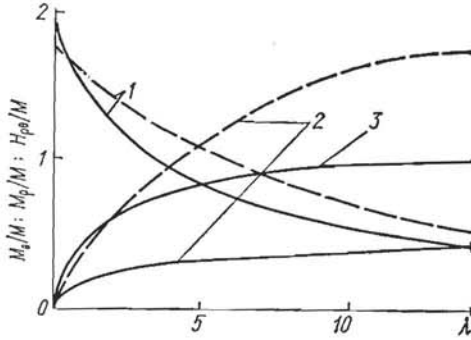


Рис. 1.

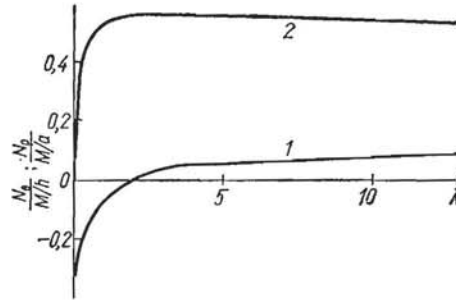


Рис. 2.

тропных материалов. Немаловажное значение будут иметь касательные срезающие напряжения, пренебрежительно малые в случае решения данной задачи согласно классической теории.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пелех Б. Л. Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. «Наукова думка», К., 1973.
 2. Савин Г. Н. Концентрация напряжений около отверстий. ГИТТЛ, М.—Л., 1951.
- Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР, Львовский политехнический институт
- Поступила в редколлегию в ноябре 1973 г.

ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ СРЕДЫ С ЗАДАННЫМ ПОЛЕМ ТЕНЗОРА ДИСТОРСИЙ

В. К. Ганулич

Строится решение уравнений теории упругости для однородной изотропной среды с имеющимся в ней произвольной плотности полем тензора остаточных несовместных деформаций (дисторсий), порожденного упругими и неупругими процессами деформирования материала среды. Для одного распределения дисторсий получены в замкнутом виде формулы, из которых вытекают решения для некоторых других случаев распределения поля дисторсий (для более тридцати распределений).

1. Пусть $\varepsilon_{ij}^0(x_k)$ — известные компоненты тензора дисторсий, а $\varepsilon_{ij}^*(x_k)$ — компоненты тензора силовой деформации, которые связаны с компонентами тензора напряжений $\sigma_{ij}(x_k)$ законом Гука так, что компоненты тензора полной деформации

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^0 + \varepsilon_{ij}^* \quad (1)$$

Как известно [6], связь между ε_{ij} и σ_{ij} представляется в этом случае зависимостями

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{\alpha\alpha} \delta_{ij} - \varepsilon_{ij}^0 \right), \quad (2)$$

где $e_{ij}^0 = \varepsilon_{ij}^0 + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{\alpha\alpha}^0 \delta_{ij}$; δ_{ij} — символ Кронекера; E и ν модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала среды. Подставляя выражение (2) в уравнения равновесия при наличии объемных сил \vec{F}

$$\nabla_j \sigma_{ij} + F_i = 0, \quad (3)$$

получаем уравнения теории упругости в перемещениях на случай наличия в среде поля дисторсий

$$\nabla_j \left(\nabla_j u_i + \frac{1}{1-2\nu} \nabla_i u_j \right) = \frac{2(1+\nu)}{E} (P_i^0 - F_i). \quad (4)$$

Здесь ∇_j — символ дифференцирования по координате x_j ; \vec{P}_0 — некоторая вектор-функция компонентов тензора дисторсий ε_{ij}^0 , наличие которой, как это видно из выражения (4), эквивалентно действию поля объемных сил с компонентами

$$P_i^0 = \frac{E}{2(1+\nu)} \nabla_j \varepsilon_{ij}^0. \quad (5)$$

2. Решение системы (4) при отсутствии объемных сил \vec{F} будем строить с помощью метода интегрирования Лейбфрида [5], состоящего в применении преобразования Фурье к системе (4), правая часть которой представляется точечным воздействием $\nabla_j \varepsilon_{ij}^0 \delta(x_k)$. Опуская выкладки, находим элементарное решение в виде

$$u_k^* = \frac{1}{16\pi(1-\nu)} [\nabla_i \nabla_k r - 2(1-\nu) \Delta r \delta_{ik}] \nabla_j \varepsilon_{ij}^0, \quad (6)$$

где r — расстояние между началом координат, выбранным в точке сосредоточения дисторсии, и точкой наблюдения x_k . Формула (6) будет представлена ниже в более удобном виде. Здесь укажем только на ее непосредственную связь с тензором Грина для произвольной среды с источниками внутренних напряжений [4].

