чием температурного ядра, которое занимает в упругой среде объем шара либо объем бесконечно длинного цилиндра [4], а также с полем электрического заряда, распределенного по поверхности сферы, цилиндрической поверхности и вдоль бесконечной нити.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гельфанд Н. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними. Физматгиз, М., 1959.
2. Джефрис Г., Свирлс Б.— В кн.: Методы математической физики, 1. «Мир», М., 1969.
3. Подстригач Я. С., Бурак Я. И.— В кн.: Вопросы механики реального твердого тела, 1. Изд-во АН УССР, К., 1962.
4. Схоутен Я. А. Тензорный анализ для физиков. «Наука», М., 1965.
5. Эшелби Дж. Континуальная теория дислокаций. ИЛ, М., 1963.
6. Nowacki W.— Bull. d. L'acad. pol. d. sci., s. d. sci. techn, 1966, 14, 3.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию в ноябре 1973 г.

ВАРИАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП И НЕКОТОРЫЕ ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ НЕЛОКАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ВЯЗКОУПРУГОСТИ

А. П. Дячина

В работе [4] получены нелокальные реологические соотношения между напряжениями и деформациями для модели сплошной среды, в которой происходят неравновесные процессы диффузионного типа. Ядрами интегральных операторов в реологических соотношениях служили функции Грина уравнений параболического типа. Нелокальные реологические соотношения можно также получить, пользуясь методом наложения Больцмана и соответствующими связями между напряжениями и деформациями нелокальной теории упругости [1—3].

Задача о напряженно-деформированном состоянии подчиняющейся нелокальному закону деформирования сплошной среды, заполняющей регулярную область V, ограниченную замкнутой поверхностью S с единичной внешней нормалью $\vec{n}$, сводится к нахождению решений системы уравнений движения

$$\sigma_{ij,j} + F_i = \rho \ddot{u}_i \qquad (i,\ j = 1,\ 2,\ 3), \tag{1}$$

соотношений Коши

$$e_{ij} = u_{i,j} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \tag{2}$$

и реологических соотношений

$$\sigma_{\alpha\alpha} = 3K_\mu \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_V \left[\delta(x-\xi) S_+(t) + \frac{K_c - K_\mu}{K_\mu} K(x,\ \xi,\ t)\right] * e_{\alpha\alpha}(\xi,\ t)\, d\xi, \tag{3}$$

$$\sigma_{ij}^d = 2G_\mu \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_V \left[\delta(x-\xi) S_+(t) + \frac{G_c - G_\mu}{G_\mu} G(x,\ \xi,\ t)\right] * e_{ij}^d(\xi,\ t)\, d\xi \tag{4}$$

при следующих краевых условиях:

$$u_i(x,\ 0) = u_i^0(x), \tag{5}$$

$$\dot{u}_i(x,\ 0) = v_i^0(x), \tag{6}$$

$$u_i(x,\ t) = \tilde{u}_i(x,\ t), \quad (x,\ t) \in S_1 \times [0,\ \infty) \tag{7}$$

$$h_j \sigma_{ij}(x,\ t) = P_i(x,\ t), \quad (x,\ t) \in S_2 \times [0,\ \infty). \tag{8}$$

Здесь σ_{ij} — компоненты тензора напряжений; e_{ij} — компоненты тензора деформаций; $\sigma_{\alpha\alpha}(e_{\alpha\alpha})$ — шаровая часть тензора напряжений (деформаций); $\sigma_{ij}^d(e_{ij}^d)$ — компоненты девиаторной части тензора напряжений (деформаций); u_i — компоненты вектора перемещений; K_c, K_μ, G_c, G_μ — реологические постоянные; F_i — компоненты вектора объемных сил; ρ — плотность; точкой сверху обозначено дифференцирование по времени t, а индексом после запятой — дифференцирование по соответствующей декартовой координате; звездочкой обозначена свертка.

