щими им конфигурациями $C^{(\alpha)}$ *существует соотношение взаимности*

$$\int_V t_+^* [P_i^{(1)}(x, t) * u_i^{(2)}(x, t) - P_i^{(2)}(x, t) * u_i^{(1)}(x, t)]\, dx +$$
$$+ \int_V [f_i^{(1)}(x, t) * u_i^{(2)}(x, t) - f_i^{(2)}(x, t) * u_i^{(1)}(x, t)]\, dx = 0. \qquad (34)$$

Доказательство. Рассмотрим выражение

$$\int [t_+ * \sigma_{ij,j}^{(1)} + f_i^{(1)} - \rho \ddot{u}_i^{(1)}] * u_i^{(2)}(x, t)\, dx = 0,$$

которое после использования тождества

$$\int_V t_+ * \sigma_{ij,j}^{(1)}(x, t) * u_i^{(2)}(x, t)\, dx \equiv \int_S t_+ * P_i^{(1)}(x, t) * u_i^{(2)}(x, t)\, dx -$$
$$- \int_V \sigma_{ij}^{(1)}(x, t) * t_+ * u_{(i,j)}^{(2)}(x, t)\, dx \qquad (35)$$

и соотношений Коши (2) приводится к виду

$$\int_S t_+ * P_i^{(1)}(x, t) * u_i^{(2)}(x, t)\, dx - \int_V t_+ * \sigma_{ij}^{(1)}(x, t) * e_{ij}^{(2)}(x, t)\, dx +$$
$$+ \int [f_i^{(1)}(x, t) - \rho \ddot{u}_i^{(1)}(x, t)] * u_i^{(2)}(x, t)\, dx = 0. \qquad (36)$$

Исключая здесь с помощью реологических соотношений (3) и (4) $\sigma_{ij}^{(1)}(x, t)$ и учитывая (9), получаем

$$\int_S t_+ * P_i^{(1)}(x, t) * u_i^{(2)}(x, t)\, dx - \int_V t_+ * \sigma_{ij}^{(2)}(x, t) * e_{ij}^{(1)}(x, t)\, dx +$$
$$+ \int_V [f_i^{(1)}(x, t) - \rho \ddot{u}_i^{(1)}(x, t)] * u_i^{(2)}(x, t)\, dx = 0. \qquad (37)$$

Если же в последнем равенстве с помощью соотношений Коши (2) исключить $e_{ij}^{(1)}$ и воспользоваться тождеством (35), то получим соотношение (34), чем и завершается доказательство справедливости соотношения взаимности.

С помощью этого соотношения можно в квадратурах находить решения системы уравнений нелокальной теории вязкоупругости, если известны фундаментальные решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вайсман А. М., Кунин И. А.— ПММ, 1965, **33**, 5.
2. Кунин И. А.— ПМТФ, 1967, 3.
3. Кунин И. А.— ПММ, 1966, **30**, 3.
4. Подстригач Я. С.— Прикладная механика, 1967, **3**, 2.
5. Edelstein W. S., Gurtin M. E.— Arch. Rat. Mech. Annal., 1964, **17**, 47.
6. Gurtin M. E.— Quart. Appl. Math., 1964, **22**, 3.
7. Gurtin M. E.— Arch. Rat. Mech. Annal., 1964, **17**, 1.
8. Ignaczak J.— Archiw. mechaniki stosowanej, 1963, **15**, 2, 225.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию в ноябре 1973 г.

ПЛОСКАЯ И ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ СЛОЯ С ТРЕЩИНОЙ

Г. С. Кит, И. П. Лысый

1. Плоская задача. Рассмотрим бесконечную полосу шириной $2d$, в которой имеется продольная трещина длиной $2l$, расположенная симметрично относительно граней полосы и начала координат. Будем считать, что на гранях полосы заданы температурные условия первого, второго и третьего [illegible], а берега трещины теплоизолированы. Тогда температурное поле в полосе с трещиной можно представить в виде суммы основного (имеющего место в сплошной полосе) и возмущенного (обусловленного наличием теплоизолированной трещины) полей. Задача определения температурного поля рассматривалась в работе [4].