Если поле дисторсий ε_{ij}^0 распределено в некоторой n -мерной области S_n ($n \leq 3$) упругой среды, то, вводя обобщенную функцию $\delta(S_n)$ такую [4], что

$$\int_{S_s} \delta(S_n) \varphi(x) dx = \int_{S_n} \varphi(x - x_s) dS_n, \quad \delta(S_n) = \int_{S_n} \delta(x - x_s) dS_n, \quad x_s \in S_n, \quad (7)$$

где $\delta(x - x_s)$ — функция Дирака, получим с помощью свертки по бесконечной области для распределения $\varepsilon_{ij}^0 = \varepsilon_{ij}^0(x_k) \delta(S_n)$

$$16\pi(1-\nu) u_i = \int_{S_s} \{ 4(1-\nu) |r - r'| \nabla_j [e_{ij}^0(x'_k) \delta(S_n)] - \nabla'_i \nabla'_j |r - r'| \nabla'_k [e_{kj}^0(x'_k) \delta(S_n)] \} dS_s. \quad (8)$$

Используя свойства свертки функций с δ -функцией и ее производными, меняя затем операцию дифференцирования по текущим координатам x_j дифференцированием по координатам x_j точки наблюдения и учитывая коммутативное свойство операций дифференцирования по x_j и интегрирования по x'_j , находим

$$16\pi(1-\nu) u_i = 4(1-\nu) \nabla_j \int_{S_s} e_{ij}^0(x'_\alpha) |r - r'|^{-1} \delta(S_n) dS_s - \nabla_i \nabla_j \nabla_k \int_{S_s} e_{kj}^0(x'_\alpha) |r - r'| \delta(S_n) dS_s. \quad (9)$$

Подставляя сюда выражения (7), имеем

$$u_i = 4(1-\nu) \nabla_j J_{ij}^{(1)} - \nabla_i \nabla_j \nabla_k J_{ki}^{(2)}, \quad (10)$$

где через $J_{ij}^{(1)}$ и $J_{ij}^{(2)}$ обозначены следующие интегралы:

$$J_{ij}^{(1)} = A_{3-n} \int_{S_n} e_{ij}^0(x_s) |r - r_s|^{-1} dS_n, \quad (11)$$

$$J_{ij}^{(2)} = A_{3-n} \int_{S_n} e_{ij}^0(x_s) |r - r_s| dS_n, \quad (12)$$

причем $A_{3-n} = \frac{S_{3-n}}{16\pi(1-\nu)}$ — некоторые множители, на смысл которых будет указано ниже. Эти интегралы представляют собой гармонический и бигармонический потенциалы простого слоя. Роль плотностей распределений по S_n обоих потенциалов берут на себя компоненты тензора дисторсий $\varepsilon_{\alpha\beta}^0(x_s)$. Так как эти «плотности» не обязательно непрерывны в объеме, занятом средой, то при их разрывах потенциал (11) и его первая производная могут быть как непрерывными ($n = 3$), так и разрывными ($n < 3$) функциями координат. То же самое касается потенциала (12) и его третьей производной. Однако по крайней мере одна из вторых производных $J_{ij}^{(1)}$ и одна из четвертых производных $J_{ij}^{(2)}$ в любом случае будут иметь разрывы [2]. Этими свойствами потенциалов объясняется тот факт, что напряжения на ограничивающих поле дисторсий поверхностях обязательно имеют разрывы первого рода, как только $\varepsilon_{\alpha\beta}^0(x_s)$ скачкообразны при переходе через поверхности S_n . В тех случаях, когда поле дисторсий задано в областях S_n при $n < 3$ (поверхности, линии, точки) решение (10) будет пригодно для точек среды, отнесенных на определенное расстояние от поверхностей (линий, точек) разрыва «плотностей» $\varepsilon_{\alpha\beta}^0(x_s)$.

Формула (10) является решением задачи теории упругости для бесконечной среды с имеющимся в ней произвольной плотности полем дисторсий, заданным своими компонентами в некоторой n -мерной области S_n пространства S_3 . Что касается формулы (9), которая может служить таким же решением, то она удобна тем, что из нее легко получить фундаментальное решение, соответствующее наличию в среде сосредоточенной в точке элементарной дисторсии. В самом деле, стягивая S_n в точку ($S_n \rightarrow S_0$), где помещено начало координат (это всегда осуществимо, как только S_n односвязна), и учитывая при этом, что

$$\lim_{S_n \rightarrow 0} \delta(S_n) = S_n \delta(x), \quad (13)$$

после подстановки (13) в (9) имеем

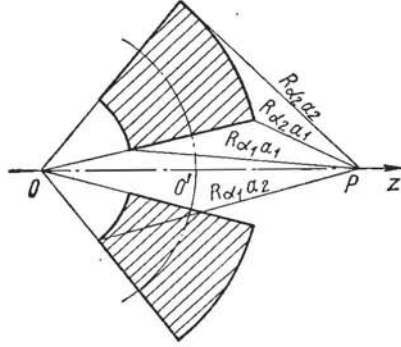
$$u_i = A_n [4(1-\nu) e_{ij}^0 \nabla_j r^{-1} - e_{kj}^0 \nabla_i \nabla_k \nabla_j r]. \quad (14)$$

При этом ясно, что интегрирование полученного решения по S_n даст выражение (9).

Отметим, что, как и для случаев действия в среде сосредоточенных силовых факторов: центра всестороннего равномерного растяжения — сжатия, сосредоточенного дублета сил, сосредоточенной пары сил, центра осесимметрического скручивания и т. п., — произведение $A_n \varepsilon_{\alpha\beta}^0$ при неограниченном уменьшении элемента S_n должно быть конечным, для чего необходим неограниченный рост значений компонентов элементарной дисторсии $\varepsilon_{\alpha\beta}^0$. Аналогичные соображения для соответствующих компонентов $\varepsilon_{\alpha\beta}^0$ имеют место тогда, когда поле дисторсий распределено по поверхности S_2 (при приближении к S_2 по нормали) либо по линии S_1 (при приближении к S_1 вдоль любого пути, лежащего в нормальной плоскости). Этим оправдывается введение в выражения (10) — (12) множителей A_{3-n} , благодаря которым потенциалы (11) и (12) сохраняют свою размерность ($см^2$ и $см^4$ соответственно), не зависящую от размерности S_n [1].