Далее примем, что ядра $K(x, \xi, t)$ и $G(x, \xi, t)$ удовлетворяют таким же условиям, что и функции Грина уравнений теплопроводности, т. е.

$$K(x, \xi, t) = K(\xi, x, t), \quad G(x, \xi, t) = G(\xi, x, t); \tag{9}$$

$$K(x, \xi, 0) = G(x, \xi, 0) = \delta(x - \xi). \tag{10}$$

Под возможным состоянием Q будем понимать такую систему функций e_{ij}, σ_{ij}, u_i, которые определены в $V \times [0, \infty)$ и удовлетворяют условиям $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, $e_{ij} = e_{ji}$. Если ввести сложение состояний и умножение их на скаляр λ по формулах

$$Q + Q' = \{e_{ij} + e'_{ij},\ \sigma_{ij} + \sigma'_{ij},\ u_i + u'_i\}, \quad \lambda Q = \{\lambda e_{ij},\ \lambda\sigma_{ij},\ \lambda u_i\},$$

то множество всех возможных состояний образует линейное пространство K.

Под действительным состоянием будем понимать такую систему функций e_{ij}, σ_{ij}, u_i, которые удовлетворяют системе уравнений и краевым условиям задачи (1) — (8). Очевидно, что действительное состояние принадлежит множеству всех возможных состояний K.

Принимая во внимание, что система уравнений движения (1) вместе с начальными условиями (5) и (6) эквивалентна системе уравнений [8]

$$t_+ * \sigma_{ij,j} + f_i = \rho u_i, \tag{11}$$

где

$$f_i(x, t) = t_+ * F_i(x, t) + \rho\,[t v_i^0(x) + u_i^0(x)], \tag{12}$$

$$t_+ = \begin{cases} t, & t \geqslant 0 \\ 0, & t < 0, \end{cases} \tag{13}$$

имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Если $Q = \{e_{ij}, \sigma_{ij}, u_i\}$ принадлежит множеству всех возможных состояний K и для каждого $t \in [0, \infty)$ определен функционал $F\{Q\}$ по формуле*

$$F\{Q\} = \int_V \int_V S_+(t) * \left\{\frac{1}{2} K_\mu \left[\delta(x - \xi) S_+(t) + \frac{K_c - K_\mu}{K_\mu} K(x, \xi, t)\right] * e_{\alpha\alpha}(x, t) * \right.$$

$$\left. * e_{\alpha\alpha}(\xi, t) + G_\mu \left[\delta(x - \xi) S_+(t) + \frac{G_c - G_\mu}{G_\mu} G(x, \xi, t)\right] * e_{ij}^d(x, t) * e_{ij}^d(\xi, t)\right\} dx d\xi +$$

$$+ \frac{\rho}{2} \int_V u_i(x, t) * u_i(x, t)\, dx - \int_V t_+ * \sigma_{ij}(x, t) * e_{ij}(x, t)\, dx +$$

$$+ \int_{S_2} t_+ * [\sigma_{ij}(x, t)\, n_j(x) - P_i(x, t)] * u_i(x, t)\, dx -$$

$$- \int_V [t_+ * \sigma_{ij,j}(x, t) + f_i(x, t)] * u_i(x, t)\, dx + \int_{S_1} t_+ * \sigma_{ij}(x, t)\, n_j(x) * \tilde{u}_i(x, t)\, dx, \tag{14}$$

то

$$\delta F\{Q\} = 0 \ \text{на}\ K, \ t \in [0, \infty) \tag{15}$$

тогда и только тогда, если $Q = \{e_{ij}, \sigma_{ij}, u_i\}$ — действительное состояние среды.

Действительно, пусть $Q = \{\delta e_{ij}, \delta\sigma_{ij}, \delta u_i\} = L$. Из этого следует, что $Q + \lambda\tilde{Q} \in K$ для произвольного скаляра λ. Учитывая теперь условия (9) — (10), свойства свертки и теорему Гаусса — Остроградского о дивергенции, получаем

$$\delta F\{Q\} = \int_V t_+ * \left\{K_\mu \frac{\partial}{\partial t} \int_V \left[\delta(x-\xi) S_+(t) + \frac{K_c - K_\mu}{K_\mu} K(x, \xi, t)\right] * e_{\alpha\alpha}(\xi, t)\, d\xi - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{3}\sigma_{\alpha\alpha}(x, t)\right\} * \delta e_{\alpha\alpha}(x, t)\, dx + \int_V t_+ * \left\{2G_\mu \frac{\partial}{\partial t} \int_V \left[\delta(x-\xi) S_+(t) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{G_c - G_\mu}{G_\mu} G(x, \xi, t)\right] * e^d_{ij}(\xi, t)\, d\xi - \sigma^d_{ij}(x, t)\right\} * \delta e^d_{ij}(x, t)\, dx -$$