В данной работе остановимся на определении коэффициентов интенсивности напряжений, обусловленных возмущением основного температурного поля *. Как известно [5], эти коэффициенты легко найти, если известны производные по x от смещений берегов трещины. В частности, в рассматриваемом нами случае коэффициент $k_1 = 0$, а коэффициент k_2 определяется по формуле

$$k_2 = \mp \frac{E\sqrt{l}}{2(1-\nu^2)} \lim_{x \to 1} \sqrt{1-x^2}\, \frac{\partial u(x, 0)}{\partial x}, \tag{1}$$

где E — модуль упругости; ν — коэффициент Пуассона; $u(x)$ — смещение верхнего берега трещины в направлении оси Ox, знаки «—» и «+» соответствуют правому и левому концам трещины.

В случае, когда функция $t(x)$, характеризующая возмущенное температурное поле при $y = 0$, является четной, с помощью преобразования Фурье задача об определении производной $\frac{\partial u}{\partial x}$ приводится к решению интегрального уравнения

$$\int_{-1}^{1} \varphi(\xi) K\left(\frac{\xi - x}{\delta}\right) d\xi = 0, \tag{2}$$

где

$$\varphi(x) = u'(x) - Dt(x); \tag{3}$$

$$K(w) = \int_0^\infty L(\eta) \sin \eta w\, d\eta, \quad L(\eta) = 2\,\frac{\operatorname{sh}^2 \eta - \eta^2}{\operatorname{sh} 2\eta - 2\eta}; \tag{4}$$

$\delta = \frac{d}{l}$ — безразмерная полуширина полосы; α — коэффициент линейного теплового расширения; $D = \alpha(1+\nu)$.

Уравнение (2) при $\delta > 1$ можно решить приближенно асимптотическим методом, развитым в работах [1, 2, 6]. С этой целью представим ядро $K(w)$ в виде

$$K(w) = \frac{1}{w} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k w^{2k-1}. \tag{5}$$

Коэффициенты a_k определяются по формуле

$$a_k = \frac{(-1)^k}{(2k-1)!} \int_0^\infty \eta^{2k-1} [1 - L(\eta)]\, d\eta. \tag{6}$$

Из соотношений (4) — (6) следует, что ряд в выражении (5) абсолютно сходится при $w < 2$ и, следовательно, все последующие выводы справедливы при $\delta > 1$.

Подставляя выражение $K(w)$ в форме (5) в уравнение (2), получаем

$$\int_{-1}^{1} \frac{\varphi(\eta)\, d\eta}{\eta - x} = -\sum_{k=1}^{\infty} a_k \delta^{-2k} \int_{-1}^{1} \varphi(\eta)(\eta - x)^{2k-1} d\eta. \tag{7}$$

Применив к этому уравнению формулу обращения интеграла типа Коши [3], будем иметь

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left[\frac{1}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \delta^{-2k} \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-\eta^2}}{\eta - x} d\eta \int_{-1}^{1} \varphi(z)(z-\eta)^{2k-1} dz + C \right]. \tag{8}$$

---

* Коэффициенты интенсивности напряжений, обусловленных основным температурным полем, определяются путем решения задачи термоупругости для сплошной полосы с дальнейшим снятием усилий, возникающих на месте трещины.

Решение уравнения (8) ищем в виде ряда по степеням δ^{-2}

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^{-2n} \varphi_n(x). \tag{9}$$

Подставляя (9) в уравнение (8) и приравнивая выражения при одинаковых степенях δ, получаем рекуррентные соотношения для определения $\varphi_n(x)$:

$$\varphi_0(x) = + \frac{C}{\sqrt{1-x^2}}, \tag{10}$$

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\pi^2 \sqrt{1-x^2}} \left[\int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi - x} d\xi \int_{-1}^{1} \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-k} \varphi_k(s) (s-\xi)^{2(n-k)-1} ds \right],$$

$$n = 1,\ 2,\ \ldots .$$

Произвольная постоянная C определяется из условия, что $u(\pm 1) = 0$.