Из формулы (14) видно, что компоненты вектора перемещений \vec{u} по мере удаления точки наблюдения от сосредоточения элементарной дисторсии убывают пропорционально квадрату расстояния. В этом смысле наличие элементарной дисторсии в среде эквивалентно действию в ней сосредоточенных силовых факторов второго порядка. Нетрудно убедиться, используя формулу (14), что для шарового тензора дисторсий, т. е. когда $\varepsilon_{ij}^0 = \frac{1}{3} \varepsilon_{\alpha\alpha}^0 \delta_{ij}$, компоненты вектора перемещений

$$u_i = -\frac{2}{3} (1 + \nu) A_3 \varepsilon_{\alpha\alpha}^0 \nabla_i r^{-1} \quad (15)$$



и совпадают с точностью до постоянного множителя с формулой для центра расширения — сжатия. В случае, когда касательные компоненты тензора дисторсии равны между собой, а нормальные отсутствуют, получаются формулы, аналогичные соответствующим центру сдвига, введенным ранее Я. С. Подстригачом и Я. И. Бураком [3]. Этих формул здесь не приводим. Отметим лишь то, что подбором $\varepsilon_{\alpha\beta}^0$ можно

построить также другие дисторсионные аналоги сосредоточенных силовых воздействий второго порядка.

3. Рассмотрим случай, когда компоненты тензора дисторсий $\varepsilon_{\alpha\beta}^0$ суть функции расстояния r_s . Решение задачи построено, как только вычислены потенциалы

$$J_{\alpha\beta}^{(2,1)} = A_{3-n} \int_{r_s^{(1)}}^{r_s^{(2)}} \varepsilon_{\alpha\beta}^0(r_s) dr_s \int_{S_{n-1}} |r - r_s|^{\pm 1} dS_{n-1}. \quad (16)$$

Здесь и в дальнейшем верхний знак соответствует первому индексу, а нижний — второму. Для некоторых областей S_n выражения потенциалов (16) находятся довольно просто.

Пусть $\varepsilon_{ij}^0 = \varepsilon_{ij}^0(r_s)$ задано в области S_3 , занимающей объем части шарового слоя $a_1 \leq r_s \leq a_2$, $0 \leq \alpha_1 \leq \varphi \leq \alpha_2 \leq \pi$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ (рисунок). Если обозначить $OP = r$, то для точек оси симметрии Oz получим

$$J_{ij}^{(2,1)} = \frac{1}{8(1-\nu)} \int_{a_1}^{a_2} \varepsilon_{ij}^0(r_s) r_s^2 dr_s \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} (r^2 + r_s^2 - 2rr_s \cos \varphi)^{\pm \frac{1}{2}} \sin \varphi d\varphi.$$

Интегрируя по φ , находим

$$J_{ij}^{(1)} = \frac{1}{8(1-\nu)r} \int_{a_1}^{a_2} \varepsilon_{ij}^0(r_s) (R_{\alpha_2} - R_{\alpha_1}) r_s dr_s, \quad (17)$$

$$J_{ij}^{(2)} = \frac{1}{24(1-\nu)r} \int_{a_1}^{a_2} \varepsilon_{ij}^0(r_s) (R_{\alpha_2}^3 - R_{\alpha_1}^3) r_s dr_s, \quad (18)$$

где

$$R_{\alpha_k}^2 = r^2 + r_s^2 - 2rr_s \cos \alpha_k, \quad k = 1, 2.$$

Полученные интегралы легко вычисляются для широкого класса функций $\varepsilon_{ij}^0(r_s)$. В частности, если компоненты тензора дисторсии заданы полиномами

$$\varepsilon_{ij}^0(r_s) = \sum_{m=0}^n C_{ijm} r_s^m, \quad (19)$$

то интегралы (17) и (18) реализуются в конечном счете одной из подстановок Эйлера. Задача при этом сводится к случаю, когда $\varepsilon_{ij}^0 = \text{const}$ в S_n . Для

такого распределения имеем следующие значения потенциалов:

$$J_{ij}^{(1)} = \frac{e_{ij}^0}{8(1-\nu)r} \sum_{k=1}^2 (-1)^k \left[R_{a_2\alpha_k}^3 - R_{a_1\alpha_k}^3 + \frac{1}{2} r \cos \alpha_k (a_2 - r \cos \alpha_k) R_{a_2\alpha_k} - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} r \cos \alpha_k (a_1 - r \cos \alpha_k) R_{a_1\alpha_k} + \frac{1}{2} r^3 \sin^2 \alpha_k \cos \alpha_k \ln Q_{a_k\alpha_k} \right]; \quad (20)$$

$$J_{ij}^{(2)} = \frac{e_{ij}^0}{24(1-\nu)r} \sum_{k=1}^2 (-1)^k \left[R_{a_2\alpha_k}^5 - R_{a_1\alpha_k}^5 + \frac{1}{8} r \cos \alpha_k (a_2 - r \cos \alpha_k) \times \right. \\ \left. \times R_{a_2\alpha_k} (2R_{a_2\alpha_k}^2 + 3r^2 \sin^2 \alpha_k) - \frac{1}{8} r \cos \alpha_k (a_1 - r \cos \alpha_k) R_{a_1\alpha_k} (2R_{a_1\alpha_k}^2 + \right. \\ \left. + 3r^2 \sin^2 \alpha_k) + \frac{3}{8} r^5 \sin^4 \alpha_k \cos \alpha_k \ln Q_{a_k\alpha_k} \right], \quad (21)$$

