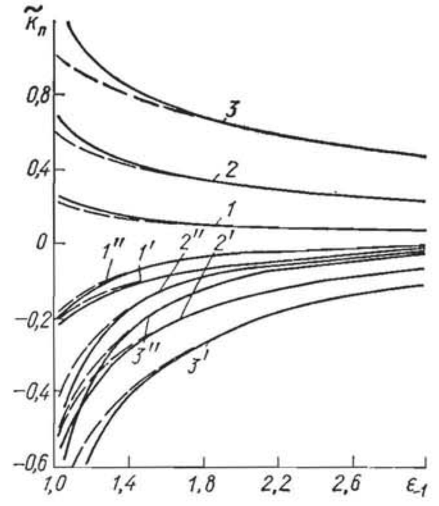

На рисунке построены для левого конца трещины зависимости величины $\tilde{k}_n$ ($n = 0, 1, 2$) от расстояния ε_{-1} этого конца до включения, если $\varkappa_1 = \varkappa_2 = 2$, $\Gamma = 1/3$ и длина трещины $l = \varepsilon_{+1} - \varepsilon_{-1} = 0{,}1$; 1; 9 (значениям $l = 0$, 1; 1; 9 соответствуют кривые *1*, *2*, *3* при $n = 0$; 1′, 2′, 3′ при $n = 1$; 1″, 2″, 3″ при $n = 2$). Как и следовало ожидать, эти величины уменьшаются с увеличением расстояния трещины до включения. Точное (сплошные линии) и приближенное (штриховые линии) значения уже на расстоянии одного радиуса от включения до левого конца трещины отличаются в наихудшем случае (длина трещины $l = 9$) не более чем на 1,5% и совпадают до пятого знака включительно для трещины длиной 0,1. Следует отметить, что, начиная с расстояния $\varepsilon_{-1} \approx 1{,}5$, отношение $\frac{G_2}{G_1} = \Gamma$ практически не влияет на величины $\tilde{k}_n$, т. е. коэффициенты интенсивности напряжений в основном будут зависеть от тепловых характеристик материалов (α_t, λ), которые входят в K_0, K_1, $K_2 - K_1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бережницкий Л. Т., Панасюк В. В., Труш И. И.— ФХММ, 1970, 5.
2. Бережницький Л. Т., Труш І. І.— У кн.: Питання ФХММ. Вид-во Львівського ун-ту, Львів, 1969.
3. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. Физматгиз, М., 1963.
4. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. «Наука», М., 1966.
5. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. Физматгиз, М., 1962.
6. Панасюк В. В., Бережницкий Л. Т., Труш И. И.— ФХММ, 1971, 1.
7. Подстригач Я. С., Гайвась И. В.— Прикладная механика, 1966, 2, 3.
8. Прусов И. А. Некоторые задачи термоупругости. Изд-во Белорусского ун-та, Минск, 1972.
9. Труш И. И., Панасюк В. В., Бережницкий Л. Т.— ФХММ, 1972, 6.
10. Atkinson C.— Int. J. Engng. Sci, 1972, 10, 1.
11. Atkinson C.— Int. J. Engng. Sci., 1972, 10, 2.

Львовский филиал математической физики
Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию
в ноябре 1973 г.

СТАЦИОНАРНАЯ ЗАДАЧА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ ПОЛУПРОСТРАНСТВА С ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ СМЕШАННОГО ТИПА

А. Е. Андрейкив

Рассмотрим термостатическую задачу для полупространства, на границе которого $z = 0$ задано одно из следующих температурных условий:

$$1)\qquad \begin{aligned} &T_{z=0} = T_0(x, y) && \text{при } (x, y) \in \Delta; \\ &\left.\frac{\partial T}{\partial z}\right|_{z=0} = \gamma(x, y) && \text{при } (x, y) \in S; \end{aligned} \qquad (1)$$

2)
$$T|_{z=0} = T_0(x, y) \qquad \text{при } (x, y) \in \Delta;$$
$$\left[\frac{\partial T}{\partial z} + \lambda_1 T\right]_{z=0} = \gamma(x, y) \qquad \text{при } (x, y) \in S. \tag{2}$$

Здесь T — искомая функция распределения температуры в полупространстве $z \geqslant 0$, которая удовлетворяет уравнению

$$\lambda_2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)T + W(x, y, z) = 0; \tag{3}$$

$T_0(x, y)$, $\gamma(x, y)$ — заданные функции; Δ, S — многосвязные области, которые в сумме составляют всю плоскость $z = 0$; λ_1 — коэффициент теплообмена; $W(x, y, z)$ — плотность источников тепла, действующих в области V; λ_2 — коэффициент теплопроводности.