В частном случае, когда на верхней и нижней гранях полосы задана соответственно температура $\pm T_0$, то основное температурное поле $t^*(x, y) = qy$, где $q = \frac{T_0}{\delta}$, и производная $u'(x)$, найденная описанным выше способом с учетом выражения для $t(x)$, приведенного в работе [4], имеет вид

$$u'(x) = D\left[t(x) - \frac{\psi(x)}{\sqrt{1-x^2}} \right]. \tag{11}$$

Здесь

$$\psi(x) = \frac{q}{2} \Big\{ 1 - [a_1 h(x) + \varepsilon_{11}] \delta^{-2} - \left[a_2 \gamma(x) - a_1 \varepsilon_{11} h(x) + \varepsilon_{21} + \frac{1}{4} \varepsilon_{22} \right] \delta^{-4} -$$

$$- \left[\frac{3}{8} a_1 a_2 h(x) + a_3 \left(\frac{13}{8} + \frac{3}{4} x^2 - \frac{9}{2} x^4 - x^6 \right) - a_2 \varepsilon_{11} \gamma(x) - \right.$$

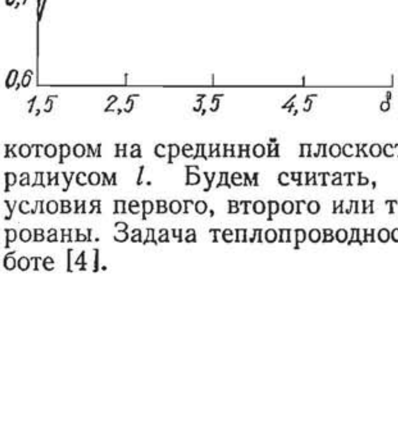
$$\left. - a_1 \left(\varepsilon_{21} + \frac{1}{4} \varepsilon_{22} \right) h(x) + \varepsilon_{31} + \frac{1}{4} \varepsilon_{32} + \frac{1}{8} \varepsilon_{33} \right] \delta^{-6} + o(\delta^{-8}) \Big\},$$

$$h(x) = \frac{1}{2} - x^2,$$

$$\gamma(x) = \frac{7}{8} - x^2 - x^4, \quad \varepsilon_{11} = \frac{b_1}{2}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{b_2}{2}, \quad \varepsilon_{33} = \frac{b_3}{2}, \quad \varepsilon_{21} = -\frac{b_1^2}{4} + \frac{5}{8} b_2,$$

$$\varepsilon_{31} = \frac{1}{4} b_1^3 - \frac{11}{16} b_1 b_2 + \frac{9}{8} b_3, \quad \varepsilon_{32} = -\frac{1}{4} b_1 b_2 + \frac{3}{2} b_3,$$

$$b_1 = 0{,}8225, \quad b_2 = -0{,}1353, \quad b_3 = 0{,}0318.$$



Коэффициенты a_k, подсчитанные по формуле (6), равны $a_1 = -1{,}3289$; $a_2 = 0{,}9667$; $a_3 = -0{,}5154$.

Подставляя найденное выражение $u'(x)$ в формулу (1), получаем для правого конца трещины

$$k_2 = \frac{\alpha E \psi(1) \sqrt{l}}{2(1-\nu)}.$$

На рисунке сплошной линией представлена зависимость $\tilde{k}_2 = \frac{4(1-\nu)}{\alpha E q \sqrt{l}} k_2$ от величины δ.

2. Осесимметричная задача. Рассмотрим бесконечный слой толщиной $2d$, в котором на срединной плоскости ($z = 0$) имеется дискообразная трещина радиусом l. Будем считать, что на гранях слоя заданы температурные условия первого, второго или третьего рода, а берега трещины теплоизолированы. Задача теплопроводности для этого случая рассматривалась в работе [4].