где обозначено $R_{a_k\alpha_j} = a_j^2 + r^2 - 2a_j r \cos \alpha_k$; $Q_{a_k\alpha_k} = \frac{R_{a_2\alpha_k} + a_2 - 2 \cos \alpha_k}{R_{a_1\alpha_k} + a_1 - 2 \cos \alpha_k}$ ($k, j = 1, 2$). Потенциалы (20) и (21) для кольца шарового слоя имеют некоторую общность. Путем предельных переходов из них можно получить решения для распределения поля дисторсий e_{ij}^0 в других областях пространства S_3 .

Так, например, устремляя в выражениях (20) и (21) α_1 к нулю, α_2 к π , получаем значения потенциалов J_1 и J_2 для распределения в области шарового слоя $a_1 \leq r \leq a_2$. Выбор точки P при этом несуществен. При $r \leq a_1$

$$J_1 = 2\pi (a_2^2 - a_1^2), \\ J_2 = \frac{1}{3} \pi (a_2^2 - a_1^2) (2r^2 + 3a_1^2 + 3a_2^2); \quad (22)$$

при $a_1 \leq r \leq a_2$

$$J_1 = -\frac{2}{3} \pi \frac{1}{r} (r^3 - 3a_2^2 r + 2a_1^2), \\ J_2 = -\frac{1}{15} \pi \frac{1}{r} (r^5 - 10a_2^2 r^3 + 20a_1^3 r^2 - 15a_2^4 r + 4a_1^5); \quad (23)$$

при $r \geq a_2$

$$J_1 = \frac{4}{3} \pi (a_2^3 - a_1^3) \frac{1}{r}, \\ J_2 = \frac{4}{15} \pi [5(a_2^3 - a_1^3 r^2 + (a_2^5 - a_1^5))] \frac{1}{r}. \quad (24)$$

Выражения для компонентов вектора перемещений и тензора напряжений после подстановки формул (22) — (24) в (16) и использования зависимостей Коши и закона Гука (2) получаются следующими: при $r \leq a_1$

$$u_i = 0, \quad \sigma_{\alpha\beta} = 0; \quad (25)$$

при $a_1 \leq r \leq a_2$

$$u_i = \frac{1}{3} e_{ij}^0 \left(\frac{a_1^3}{r^3} - 1 \right) x_j + \frac{1}{60(1-\nu)} e_{kj}^0 \left[15 \frac{a_1^3}{r^6} \left(1 - \frac{a_1^2}{r^2} \right) x_i x_k x_j + \right. \\ \left. + \left(3 \frac{a_1^5}{r^6} - 5 \frac{a_1^3}{r^3} + 2 \right) (x_i \delta_{kj} + x_j \delta_{ik} + x_k \delta_{ij}) \right], \quad (26) \\ \frac{1+\nu}{E} \sigma_{\alpha\beta} = -\frac{1}{6} \left[e_{\alpha j}^0 \left(3a_1^3 \frac{x_\beta x_j}{r^6} - \frac{a_1^3}{r^3} \delta_{\beta j} + \delta_{\beta j} \right) + e_{\beta j}^0 \left(3a_1^3 \frac{x_\alpha x_j}{r^6} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{a_1^3}{r^3} \delta_{\alpha j} + \delta_{\alpha j} \right) + \frac{2\nu}{1-2\nu} e_{ij}^0 \left(3a_1^3 \frac{x_i x_j}{r^6} - \frac{a_1^3}{r^3} \delta_{ij} + \delta_{ij} \right) \delta_{\alpha\beta} \right] + \\ + \frac{1}{4(1-\nu)} e_{kj}^0 \left[\frac{a_1^3}{r^6} \left(1 - \frac{a_1^2}{r^2} \right) (x_\alpha x_\beta \delta_{kj} + x_\alpha x_k \delta_{\beta j} + x_\alpha x_j \delta_{\beta k} + x_\beta x_k \delta_{\alpha i} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + x_{\beta}x_j\delta_{\alpha k} + x_kx_j\delta_{\alpha\beta} + \frac{7\nu}{1-2\nu}x_kx_j\delta_{\alpha\beta} + \frac{\nu}{1-2\nu}x_ix_i\delta_{\alpha\beta}\delta_{kj}) + \\
& \left[\frac{a_1^3}{r^7} \left(7 \frac{a_1^2}{r^2} - 5 \right) \left(x_{\alpha}x_{\beta} + \frac{\nu}{1-2\nu}x_ix_i\delta_{\alpha\beta} \right) x_kx_j + \frac{1}{15} \left(3 \frac{a_1^5}{r^5} - 5 \frac{a_1^3}{r^3} + 2 \right) \times \right. \\
& \left. \times \left(\delta_{\alpha\beta}\delta_{kj} + \delta_{\alpha k}\delta_{\beta j} + \delta_{\alpha j}\delta_{\beta k} + \frac{5\nu}{1-2\nu}\delta_{kj}\delta_{\alpha\beta} \right) \right] - e_{\alpha\beta}^0; \quad (27)
\end{aligned}$$