Для решения термостатической задачи для полупространства с граничными условиями (1) представим искомую функцию T так:

$$T = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-z\sqrt{\xi^2 + \eta^2} + i(x\xi + y\eta)\right] A(\xi, \eta)\, d\xi d\eta + \Phi, \tag{4}$$

где $A(\xi, \eta)$ — неизвестная функция;

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\lambda_2}\iiint\limits_V \frac{W(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi d\eta d\zeta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}}. \tag{5}$$

Подставляя выражение (4) в (1), для определения неизвестной функции $A(\xi, \eta)$ получаем интегральные уравнения

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[i(x\xi + y\eta)\right] A(\xi, \eta)\, d\xi d\eta = B_1(x, y) \qquad \text{при } (x, y) \in \Delta;$$
$$\nabla^2 \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left[i(x\xi + y\eta)\right]}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} A(\xi, \eta)\, d\xi d\eta = B_2(x, y) \qquad \text{при } (x, y) \in S, \tag{6}$$

где

$$B_2(x, y) = \gamma(x, y) - \left.\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right|_{z=0}; \quad B_1(x, y) = T_0(x, y) - \Phi|_{z=0};$$
$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Пусть область S состоит из совокупности областей $S_1, \ldots, S_m$ $\left(S = \sum\limits_{k=1}^{m} S_k\right)$, внешними контурами которых будут окружности кругов $\Delta_1, \ldots, \Delta_m$. Положим, что в каждой области S_k выполняются условия

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[i(x\xi + y\eta)\right] A(\xi, \eta)\, d\xi d\eta = f_k(x, y) \qquad \text{при } (x, y) \in S_k;$$
$$\nabla^2 \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left[i(x\xi + y\eta)\right]}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} A(\xi, \eta)\, d\xi d\eta = \gamma_k(x, y) \qquad \text{при } (x, y) \in S_k,$$

где $f_k(x, y)$ — неизвестные функции;

$$\gamma_k(x, y) = B_2(x, y) \qquad \text{при } (x, y) \in S.$$

Тогда интегральные уравнения (6) сводятся к новой системе интегральных уравнений вида

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[i(x\xi + y\eta)\right] A(\xi, \eta)\, d\xi d\eta = \Psi_k(x, y) \qquad \text{при } (x, y) \in S_k^{(0)};$$

$$\nabla^2 \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp[i(x\xi+y\eta)]}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}} A(\xi,\ \eta)\, d\xi d\eta = \gamma_k(x,\ y) \qquad \text{при } (x,\ y) \in S_k, \tag{7}$$

$$(k = 1,\ 2,\ \ldots,\ m),$$

где $S_k^{(0)}$ — область вне S_k;

$$\Psi_k(x,\ y) = \begin{cases} f_n(x,\ y) & \text{при } (x,\ y) \in S_n; \\ B_1(x,\ y) & \text{при } (x,\ y) \in \Delta \ (n \neq k;\ n = 1,\ 2, \ldots,\ m). \end{cases}$$

Будем считать, что в каждой области S_k имеется N_k внутренних контуров (окружностей), которые ограничивают области Δ_{jk} ($j = 1,\ 2,\ \ldots,\ N_k$). Представим теперь искомую функцию A (ξ, η) в виде такой суммы:

$$A(\xi,\ \eta) = A_k(\xi,\ \eta) + \sum_{j=1}^{N_k} A_{kj}(\xi,\ \eta), \tag{8}$$