Цель настоящего исследования — определить коэффициент интенсивности напряжений k_2, обусловленных осесимметричным возмущенным температурным полем. Термоупругое состояние слоя с трещиной, обусловленное основным температурным полем, будем считать известным, так как его можно найти путем решения задачи для сплошного слоя с последующим снятием усилий, возникающих на месте расположения трещины. Метод решения последней задачи изложен в работе [5].

В рассматриваемом нами случае коэффициент интенсивности напряжений k_2 выражается по формуле (1) при замене x на r с учетом верхнего знака. Поэтому для решения данной задачи достаточно найти $\frac{\partial u(r)}{\partial r}$, где $u(r)$ — радиальное перемещение берегов щели. Применяя к уравнениям равновесия термоупругости в перемещениях, записанных в цилиндрической системе координат, интегральное преобразование Ханкеля и учитывая соответствующие граничные условия, получаем для определения функции $u(r)$ интегральное уравнение

$$\int_0^1 \tau u(\tau)\, d\tau \int_0^\infty \eta^2 L(\eta) J_1\left(\eta \frac{\tau}{\delta}\right) J_1\left(\eta \frac{r}{\delta}\right) d\eta =$$

$$= D\delta \int_0^1 \tau t(\tau)\, d\tau \int_0^\infty \eta L(\eta) J_0\left(\frac{\eta\tau}{\delta}\right) J_1\left(\frac{\eta r}{\delta}\right) d\eta, \qquad 0 \leqslant r \leqslant 1. \qquad (13)$$

Здесь $J_n(x)$ — функции Бесселя, $L(\eta)$ — дается формулой (4).

Используя уравнение, которому удовлетворяет температура $t(r)$ [4], преобразуем (13) к следующему виду:

$$\int_0^1 \tau u(\tau)\, d\tau \int_0^\infty \eta^2 J_1(\eta\tau) J_1(\eta r)\, d\eta = D\Bigg[p(r) +$$

$$+ \frac{1}{\delta^2} \int_0^1 \tau t(\tau) M\left(\frac{\tau}{\delta}, \frac{r}{\delta}\right) d\tau\Bigg] + \frac{1}{\delta^3} \int_0^1 \tau u(\tau) N\left(\frac{\tau}{\delta}, \frac{r}{\delta}\right) d\tau. \qquad (14)$$

Здесь

$$p(r) = -\frac{1}{r} \int_0^r \xi f(\xi)\, d\xi, \quad f(r) = \frac{\partial t^*(r, 0)}{\partial z},$$

$$M\left(\frac{\tau}{\delta}, \frac{r}{\delta}\right) = \int_0^\infty \eta\, [\operatorname{cth} \eta - L(\eta)]\, J_0\left(\frac{\eta\tau}{\delta}\right) J_1\left(\frac{\eta r}{\delta}\right) d\eta =$$

$$= \frac{r}{\delta} \sum_{k=0}^\infty d_k \left(\frac{\tau}{\delta}\right)^{2k} F\left(-k, -k, 2, \frac{r^2}{\tau^2}\right),$$

$$d_k = \frac{(-1)^k}{3\pi 2^{2k-1} (k!)!} \int_0^\infty [L(\eta) - \operatorname{cth} \eta]\, \eta^{2k+2} d\eta, \qquad (15)$$

$$N\left(\frac{\tau}{\delta}, \frac{r}{\delta}\right) = \int_0^\infty \eta^2 [1 - L(\eta)]\, J_1\left(\frac{\eta\tau}{\delta}\right) J_1\left(\frac{\eta r}{\delta}\right) d\eta =$$

$$= \frac{\tau r}{\delta^2} \sum_{k=0}^\infty c_k \left(\frac{\tau}{\delta}\right)^{2k} F\left(-k, -1, -k, 2, \frac{r^2}{\tau^2}\right),$$

$$c_k = \frac{(-1)^k}{3\pi 2^{2k+1} (k!)^2 (k+1)} \int_0^\infty [1 - L(\eta)]\, \eta^{2k+4} d\eta, \qquad (16)$$

F — гипергеометрическая функция, $t^*(r, z)$ — температурное поле в слое без трещины.