при $r \geq a_2$

$$\begin{aligned}
u_i = & -\frac{1}{3} (a_2^3 - a_1^3) e_{ij}^0 \frac{x_j}{r^3} + \frac{1}{60(1-\nu)} e_{kj}^0 \left[15 \left(\frac{a_2^5 - a_1^5}{r^7} - \frac{a_2^3 - a_1^3}{r^3} \right) x_ix_kx_j - \right. \\
& \left. - \left(3 \frac{a_2^5 - a_1^5}{r^5} - 5 \frac{a_2^3 - a_1^3}{r^3} \right) (x_j\delta_{ik} + x_k\delta_{ij} + x_i\delta_{kj}) \right]; \quad (28)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1+\nu}{E} \sigma_{\alpha\beta} = & \frac{1}{6} (a_2^3 - a_1^3) \frac{1}{r^3} \left[e_{\alpha j}^0 \left(3 \frac{x_{\beta}x_j}{r^2} - \delta_{\beta j} \right) + e_{\beta j}^0 \left(3 \frac{x_{\alpha}x_j}{r^2} - \delta_{\alpha j} \right) + \right. \\
& \left. + \frac{2\nu}{1-2\nu} e_{ij}^0 \left(3 \frac{x_ix_j}{r^2} - \delta_{ij} \right) \delta_{\alpha\beta} \right] - \frac{1}{4(1-\nu)} e_{kj}^0 \left[\frac{1}{r^4} \left(7 \frac{a_2^5 - a_1^5}{r^5} - 5 \frac{a_2^3 - a_1^3}{r^3} \right) \times \right. \\
& \times \left(x_{\alpha}x_{\beta} + \frac{\nu}{1-2\nu}x_ix_i\delta_{\alpha\beta} \right) x_kx_j - \frac{1}{r^2} \left(\frac{a_2^5 - a_1^5}{r^5} - \frac{a_2^3 - a_1^3}{r^3} \right) \left(x_{\alpha}x_{\beta}\delta_{kj} + x_{\alpha}x_k\delta_{\beta j} + \right. \\
& \left. + x_{\alpha}x_j\delta_{\beta k} + x_{\beta}x_k\delta_{\alpha j} + x_{\beta}x_j\delta_{\alpha k} + x_kx_j\delta_{\alpha\beta} + \frac{7\nu}{1-2\nu}x_kx_j\delta_{\alpha\beta} + \frac{\nu}{1-2\nu}x_ix_i\delta_{\alpha\beta}\delta_{kj} \right) + \\
& \left. + \frac{1}{15} \left(3 \frac{a_2^5 - a_1^5}{r^5} - 5 \frac{a_2^3 - a_1^3}{r^3} \right) \left(\delta_{\alpha\beta}\delta_{kj} + \delta_{\alpha k}\delta_{\beta j} + \delta_{\alpha j}\delta_{\beta k} + \frac{5\nu}{1-2\nu}\delta_{kj}\delta_{\alpha\beta} \right) \right] - e_{\alpha\beta}^0. \quad (29)
\end{aligned}$$

Поскольку формулы (25) — (27) не зависят от радиуса a_2 , то их можно рассматривать как решения для ограниченного шара $R > a_1$ с приповерхностным полем дисторсий в области $a_1 \leq r \leq R$. При этом для выполнения граничных условий на поверхности шара следует приложить напряжения, вычисленные по формуле (29) при $r = R$. Если в выражениях (25) — (27) $R \rightarrow \infty$, то получим случай среды с заданным в ней полем $\varepsilon_{\alpha\beta}^0$ везде, за исключением объема шара радиуса a_1 . Формул распределений ε_{ij}^0 для этого случая не выписываем, так как они получаются из выражений (22) — (29) устремлением a_k ($k = 1, 2$) к определенным граничным значениям. То же самое относится к другим полям со сферической симметрией. Ограничимся лишь перечислением их: сплошной шар (точка); сферический купол и сфера; шаровой купол; поверхность полного и срезанного конусов с образующими произвольной длины; часть пространства, заключенная между вложенными конусными поверхностями; шаровой сектор; пространство с конусным незаполнением и т. п.

Интересен другой предельный переход, состоящий в следующем. Если в выражениях (20) и (21) оба радиуса a_k , а также расстояние $OP = r$ устремлять к бесконечности, но так, чтобы $r - a_k$ оставалось конечным, то при этом точка O уходит в бесконечность по отрицательной полуоси $O'z$ так, что $\alpha_k \rightarrow 0$ и $a_1 \sin \alpha_k = a_2 \sin \alpha_k \rightarrow h_k$ ($k = 1, 2$). Если вести теперь отсчет от точки O' , то по мере удаления точки O в бесконечность кольцо шарового слоя «разгибается» и в пределе переходит в полый цилиндр с толщиной стенки $h = h_2 - h_1$ и длиной $2l = a_2 - a_1$. Выражения потенциалов при этом будут

$$J_1 = \pi \sum_{k=1}^2 (-1)^k [(z+l)R_k \pm (z-l)R_{-k} + h_k^2 \ln Q_k], \quad Q_k = \frac{R_{-k} \pm (z-l)}{R_k - (z+l)}, \quad (30)$$

$$J_2 = \frac{\pi}{12} \sum_{k=1}^2 (-1)^k [(z+l)R_k (2R_k^2 + 3h_k^2) \pm (z-l)R_{-k} (2R_{-k}^2 + 3h_k^2 \ln Q_k)], \quad (31)$$