$$- \int_V [t_+ * \sigma_{ij,j} + f_i - \rho \ddot{u}_i] * \delta u_i(x, t)\, dx + \int_V t_+ * [u_{(i,j)}(x, t) - e_{ij}] * \delta e_{ij}(x, t)\, dx +$$

$$+ \int_{S_1} t_+ * [\tilde{u}_i(x, t) - u_i(x, t)] * \delta\sigma_{ij}(x, t)\, n_j dx + \int_{S_2} t_+ * [n_j \sigma_{ij}(x, t) -$$

$$- P_i(x, t)] * \delta u_i(x, t)\, dx, \qquad 0 \leqslant t < \infty. \tag{16}$$

Пусть Q — действительное состояние среды. Из этого следует, что $\delta F\{Q\} = 0$, $t = [0, \infty)$, для произвольного $\tilde{Q} = \{\delta e_{ij}, \delta\sigma_{ij}, \delta u_i\} \in L$. Наоборот, если же предположить, что $\delta F\{Q\} = 0$, $0 \leqslant t < \infty$, для произвольного $\tilde{Q} = \{\delta e_{ij}, \delta\sigma_{ij}, \delta u_i\} \in L$, то пользуясь леммами (1) — (4) работы [7], убеждаемся, что Q — действительное состояние среды.

Теорема 2. *Для заданной в пространстве регулярной области $V \cup S$ с ограничивающей кусочно-гладкой поверхностью S существует не более одной системы имеющих преобразование Лапласа функций $\sigma_{ij}(x, t)$ и $e_{ij}(x, t)$ класса $C^{(1)}$, функций $u_i(x, t)$ класса $C^{(2)}$ для точки $(x, t) \in V \cup S \times [0, \infty)$ и таких, которые при условиях*

$$K_c \geqslant K_\mu > 0, \quad G_c \geqslant G_\mu > 0, \quad \rho > 0, \tag{17}$$

$$\int_V \int_V s K^*(x, \xi, s) f^*(x, s) f^*(\xi, s)\, dx d\xi \geqslant 0, \tag{18}$$

$$\int_V \int_V s G^*(x, \xi, s) f^*(x, s) f^*(\xi, s)\, dx d\xi \geqslant 0 \tag{19}$$

для произвольной $f^*(x, s)$, когда $\operatorname{Re} s > s_1 > 0$, $\operatorname{Im} s = 0$, где звездочкой обозначено преобразование Лапласа соответствующих функций с параметром s, удовлетворяют следующим зависимостям: для $(x, t) \in V \times [0, \infty)$

$$\rho u_i(x, t) = f_i(x, t) + t_+ * \sigma_{ij,j}(x, t), \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ji}; \tag{20}$$

для $(x, t) \in V \cup S \times [0, \infty)$

$$e_{ij} = u_{(i,j)}, \tag{21}$$

$$\sigma_{\alpha\alpha} = 3K_\mu \frac{\partial}{\partial t} \int_V \left[\delta(x-\xi) S_+(t) + \frac{K_c - K_\mu}{K_\mu} K(x, \xi, t)\right] * e_{\alpha\alpha}(\xi, t)\, d\xi, \tag{22}$$

$$\sigma^d_{ij} = 2G_\mu \frac{\partial}{\partial t} \int_V \left[\delta(x-\xi) S_+(t) + \frac{G_c - G_\mu}{G_\mu} G(x, \xi, t)\right] * e^d_{ij}(\xi, t)\, d\xi; \tag{23}$$

для $(x, t) \in S_1 \times [0, \infty)$

$$u_i(x, t) = \tilde{u}_i(x, t); \tag{24}$$

для $(x, t) \in S_2 \times [0, \infty)$

$$n_j \sigma_{ij}(x, t) = P_i(x, t). \tag{25}$$

Для доказательства предположим, что система уравнений (1) — (8) имеет два решения $Q_1 = \{e'_{ij}, \sigma'_{ij}, u'_i\}$ и $Q_2 = \{e''_{ij}, \sigma''_{ij}, u''_i\}$. Тогда разность этих решений $Q = \{e'_{ij} - e''_{ij}, \sigma'_{ij} - \sigma''_{ij}, u'_i - u''_i\} = \{e_{ij}, \sigma_{ij}, u_i\}$ будет решением однородной краевой задачи (1) — (8). В пространстве изображений Лапласа эта система имеет вид