Применив к уравнению (14) формулу обращения, приведем его к интегральному уравнению Фредгольма второго рода:

$$u(r) = \frac{2r}{\pi}\int_r^1 \frac{d\rho}{\rho^2\sqrt{\rho^2 - r^2}}\int_0^\rho \frac{\xi^2 d\xi}{\sqrt{\rho^2-\xi^2}}\left\{D\left[p(r) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{\delta^2}\int_0^1 \tau t(\tau) M\left(\frac{\tau}{\delta}, \frac{r}{\delta}\right) d\tau\right] + \frac{1}{\delta^3}\int_0^1 \tau u(\tau) N\left(\frac{\tau}{\delta}, \frac{r}{\delta}\right) d\tau\right\}. \qquad (17)$$

Решение этого уравнения будем искать в виде

$$u(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^{-n} u_n(r). \qquad (18)$$

Подставив выражение (18) в уравнение (17) и приравняв члены его правой и левой частей при одинаковых степенях δ, получим ряд рекуррентных соотношений, из которых последовательно определяются $u_n(r)$. Тогда легко можно найти $u'(r)$.

Рассмотрим конкретный пример. Пусть на верхней и нижней гранях слоя задана постоянная температура $\pm T_0$ соответственно, тогда $f(r) = -q = -\frac{T_0}{\delta}$ и для перемещения $u(r)$, найденного указанным выше способом, имеем выражение

$$u(r) = \frac{2Dq}{3\pi} r\sqrt{1-r^2}\left\{1 + d_0\delta^{-3} + \frac{4}{15}[c_0 + d_1(2 + r^2)]\delta^{-5} + 0{,}3825 d_0\delta^{-} + \right.$$

$$\left. + \frac{224}{1575}\left[c_1\left(\frac{11}{7} + r^2\right) + \frac{6}{7} d_2(4 + 4r^2 + r^4)\right]\delta^{-7} + o(\delta)^{-8}\right\}. \qquad (19)$$

Коэффициенты d_k, c_k определяем по формулам (15) и (16) и получаем $d_0 = -0{,}6346$; $d_1 = 1{,}0078$; $d_2 = -0{,}8737$; $c_0 = 0{,}9263$; $c_1 = -1{,}6721$.

Использовав формулу (1), найдем

$$k_2 = \frac{\alpha E q\sqrt{l}}{3\pi(1-\nu)}\left\{1 + d_0\delta^{-3} + \frac{4}{15}(c_0 + 3d_1)\delta^{-5} + \right.$$

$$\left. + 0{,}3825 d_0\delta^{-6} + \frac{192}{525}(c_1 + 3d_2)\delta^{-7} + o(\delta^{-8})\right\}. \qquad (20)$$

Зависимость величины $\bar{k}_2 = \frac{3\pi(1-\nu)}{\alpha E q\sqrt{l}} k_2$ от относительной полутолщины слоя δ представлена на рисунке штриховой линией.

В заключение отметим, что коэффициенты интенсивности напряжений соответственно для полосы или слоя по мере увеличения их относительной ширины или толщины стремятся к тому значению, которое имеет место для плоскости или пространства (с точностью до 3% для полосы это будет при $\delta > 6$, а для слоя — при $\delta > 3$). Установление таких оценок представляет интерес в связи с тем, что они дают возможность судить о применимости для полосы и слоя результатов, полученных для плоскости и пространства.

Приведенный выше способ решения задач рационально использовать при $\delta > 2$. Для малых значений величины δ эти задачи нужно решать иным путем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров В. М.— ПММ, 1962, 26, 5.
2. Александров В. М., Ворович И. И.— ПММ, 1960, 24, 2.
3. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. Физматгиз, М., 1963.