где $R_{\pm k} = \sqrt{(z \pm l)^2 + h_k^2}$, причем верхний знак соответствует $|z| \leq l$, а нижний — $|z| \geq l$. Дальнейшие предельные переходы от полого цилиндра дают конечные значения потенциалов (либо их производных), следовательно, значения перемещений, напряжений и деформаций для распределений компонентов ε_{ij}^0 тензора дисторсий по областям с осевой симметрией. Из-за обилия этих областей соответствующих им формул не приводим. Как и выше, ограничимся лишь перечислением этих распределений. Так, при $h_1 \rightarrow 0$ формулы (30) и (31) дают значения потенциалов для распределения ε_{ij}^0 по области сплошного цилиндра конечной длины, либо ($l \rightarrow \infty$) бесконечно длинного цилиндра; при $h_2 \rightarrow \infty$ получается плоский слой с цилиндрическим ($h_1 \neq 0$) незаполнением, либо ($l \rightarrow \infty$) все пространство, кроме объема бесконечно длинного цилиндра, заполнено ε_{ij}^0 ; при $h \rightarrow 0$, но так, чтобы $2le_{ij}^0 = \text{const}$, имеем случай распределения ε_{ij}^0 по кольцу ($h_1 \leq \rho \leq h_2$), кругу ($h_1 \rightarrow 0$), окружности ($h_2 \rightarrow h_1$), либо плоскости $z = 0$ с круговым незаполнением; при $h_2 \rightarrow \infty$, $h_1 \rightarrow 0$ имеем распределение ε_{ij}^0 по объему сплошного плоского слоя, а также ($l \rightarrow 0$) — по плоской поверхности $z = 0$. Формулы для перечисленных здесь полей дисторсий ε_{ij}^0 (кроме последних двух) пригодны лишь для точек оси симметрии. Более общие формулы для некоторых других полей дисторсий с осевой симметрией, пригодны для любых точек пространства, кроме, быть может, точек, принадлежащих областям, где заданы эти поля, можно получить непосредственным вычислением интегралов (16).

Так, в случае распределения ε_{ij}^0 вдоль отрезка $-a_1 \leq z \leq a_1$ имеем

$$J_1 = dS_2 \ln Q; \quad J_2 = \frac{1}{2} dS_2 [R_1 |z + a_1| - R_2 |z - a_1| + \rho^2 \ln Q], \quad (32)$$

где

$$\rho^2 = x^2 + y^2, \quad R_{1,2}^2 = \rho^2 + (z \pm a_1)^2, \quad Q = \frac{R_1 + |z + a_1|}{R_2 + |z - a_1|}.$$

Выражения для компонентов перемещений довольно громоздки, и мы их не приводим.

При распределении ε_{ij}^0 по прямой $x = 0, y = 0$ ($a_1 \rightarrow \infty$) оба потенциала расходятся, однако нужные их производные таковы, что перемещения деформации и напряжения везде, кроме линии, на которой заданы ε_{ij}^0 , принимают конечные значения, убывая на бесконечности к нулю. После дифференцирования выражения (32) и выполнения предельного перехода имеем

$$u_i = -\frac{dS_2}{2\pi\rho} \left[e_{ij}^0 \frac{x_j}{\rho} + \frac{e_{kj}^0}{4(1-\nu)} \left(\frac{2}{\rho^2} x_i x_k x_j - x_i \delta_{kj} - x_j \delta_{ik} - x_k \delta_{ij} \right) \right] (1 - \delta_{3i}), \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \frac{1-\nu}{E} \sigma_{\alpha\beta} = & \frac{1}{\pi} \cdot \frac{dS_2}{\rho^2} \left[e_{\alpha j}^0 \left(\frac{2}{\rho^2} x_\beta x_j - \delta_{\beta j} \right) + e_{\beta j}^0 \left(\frac{2}{\rho^2} x_\alpha x_j - \delta_{\alpha j} \right) + \right. \\ & + 2e_{ij}^0 \left(\frac{2}{\rho^2} x_i x_j - \delta_{ij} \right) \delta_{\alpha\beta} \left. \right] - \frac{dS_2}{8\pi(1-\nu)} e_{kj}^0 \frac{1}{\rho^2} \left[\frac{2}{\rho^2} (x_\alpha x_\beta \delta_{kj} + x_\alpha x_j \delta_{\beta k} + x_\alpha x_k \delta_{\beta j} + \right. \\ & + x_\beta x_j \delta_{\alpha k} + x_\beta x_k \delta_{\alpha j} + x_k x_j \delta_{\alpha\beta} + \frac{7\nu}{1-2\nu} x_k x_j \delta_{\alpha\beta} + \frac{\nu}{1-2\nu} x_i x_i \delta_{kj} \delta_{\alpha\beta}) - \frac{8}{\rho^4} (x_\alpha x_\beta + \\ & \left. + \frac{\nu}{1-2\nu} x_i x_i \delta_{\alpha\beta}) x_k x_j - (\delta_{\alpha\beta} \delta_{kj} + \delta_{\alpha k} \delta_{\beta j} + \delta_{\alpha j} \delta_{\beta k} + \frac{5\nu}{1-2\nu} \delta_{kj} \delta_{\alpha\beta}) \right] - e_{\alpha\beta}^0. \quad (34) \end{aligned}$$