$$\overset{*}{\sigma}_{ij,j} - \rho s^2 u_i^* = 0, \quad \overset{*}{\sigma}_{ij} = \overset{*}{\sigma}_{j,i}, \tag{26}$$

$$\overset{*}{e}_{ij} = \overset{*}{u}_{(i,j)}, \tag{27}$$

$$\overset{*}{\sigma}_{\alpha\alpha} = 3K_\mu s \int\limits_V \left[\delta(x-\xi)\frac{1}{s} + \frac{K_c - K_\mu}{K_\mu} K^*(x, \xi, s)\right] \overset{*}{e}_{\alpha\alpha}(\xi, s)\, d\xi, \tag{28}$$

$$\sigma_{ij}^{*d} = 2G_\mu s \int\limits_V \left[\delta(x-\xi)\frac{1}{s} + \frac{G_c - G_\mu}{G_\mu} G^*(x, \xi, s)\right] e_{ij}^{*d}(\xi, s)\, d\xi, \tag{29}$$

$$u_i^*(x, s) = 0, \quad x \in S_1, \tag{30}$$

$$n_j(x)\, \sigma_{ij}^*(x, s) = 0, \quad x \in S_2, \tag{31}$$

где $f^*(x, s) = \int\limits_0^\infty f(x, t)\, e^{-st} dt$ — изображение Лапласа функции $f(x, t)$. Умножая (26) на $u_i^*(x, s)$ и интегрируя по объему V с учетом (30), получаем

$$\int\limits_V [\sigma_{ij}^* e_{ij}^* + \rho s^* u_i^* u_i^*]\, dx = \int\limits_V \left[\frac{1}{3} \overset{*}{\sigma}_{\alpha\alpha} \overset{*}{e}_{\alpha\alpha} + \sigma_{ij}^{*d} e_{ij}^{*d} + \rho s^2 u_i^* u_i^*\right] dx = 0. \tag{32}$$

Учитывая выражения (28) и (29), равенство (32) приводим к виду

$$\int\limits_V \int\limits_V K_\mu \left[\delta(x-\xi) + \frac{K_c - K_\mu}{K_\mu} sK^*(x, \xi, s)\, \overset{*}{e}_{\alpha\alpha}(x, s)\right] \overset{*}{e}_{\alpha\alpha}(\xi, s)\, dx d\xi +$$

$$+ \int\limits_V \int\limits_V 2G_\mu \left[\delta(x-\xi) + \frac{G_c - G_\mu}{G_\mu} sG^*(x, \xi, s)\, e_{ij}^{*d}(x, s)\right] e_{ij}^{*d}(\xi, s)\, dx d\xi +$$

$$+ \int\limits_V \rho s^2 u_i^* u_i^* dx = 0. \tag{33}$$

Предположим, что $K_c \geqslant K_\mu > 0$, $G_c \geqslant G_\mu > 0$, $\rho > 0$,

$$\int\limits_V \int\limits_V sK^*(x, \xi, s) f^*(x, s) f^*(\xi, s)\, dx d\xi \geqslant 0, \quad \int\limits_V \int\limits_V sG^*(x, \xi, s) f^*(x, s) f(\xi, s)\, dx d\xi \geqslant 0$$

для произвольной $f^*(x, s)$, когда $\mathrm{Re}\, s > s_1 > 0$, $\mathrm{Im}\, s = 0$. Такое s_1 должно существовать, ибо

$$\lim_{s \to \infty} sK^*(x, \xi, s) = \lim_{s \to \infty} sG^*(x, \xi, s) = \delta(x - \xi).$$

Тогда все слагаемые в левой части равенства (33) будут положительными и оно будет справедливым только при нулевых значениях u_i и e_{ij}. Следовательно, в силу единственности аналитического продолжения и однозначности преобразования Лапласа $Q_1 = Q_2$.

Данная теорема обобщает теорему о единственности решений системы уравнений линейной теории вязкоупругости [5] на случай нелокальных реологических соотношений.