где неизвестные функции $A_k(\xi,\ \eta)$ и $A_{kj}(\xi,\ \eta)$ удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{aligned} &\nabla^2 \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp[i(x\xi+y\eta)]\, A_k(\xi,\ \eta)}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}\, d\xi d\eta = \beta_k(x,\ y) \qquad \text{при } (x,\ y) \in \Delta_k; \\ &\nabla^2 \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp[i(x\xi+y\eta)]\, A_{kj}(\xi,\ \eta)}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}\, d\xi d\eta = \beta_{kj}(x,\ y) \qquad \text{при } (x,\ y) \in \Delta_{kj}^{(0)}, \end{aligned} \tag{9}$$

где $\Delta_{kj}^{(0)}$ — область вне Δ_{kj}; функции $\beta_k(x,\ y)$ и $\beta_{kj}(x,\ y)$ выбираются так, чтобы они были интегрируемые в своих областях изменения и удовлетворяли равенству

$$\beta_k(x,\ y) + \sum_{j=1}^{N_k} \beta_{kj}(x,\ y) = \gamma_k(x,\ y) \qquad \text{при } (x,\ y) \in S_k.$$

Доопределим функции $A_k(\xi,\ \eta)$ и $A_{kj}(\xi,\ \eta)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp[i(x\xi+y\eta)]\, A_k(\xi,\ \eta)\, d\xi d\eta = \varphi_k(x,\ y) \qquad \text{при } (x,\ y) \in \Delta_k; \\ &\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp[i(x\xi+y\eta)]\, A_{kj}(\xi,\ \eta)\, d\xi d\eta = \varphi_{kj}(x,\ y) \qquad \text{при } (x,\ y) \in \Delta_{kj}^{(0)}, \end{aligned} \tag{10}$$

где неизвестные функции $\varphi_k(x,\ y)$ и $\varphi_{kj}(x,\ y)$ удовлетворяют уравнениям

$$\varphi_k(x,\ y) + \sum_{j=1}^{N_k} \varphi_{kj}(x,\ y) = f_k(x,\ y) \qquad \text{при } (x,\ y) \in S_k.$$

Тогда на основании соотношений (8) — (10) система интегральных уравнений (7) сведется к такой системе двумерных дуальных интегральных уравнений:

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp[i(x\xi+y\eta)]\, A_k(\xi,\ \eta)\, d\xi d\eta = \alpha_k(x,\ y) \qquad \text{при } (x,\ y) \in \Delta_k^{(0)}; \\ &\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp[i(x\xi+y\eta)]\, A_{kj}(\xi,\ \eta)\, d\xi d\eta = \alpha_{kj}(x,\ y) \qquad \text{при } (x,\ y) \in \Delta_{kj}; \end{aligned} \tag{11}$$

$$\nabla^2 \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp[i(x\xi+y\eta)]A_k(\xi,\ \eta)}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}\, d\xi d\eta = \beta_k(x,\ y) \qquad \text{при } (x,\ y) \in \Delta_k;$$

$$\nabla^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp[i(x\xi + y\eta)]\, A_{kj}(\xi, \eta)}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}\, d\xi d\eta = \beta_{kj}(x, y) \qquad \text{при } (x, y) \in \Delta_{kj}^{(0)} \tag{12}$$

$$(k = 1, 2, \ldots, m; \quad j = 1, 2, \ldots, N_k),$$

где

$$\alpha_k(x, y) = \Psi_k(x, y) - \sum_{n=1}^{N_k} \varphi_{kn}(x, y);$$

$$\alpha_{kj}(x, y) = \Psi_{kj}(x, y) - \varphi_k(x, y) - \sum_{n=1(\neq j)}^{N_k} \varphi_{kn}(x, y).$$

На основании соотношений (10), (11) и обратного преобразования Фурье получим

$$\begin{aligned} 4\pi^2 A_k(\xi, \eta) &= \iint\limits_{\Delta_k} \exp[-i(x\xi + y\eta)]\, \varphi_k(x, y)\, dxdy + \\ &+ \iint\limits_{\Delta_k^{(0)}} \exp[-i(x\xi + y\eta)]\, \alpha_k(x, y)\, dxdy; \\ 4\pi^2 A_{kj}(\xi, \eta) &= \iint\limits_{\Delta_{kj}^{(0)}} \exp[-i(x\xi + y\eta)]\, \varphi_{kj}(x, y)\, dxdy + \\ &+ \iint\limits_{\Delta_{kj}} \exp[-i(x\xi + y\eta)]\, \alpha_{kj}(x, y)\, dxdy. \end{aligned} \tag{13}$$