4. Кит Г. С., Лысый И. П.— ИФЖ, 1972, 22, 1.
5. Прикладные вопросы вязкости разрушения. «Мир», М., 1968.
6. Сметанин Б. И.— Инженерный журнал, МТТ, 1968, 2.

Львовский филиал математической физики
Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию
в ноябре 1973 г.

ВЛИЯНИЕ СТАЦИОНАРНОГО ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ НА НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПЛОСКОСТИ С ИНОРОДНЫМ ВКЛЮЧЕНИЕМ И ТРЕЩИНОЙ

Ю. С. Френчко

Рассматривается задача об определении термоупругого состояния неограниченной изотропной плоскости с инородным круговым включением и прямолинейной трещиной, находящейся на продолжении диаметра включения, когда на бесконечности задан однородный тепловой поток. Аналогичная задача для случая, когда плоскость с включением и трещиной растягивается приложенными на бесконечности постоянными усилиями, решена в приближенной постановке в работах [1, 6, 9], а в статье [11] сведена к решению сингулярного интегрального уравнения.

1. Пусть в бесконечной плоскости имеется упругое включение радиуса R с иными физико-механическими свойствами, а на продолжении диаметра вдоль оси Ox находится трещина ($a \leqslant x \leqslant b$). Определим термоупругое состояние плоскости и включения, когда на бесконечности задан однородный тепловой поток, считая при этом, что трещина свободна от напряжений, а на границе γ включения и связующего выполняются условия идеального механического и теплового контакта

$$\begin{gathered}\sigma_{\rho\rho}^{(1)}(\sigma) + i\sigma_{\rho\theta}^{(1)}(\sigma) = \sigma_{\rho\rho}^{(2)}(\sigma) + i\sigma_{\rho\theta}^{(2)}(\sigma) = \omega(\sigma),\\ u_1(\sigma) + iv_1(\sigma) = u_2(\sigma) + iv_2(\sigma) = u(\sigma) + iv(\sigma),\end{gathered} \tag{1}$$

$$T_1(\sigma) = T_2(\sigma) = T(\sigma),\ \lambda_1\frac{\partial T_1(\sigma)}{\partial\rho} = \lambda_2\frac{\partial T_2(\sigma)}{\partial\rho},\ \sigma \in \gamma. \tag{2}$$

Здесь индексами 1 и 2 обозначены все характеристики, относящиеся соответственно к плоскости и включению; λ — коэффициент теплопроводности; $T(x, y)$ — температура; $\sigma_{\rho\rho}(\sigma)$, $\sigma_{\rho\theta}(\sigma)$, $u(\sigma)$, $v(\sigma)$ — компоненты напряжений и перемещений.

2. Определим температурное поле и напряженное состояние в плоскости с включением при заданном вдали от включения распределении температуры

$$T(x, y) = 2\mathrm{Re}\, F(z), \quad F(z) = a_1 z + \frac{1}{2}t_0, \tag{3}$$

где $a_1 = qRe^{-i\alpha}/2\lambda_1$; α — угол, образованный направлением теплового потока $\vec{q}$ с осью Ox; t_0 — постоянная температура; $z = \rho e^{i\theta}$, $\rho = \frac{r}{R}$.

Выражая комплексный потенциал температуры через неизвестную пока температуру $T(\sigma)$ на окружности γ и удовлетворяя условию идеального теплового контакта (2), получаем сингулярное интегральное уравнение

$$\frac{1}{\pi i}\int_\gamma \frac{T'(\sigma)\,d\sigma}{\sigma - \sigma_0} = c\left(a_1 + \frac{\bar{a}_1}{\sigma_0^2}\right), \qquad \sigma_0,\ \sigma \in \gamma, \tag{4}$$

где $c = \dfrac{2\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$.

Решив это уравнение, найдем [5]

$$T(\sigma) = c\left(a_1\sigma + \frac{\bar{a}_1}{\sigma}\right), \tag{5}$$