Распределение поля тензора дисторсий постоянной плотности по области полого цилиндра $a_1 \leq \rho \leq a_2$, как и в предыдущем случае, приводит к расходящимся потенциалам. Однако нужные их производные сходятся, так что, опуская промежуточные выкладки, имеем следующие выражения для компонентов $u_i, \sigma_{\alpha\beta}$: при $\rho \leq a_1$

$$u_i = 0, \quad \sigma_{\alpha\beta} = 0;$$

и.н. $a_1 \leq \rho \leq a_2$

$$u_i = \frac{1}{2} e_{ij}^0 \left(\frac{a_1^2}{\rho^2} - 1 \right) x_j + \frac{1}{4(1-\nu)} e_{kj}^0 \left[\frac{1}{4} \left(\frac{a_1^2}{\rho^2} - 1 \right)^2 (x_i \delta_{kj} + x_j \delta_{ik} + x_k \delta_{ij}) - \right. \\ \left. - \frac{a_1^2}{\rho^4} \left(\frac{a_1^2}{\rho^2} - 1 \right) \right] x_i x_k x_j; \quad u_3 = 0; \quad (i, j = 1, 2), \quad (35)$$

$$\frac{1+\nu}{E} \sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{4} \left[\left(\frac{a_1^2}{\rho^2} - 1 \right) \left(c_{\alpha j}^0 \delta_{\beta j} + e_{\beta j}^0 \delta_{\alpha j} + \frac{2\nu}{1-2\nu} e_{ii}^0 \delta_{\alpha\beta} \right) - 2 \frac{a_1^2}{\rho^4} \left(e_{\alpha j}^0 x_{\beta} x_j + \right. \right. \\ \left. \left. + e_{\beta j}^0 x_{\alpha} x_j + \frac{2\nu}{1-2\nu} e_{ij}^0 x_i x_j \delta_{\alpha\beta} \right) \right] + \frac{1}{8(1-\nu)} e_{kj}^0 \left[4 \frac{a_1^2}{\rho^6} \left(3 \frac{a_1^2}{\rho^2} - 2 \right) \left(x_{\alpha} x_{\beta} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\nu}{1-2\nu} x_j x_j \delta_{\alpha\beta} \right) x_k x_j - 2 \frac{a_1^2}{\rho^4} \left(\frac{a_1^2}{\rho^2} - 1 \right) \left(x_{\alpha} x_{\beta} \delta_{kj} + x_{\alpha} x_j \delta_{\beta k} + x_{\alpha} x_k \delta_{\beta j} + \right. \right. \\ \left. \left. + x_{\beta} x_j \delta_{\alpha k} + x_{\beta} x_k \delta_{\alpha j} + x_k x_j \delta_{\alpha\beta} + \frac{7\nu}{1-2\nu} x_k x_j \delta_{\alpha\beta} + \frac{\nu}{1-2\nu} x_i x_i \delta_k \delta_{\alpha\beta} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{a_1^2}{\rho^2} - 1 \right)^2 \left(\delta_{kj} \delta_{\alpha\beta} + \delta_{\alpha k} \delta_{\beta j} + \delta_{\alpha j} \delta_{\beta k} + \frac{5\nu}{1-2\nu} \delta_{kj} \delta_{\alpha\beta} \right) \right] - e_{\alpha\beta}^0; \quad (36)$$

при $\rho \geq a_2$

$$u_i = -\frac{1}{2} e_{ij}^0 (a_2^2 - a_1^2) \frac{x_j}{\rho^2} - \frac{1}{4(1-\nu)} (a_2^2 - a_1^2) e_{kj}^0 \frac{1}{\rho^2} \left[\frac{1}{4} \left(\frac{a_1^2 + a_2^2}{\rho^2} - 2 \right) (x_i \delta_{kj} + \right. \\ \left. + x_j \delta_{ik} + x_k \delta_{ij}) - \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{a_1^2 + a_2^2}{\rho^2} - 1 \right) x_i x_k x_j \right]; \quad u_3 = 0; \quad (i, j = 1, 2), \quad (37)$$