Подставив соотношения (13) в уравнения (12), систему дуальных интегральных уравнений (11) — (12) сведем к такой системе интегральных уравнений первого рода:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \iint\limits_{\Delta_k} \frac{\varphi_k(\xi, \eta)\, d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} &= 2\pi\beta_k(x, y) - \nabla^2 \iint\limits_{\Delta_k^{(0)}} \frac{\alpha_k(\xi, \eta)\, d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}}; \\ \nabla^2 \iint\limits_{\Delta_{kj}^{(0)}} \frac{\varphi_{kj}(\xi, \eta)\, d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} &= 2\pi\beta_{kj}(x, y) - \nabla^2 \iint\limits_{\Delta_{kj}} \frac{\alpha_{kj}(\xi, \eta)\, d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} \end{aligned} \tag{14}$$

$$(k = 1, 2, \ldots, m; \quad j = 1, 2, \ldots, N_k).$$

Использовав результаты работ [1, 2], систему интегральных уравнений (14) сведем к системе двумерных интегральных уравнений типа Фредгольма второго рода

$$\begin{aligned} \varphi_{kj}(x, y) &= \frac{1}{\pi^2} \iint\limits_{\Delta_{kj}} \frac{\sqrt{(x - x_{kj})^2 + (y - y_{kj})^2 - a_{kj}^2}\, \alpha_{kj}(\xi, \eta)\, d\xi d\eta}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]\sqrt{a_{kj}^2 - (\xi - x_{kj})^2 - (\eta - y_{kj})^2}} + \\ &+ \frac{1}{\pi^2} \iint\limits_{\Delta_{kj}^{(0)}} \frac{\beta_{kj}(\xi, \eta)}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} \operatorname{arcctg} \frac{a_{kj}\sqrt{(x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}}{\varkappa_{kj}}\, d\xi d\eta; \\ \varphi_k(x, y) &= \frac{1}{\pi^2} \iint\limits_{\Delta_k^{(0)}} \frac{\sqrt{a_k^2 - (x - x_k)^2 - (y - y_k)^2}\, \alpha_k(\xi, \eta)\, d\xi d\eta}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]\sqrt{(\xi - x_k)^2 + (\eta - y_k)^2 - a_k^2}} + \\ &+ \frac{1}{\pi^2} \iint\limits_{\Delta_k} \frac{\beta_k(\xi, \eta)}{\sqrt{(x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}} \operatorname{arcctg} \frac{a_k\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}}{\varkappa_k}\, d\xi d\eta \end{aligned} \tag{15}$$

$$(k = 1, 2, \ldots, m; \quad j = 1, 2, \ldots, N_k),$$

где a_k, a_{kj} — радиусы кругов Δ_k и Δ_{kj}; (x_k, y_k), (x_{kj}, y_{kj}) — координаты их центров

$$\varkappa_n^2 = [a_n^2 - (\xi - x_n)^2 - (\eta - y_n)^2][a_n^2 - (x - x_n)^2 - (y - y_n)^2].$$

Таким образом, задача сведена к решению системы (15) интегральных уравнений типа Фредгольма второго рода, которые во многих частных случаях могут быть эффективно решены методом последовательных приближений. Если система интегральных уравнений (15) будет решена, то значение температуры T в области S определится через искомые функции $\varphi_k(x, y)$ и $\varphi_{kj}(x, y)$ следующим образом:

$$T = \varphi_k(x, y) + \sum_{j=1}^{N_k} \varphi_{kj}(x, y) \qquad \text{при } (x, y) \in S_k, \tag{16}$$

а общее решение поставленной задачи дается формулами (4), (8) и (13).