Рассмотрим две системы нагрузок

$$L^{(\alpha)} = \{f_i^{(\alpha)}, P_i^{(\alpha)}\}, \qquad (\alpha = 1,\ 2),$$

и соответствующих им конфигураций

$$C^{(\alpha)} = \{u_i^{(\alpha)}\}, \qquad (\alpha = 1,\ 2).$$

Теорема 3. *Если среда, физические свойства которой описываются нелокальными реологическими соотношениями* (3) — (4), *находится под действием двух различных систем нагрузок* $L^{(\alpha)}$, *то между соответствую-*

щими им конфигурациями $C^{(\alpha)}$ существует соотношение взаимности

$$\int_V t_+^* [P_i^{(1)}(x,t) * u_i^{(2)}(x,t) - P_i^{(2)}(x,t) * u_i^{(1)}(x,t)]\,dx +$$
$$+ \int_V [f_i^{(1)}(x,t) * u_i^{(2)}(x,t) - f_i^{(2)}(x,t) * u_i^{(1)}(x,t)]\,dx = 0. \qquad (34)$$

Доказательство. Рассмотрим выражение

$$\int [t_+ * \sigma_{ij,j}^{(1)} + f_i^{(1)} - \rho \ddot{u}_i^{(1)}] * u_i^{(2)}(x,t)\,dx = 0,$$

которое после использования тождества

$$\int_V t_+ * \sigma_{ij,j}^{(1)}(x,t) * u_i^{(2)}(x,t)\,dx \equiv \int_S t_+ * P_i^{(1)}(x,t) * u_i^{(2)}(x,t)\,dx -$$
$$- \int_V \sigma_{ij}^{(1)}(x,t) * t_+ * u_{(i,j)}^{(2)}(x,t)\,dx \qquad (35)$$

и соотношений Коши (2) приводится к виду

$$\int_S t_+ * P_i^{(1)}(x,t) * u_i^{(2)}(x,t)\,dx - \int_V t_+ * \sigma_{ij}^{(1)}(x,t) * e_{ij}^{(2)}(x,t)\,dx +$$
$$+ \int [f_i^{(1)}(x,t) - \rho \ddot{u}_i^{(1)}(x,t)] * u_i^{(2)}(x,t)\,dx = 0. \qquad (36)$$

Исключая здесь с помощью реологических соотношений (3) и (4) $\sigma_{ij}^{(1)}(x,t)$ и учитывая (9), получаем

$$\int_S t_+ * P_i^{(1)}(x,t) * u_i^{(2)}(x,t)\,dx - \int_V t_+ * \sigma_{ij}^{(2)}(x,t) * e_{ij}^{(1)}(x,t)\,dx +$$
$$+ \int_V [f_i^{(1)}(x,t) - \rho \ddot{u}_i^{(1)}(x,t)] * u_i^{(2)}(x,t)\,dx = 0. \qquad (37)$$

Если же в последнем равенстве с помощью соотношений Коши (2) исключить $e_{ij}^{(1)}$ и воспользоваться тождеством (35), то получим соотношение (34), чем и завершается доказательство справедливости соотношения взаимности.

С помощью этого соотношения можно в квадратурах находить решения системы уравнений нелокальной теории вязкоупругости, если известны фундаментальные решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вайсман А. М., Кунин И. А.— ПММ, 1965, **33**, 5.
2. Кунин И. А.— ПМТФ, 1967, 3.
3. Кунин И. А.— ПММ, 1966, **30**, 3.
4. Подстригач Я. С.— Прикладная механика, 1967, **3**, 2.
5. Edelstein W. S., Gurtin M. E.— Arch. Rat. Mech. Annal., 1964, **17**, 47.
6. Gurtin M. E.— Quart. Appl. Math., 1964, **22**, 3.
7. Gurtin M. E.— Arch. Rat. Mech. Annal., 1964, **17**, 1.
8. Ignaczak J.— Archiw. mechaniki stosowanej, 1963, **15**, 2, 225.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию в ноябре 1973 г.

ПЛОСКАЯ И ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ СЛОЯ С ТРЕЩИНОЙ

Г. С. Кит, И. П. Лысый

1. Плоская задача. Рассмотрим бесконечную полосу шириной $2d$, в которой имеется продольная трещина длиной $2l$, расположенная симметрично относительно граней полосы и начала координат. Будем считать, что на гранях полосы заданы температурные условия первого, второго и третьего