$$\frac{1+\nu}{E} \sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{4} \frac{a_2^2 - a_1^2}{\rho^2} \left[e_{\alpha j}^0 \left(\frac{2}{\rho^2} x_{\beta} x_j - \delta_{\beta j} \right) + e_{\beta j}^0 \left(\frac{2}{\rho^2} x_{\alpha} x_j - \delta_{\alpha j} \right) + \right. \\ \left. + \frac{2\nu}{1-2\nu} e_{ij}^0 \left(\frac{2}{\rho^2} x_i x_j - \delta_{ij} \right) \delta_{\alpha\beta} \right] + \frac{a_2^2 - a_1^2}{8(1-\nu)} e_{kj}^0 \left[\frac{2}{\rho^2} \left(\frac{a_2^2 - a_1^2}{\rho^2} - 1 \right) \left(x_{\alpha} x_{\beta} \delta_{kj} + \right. \right. \\ \left. \left. + x_{\alpha} x_j \delta_{\beta k} + x_{\alpha} x_k \delta_{\beta j} + x_{\beta} x_j \delta_{\alpha k} + x_{\beta} x_k \delta_{\alpha j} + x_k x_j \delta_{\alpha\beta} + \frac{7\nu}{1-\nu} x_k x_j \delta_{\alpha\beta} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\nu}{1-2\nu} x_i x_i \delta_{\alpha\beta} \delta_{kj} \right) - \frac{4}{\rho^4} \left(3 \frac{a_1^2 + a_2^2}{\rho^2} - 2 \right) \left(x_{\alpha} x_{\beta} + \frac{\nu}{1-2\nu} x_i x_i \delta_{\alpha\beta} \right) x_k x_j - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \left(\frac{a_1^2 + a_2^2}{\rho^2} - 2 \right) \left(\delta_{\alpha\beta} \delta_{kj} + \delta_{\beta j} \delta_{\alpha k} + \delta_{\beta k} \delta_{\alpha j} + \frac{5\nu}{1-2\nu} \delta_{\alpha\beta} \delta_{kj} \right) \right] - e_{\alpha\beta}^0 \quad (38) \\ (\alpha, \beta = 1, 2).$$

Нетрудно заметить, что в формулы (35), (36) не входит внешний радиус a_2 полого цилиндра. Подобно случаю распределения ε_{ij}^0 по объему шарового слоя, здесь (35), (36) можно рассматривать как решения для ограниченного цилиндра радиуса $R > a_1$ с приповерхностным распределением поля дисторсий ε_{ij}^0 . Для выполнения естественных условий на поверхности цилиндра следует приложить там напряжения (38) при $\rho = R$. Устремляя в выражениях (35), (36) R к бесконечности, получаем случай среды с заданным в ней полем ε_{ij}^0 везде, за исключением объема цилиндра радиуса a_1 .

Очевидными предельными переходами из (35) — (38) легко получить формулы, соответствующие распределениям ε_{ij}^0 по объему сплошного цилиндра и цилиндрической поверхности.

Отметим, наконец, согласие этих и приведенных выше формул с известными результатами как, например, с полем напряжений, вызванным нали-

чем температурного ядра, которое занимает в упругой среде объем шара либо объем бесконечно длинного цилиндра [4], а также с полем электрического заряда, распределенного по поверхности сферы, цилиндрической поверхности и вдоль бесконечной нити.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гельфанд Н. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними. Физматгиз, М., 1959.
2. Джефрис Г., Свирлс Б.— В кн.: Методы математической физики, 1. «Мир», М., 1969.
3. Подстригач Я. С., Бурак Я. И.— В кн.: Вопросы механики реального твердого тела, 1. Изд-во АН УССР, К., 1962.
4. Схоутен Я. А. Тензорный анализ для физиков. «Наука», М., 1965.
5. Эшелби Дж. Континуальная теория дислокаций. ИЛ, М., 1963.
6. Nowacki W.— Bull. d. L'acad. pol. d. sci., s. d. sci. techn, 1966, 14, 3.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию в ноябре 1973 г.

ВАРИАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП И НЕКОТОРЫЕ ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ НЕЛОКАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ВЯЗКОУПРУГОСТИ

А. П. Дячина

В работе [4] получены нелокальные реологические соотношения между напряжениями и деформациями для модели сплошной среды, в которой происходят неравновесные процессы диффузионного типа. Ядрами интегральных операторов в реологических соотношениях служили функции Грина уравнений параболического типа. Нелокальные реологические соотношения можно также получить, пользуясь методом наложения Больцмана и соответствующими связями между напряжениями и деформациями нелокальной теории упругости [1—3].

Задача о напряженно-деформированном состоянии подчиняющейся нелокальному закону деформирования сплошной среды, заполняющей регулярную область V , ограниченную замкнутой поверхностью S с единичной внешней нормалью \vec{n} , сводится к нахождению решений системы уравнений движения

$$\sigma_{i,j} + F_i = \rho \ddot{u}_i \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (1)$$

соотношений Коши

$$e_{ij} = u_{i,j} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2)$$

и реологических соотношений

$$\sigma_{\alpha\alpha} = 3K_{\mu} \frac{\partial}{\partial t} \int_V [\delta(x - \xi) S_+(t) + \frac{K_c - K_{\mu}}{K_{\mu}} K(x, \xi, t)] * e_{\alpha\alpha}(\xi, t) d\xi, \quad (3)$$

$$\sigma_{ij}^d = 2G_{\mu} \frac{\partial}{\partial t} \int_V [\delta(x - \xi) S_+(t) + \frac{G_c - G_{\mu}}{G_{\mu}} G(x, \xi, t)] * e_{ij}^d(\xi, t) d\xi \quad (4)$$

при следующих краевых условиях:

$$u_i(x, 0) = u_i^0(x), \quad (5)$$

$$\dot{u}_i(x, 0) = v_i^0(x), \quad (6)$$

$$u_i(x, t) = \tilde{u}_i(x, t), \quad (x, t) \in S_1 \times [0, \infty) \quad (7)$$

$$h_j \sigma_{ij}(x, t) = P_i(x, t), \quad (x, t) \in S_2 \times [0, \infty). \quad (8)$$