Рассмотрим теперь термостатическую задачу для полупространства с граничными условиями (2), где области S и Δ такие же, как и в первом случае. Поступая аналогично изложенному выше, можно показать, что такая задача сведется к решению системы двумерных интегральных уравнений типа Фредгольма второго рода:

$$\begin{aligned}
\varphi_{kj}(x, y) &= \frac{1}{\pi^2}\iint\limits_{\Delta_{kj}} \frac{\sqrt{(x - x_{kj})^2 + (y - y_{kj})^2 - a_{kj}^2}\,\alpha_{kj}(\xi, \eta)\,d\xi d\eta}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]\sqrt{a_{kj}^2 - (\xi - x_{kj})^2 - (\eta - y_{kj})^2}} + \\
&+ \frac{1}{\pi^2}\iint\limits_{\Delta_{kj}^{(0)}} \frac{\beta_{kj}(\xi, \eta) - \lambda_1\varphi_{kj}(\xi, \eta)}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} \operatorname{arcctg}\frac{a_{kj}\sqrt{(x-\xi)^2 + (u-\eta)^2}\,d\xi d\eta}{\varkappa_{kj}}; \\
\varphi_k(x, y) &= \frac{1}{\pi^2}\iint\limits_{\Delta_k^{(0)}} \frac{\sqrt{a_k^2 - (x - x_k)^2 - (y - y_k)^2}\,\alpha_k(\xi, \eta)\,d\xi d\eta}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]\sqrt{(\xi - x_k)^2 + (\eta - y_k)^2 - a_k^2}} + \\
&+ \frac{1}{\pi^2}\iint\limits_{\Delta_k} \frac{\beta_k(\xi, \eta) - \lambda_1\varphi_k(\xi, \eta)}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} \operatorname{arcctg}\frac{a_k\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}}{\varkappa_k}\,d\xi d\eta
\end{aligned} \tag{17}$$

$$(k = 1, 2, \ldots, m; \quad j = 1, 2, \ldots, N_k).$$

Если система интегральных уравнений (17) будет решена, то распределение температуры в теле определяется на основании формул (4), (8) и (13).

П р и м е р. Рассмотрим случай, когда область Δ состоит из совокупности двух кругов радиуса a, координаты центров которых $(0, 0)$ и $(h, 0)$. При этом считается также, что на поверхности полупространства $z = 0$ заданы следующие граничные условия:

$$\begin{aligned}
T &= T_0 \qquad &&\text{при } (x, y) \in \Delta; \\
\frac{\partial T}{\partial z} &= 0 \qquad &&\text{при } (x, y) \in S.
\end{aligned} \tag{18}$$

Для рассматриваемого случая система интегральных уравнений (15) принимает вид:

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x, y) &= \frac{2}{\pi} T_0 \arcsin\frac{a}{r_1} - \frac{1}{\pi^2}\iint\limits_{\Delta_0} \frac{\sqrt{r_1^2 - a^2}\,\varphi_2(\xi, \eta)\,d\xi d\eta}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]\sqrt{a^2 - \xi^2 - \eta^2}}, \\
\varphi_2(x, y) &= \frac{2}{\pi} T_0 \arcsin\frac{a}{r^2} - \frac{1}{\pi^2}\iint\limits_{\Delta_0} \frac{\sqrt{r_2^2 - a^2}\,\varphi_1(\xi + h, \eta)\,d\xi d\eta}{[(x-\xi-h)^2 + (y-\eta)^2]\sqrt{a^2 - \xi^2 - \eta^2}},
\end{aligned} \tag{19}$$

где $r_1^2 = x^2 + y^2$; $r_2^2 = (x - h)^2 + y^2$.

На основании решения интегральных уравнений (19), а также формулы (16) для определения распределения температуры в области S получим (с точностью до малых величин порядка ε^4) такую формулу:

$$
\begin{aligned}
T = \frac{2}{\pi} T_0 \sum_{k=1}^{2} \Bigg[\arcsin \frac{a}{r_k} \Bigg(1 - \frac{\varepsilon}{\pi} - \frac{x_k \varepsilon}{2\pi h} + \frac{r_k^2 \varepsilon}{8\pi h^2} - \frac{3\varepsilon x_k^2}{8\pi h^2} + \\
+ \frac{5\varepsilon^3 x_k}{16\pi h} - \frac{9 r_k^2 x_k \varepsilon}{16\pi h^3} + \frac{11 x_k r_k^2}{16\pi h^3} - \\
- \frac{3\varepsilon^3 x_k}{8\pi h} + \frac{\varepsilon x_k y_k^2}{16\pi h^3} + \frac{\varepsilon^2}{\pi^2} + \frac{\varepsilon^2 x_k}{2\pi^2 h} - \frac{\varepsilon^2 r_k^2}{8\pi^2 h^2} + \frac{3x_k^2}{8\pi^2 h^2} + \frac{\varepsilon^3}{48\pi} - \frac{\varepsilon^3}{26\pi} - \frac{\varepsilon^3}{\pi^3} + \\
+ \frac{11 x_k \varepsilon^3}{96\pi^2 h} - \frac{\varepsilon^2 x_k}{2\pi^3 h} - \frac{\varepsilon^4}{48\pi^3} + \frac{\varepsilon^4}{\pi^4} \Bigg) - \frac{\sqrt{r_k^2 - a^2}}{\pi} \varepsilon \Bigg(\frac{x_k^2}{2h r_k^2} - \frac{\varepsilon}{8h^2} + \frac{3\varepsilon x_k^2}{8h r_k^2} - \\
- \frac{\varepsilon^2 a}{8 r_k^2} + \frac{\varepsilon^2 a x_k^2}{4 r_k^4} + \frac{9\varepsilon x_k}{16 h^2} - \frac{11\varepsilon x_k}{16 h^2} - \frac{\varepsilon^3 x_k}{8 r_k^2} + \frac{\varepsilon^3 a^2 x_k}{24 r_k^4} + \frac{\varepsilon^3 y_k^2 x_k}{24 r_k^4} - \frac{\varepsilon^3 a^2 y_k^2 x_k}{6 r_k} + \\
+ \frac{x_k \varepsilon^3}{16 r_k^2} + \frac{x_k^2 \varepsilon}{2\pi h r_k^2} - \frac{\varepsilon^2}{8\pi h} + \frac{3\varepsilon^2 x_k^2}{8\pi h r_k^2} - \frac{\varepsilon^3 a}{8\pi r_k^2} + \frac{\varepsilon^3 a x_k^2}{4\pi r_k^2} + \frac{11\varepsilon^2 a x_k}{96\pi r_k^2} - \\
- \frac{\varepsilon^2 x_k^2}{2\pi^2 h r_k^2} \Bigg) \Bigg] + o(\varepsilon^5). \qquad (20)
\end{aligned}
$$

При $\varepsilon = 0$, $a \neq 0$ (случай одной круговой области) формула (20) совпадает с ранее известным результатом (см., например, [3]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Л е о н о в М. Я.— УМЖ, 1953, 1.
2. Л е о н о в М. Я.— Научные записки ИМА АН УССР, 1. Изд-во АН УССР, К., 1953.
3. Н о в а ц к и й В. И. Вопросы термоупругости. Изд-во АН СССР, М., 1962.

Физико-механический
институт АН УССР

Поступила в редколлегию
в ноябре 1973 г.

О ПРИМЕНИМОСТИ МЕТОДА ЗЕРКАЛЬНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ ПРИ РАСЧЕТЕ ЭЛЕКТРОСТАЦИОНАРНЫХ ПОЛЕЙ В БИСЕКТОРАЛЬНЫХ СРЕДАХ КОНЕЧНОЙ ПРОВОДИМОСТИ

С. И. Восанчук

Сущность метода зеркальных изображений заключается в том, что граничные условия удовлетворяются при помощи фиктивных источников равной или уменьшенной эмиссии, расположенных в случае плоских параллельных границ раздела сред различной электропроводности в зеркально изображенных точках. В соответствии с оптической аналогией падающий на поверхность раздела «электрический» луч отражается под тем же углом падения, а интенсивность его уменьшается в k_{12} раз. Коэффициент k_{12} получил название коэффициента отражения [6, 14]. Для контактирующих по плоской границе сред с удельными сопротивлениями ρ_1 и ρ_2 величина его определяется отношением

$$k_{12} = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}. \qquad (1)$$

При наличии параллельных границ раздела получаются многократные отражения. Их потенциал подсчитывается с помощью степенных рядов. Простота метода зеркальных изображений позволила в доступной форме излагать теорию метода сопротивлений в учебниках [7, 8, 10].

Для частного случая двух сред, одна из которых является проводником, а вторая—диэлектриком, метод зеркальных изображений применен к двум