ОБ ОДНОЙ ОБОБЩЕННОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

А. С. Гупало, А. Ф. Обшта, Н. И. Быстрицкая

В работе [2] Я. Б. Лопатинский доказал при некоторых условиях существование гармонической в трехмерной области функции u, удовлетворяющей граничному условию вида

$$\alpha \cdot \operatorname{grad} u + au = f. \tag{1}$$

Цель настоящего сообщения — доказательство при некоторых условиях существования гармонической в трехмерной области функции u, удовлетворяющей граничному условию вида (1), когда f является обобщенной функцией и условие (1) понимается в определенном смысле.

1. Пусть Ω — выпуклая область в трехмерном евклидовом пространстве с бесконечно гладкой границей S. Единичный вектор внутренней нормали к S в точке y будем обозначать $\nu(y)$, длину вектора α — через $|\alpha|$, скалярное произведение векторов α и β — через $\alpha \cdot \beta$. Можно указать такое положительное число σ, что при $0 \leqslant \varepsilon < \sigma$ соответствие $y \to y + \varepsilon\nu(y)$ является взаимно однозначным, причем точка $x_\varepsilon = y + \varepsilon\nu(y)$, $y \in S$ описывает параллельную поверхность S_ε, обладающую теми же свойствами, что и S. Пусть $\alpha(y)$ — бесконечно дифференцируемая векторная функция, определенная на S, $a(y)$ — бесконечно дифференцируемая на S функция; будем предполагать, что $a < 0$ и $\alpha \cdot \nu > 0$ (не нарушая общности рассмотрения будем считать $\alpha \cdot \nu = 1$). Через $D(S)$ обозначим пространство бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(y)$, определенных на S, через $D'(S)$ — пространство линейных непрерывных функционалов (обобщенных функций) над $D(S)$. Результат действия обобщенной функции F на основную функцию φ будем обозначать $F[\varphi]$. Функции, определенные на S, можно определить на поверхности S_ε, снося их значения с S на S_ε по общей нормали к этим поверхностям в каждой точке, т. е. считать, что $\varphi(x_\varepsilon) = \varphi(y)$, $\alpha(x_\varepsilon) = \alpha(y)$, $a(x_\varepsilon) = a(y)$, когда $x_\varepsilon = y + \varepsilon\nu(y)$, $x_\varepsilon \in S_\varepsilon$, $y \in S$.

2. Постановка задачи. Пусть $F \in D'(S)$. Найти функцию u, гармоническую в области Ω, которая на границе S удовлетворяет условию

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \iint_{S_\varepsilon} [\alpha \cdot \operatorname{grad} u + au]\, \varphi dS_\varepsilon = F[\varphi] \text{ для каждой } \varphi \in D(S). \tag{2}$$

Имеет место следующая лемма.

Лемма. *Оператор*

$$(B\varphi)(y) = \iint_S K(x, y)\, \varphi(x)\, d_x S, \quad y \in S$$

действует из $D(S)$ *в* $D(S)$, *где*

$$K(x, y) = [\alpha(x) - \alpha(y)] \operatorname{grad}_x q(x, y) + a(x)\, q(x, y) + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{|x-y|};$$

$$q(x, y) = -\frac{1}{\pi |\alpha(y)|} \cdot \frac{\left(|x-y| \frac{\alpha(y)}{|\alpha(y)|} + x - y\right) \nu(y)}{\left| |x-y| \frac{\alpha(y)}{|\alpha(y)|} + x - y \right|^2}.$$

Доказательство леммы проводится по такой же схеме как доказательство леммы 1 в работе [1]. В силу громоздкости выкладок его не проводим.

Теорема 1. Пусть $F \in D'(S)$ и $G[g] = F[\varphi_g]$, *где* φ_g — *решение регулярного интегрального уравнения*

$$\iint_S K(x, y)\, \varphi(x)\, d_x S + \varphi(y) = g(y), \quad y \in S,$$

тогда функция

$$u(x) = G[q(x, y)], \quad x \in \Omega, \quad y \in S,$$

гармоническая в области Ω и удовлетворяет граничному условию (2).

Выполнение утверждений теоремы показывается непосредственной проверкой, используя лемму и предположения теоремы.

Теорема 2. *Разность двух гармонических функций в области Ω, удовлетворяющих одному и тому же граничному условию* (2), *равна нулю.*

Доказательство этой теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 2 в работе [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Гупало Г. С.— Вісник Львів. ун-ту, сер. мех.-мат., 1969, 4.
2. Лопатинський Я. Б.— Наукові записки Львів. ун-ту, сер. фіз.-мат., 1953, 22, 5.

Львовский государственный университет,
Львовский филиал математической
физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию в декабре 1973 г.

К ВОПРОСУ О РАЗЛОЖИМОСТИ МАТРИЧНОГО МНОГОЧЛЕНА С КОММУТИРУЮЩИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ НА МНОЖИТЕЛИ

В. М. Петричкович

Рассмотрим матричный многочлен

$$A(x) = Ex^m + A_i x^{m-1} + \cdots + A_m, \tag{1}$$

где A_i — матрицы n-го порядка над алгебраически замкнутым полем характеристики 0 и $A_iA_j = A_jA_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Согласно [1, 3] многочлен (1) преобразованием подобия можно привести к квазидиагональной форме

$$PA(x)P^{-1} = B_i(x) \dotplus B_2(x) \dotplus \cdots \dotplus B_p(x) \tag{2}$$

с диагональными блоками

$$B_i(x) = \begin{bmatrix} x^m + \rho_i x^{m-1} + \cdots + \delta_i & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & x^m + \rho_i x^{m-1} + \cdots + \delta_i \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} (x-\alpha_1)^{s_1} \ldots (x-\alpha_l)^{s_l} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & (x-\alpha_1)^{s_1} \ldots (x-\alpha_l)^{s_l} \end{bmatrix} \tag{3}$$

порядков k_i, причем $\det B_i(x) \neq \det B_j(x)$.

Определение. Многочлен $(x^m + \rho_i x^{m-1} + \cdots + \delta_i)^{k_i} = [(x-\alpha_1)^{s_1} \ldots (x-\alpha_l)^{s_l}]^{k_i}$ назовем определяющим многочленом матрицы $A(x)$, а натуральное число k_i — порядком определяющего многочлена.

Лемма 1. Корни $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ многочлена $\det A(x)$ являются корнями одного определяющего многочлена $[(x-\alpha_1)^{s_1} \ldots (x-\alpha_l)^{s_l}]^{k_i}$ матрицы $A(x)$ соответственно кратностей $s_1, \ldots, s_l$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{rang} M_{A(x)}[\alpha_1^{(s_1)}, \ldots, \alpha_l^{(s_l)}] < n$ (матрица $M_{A(x)}[\alpha_1^{(s_1)}, \ldots, \alpha_l^{(s_l)}]$ вида [2]).

Порядок k_i определяющего многочлена $[(x-\alpha_1)^{s_1} \ldots (x-\alpha_l)^{s_l}]^{k_i}$ матрицы (1) вычисляется по формуле

$$k_i = R_{\alpha_1} + R_{\alpha_1'} + \cdots + R_{\alpha_1^{(s_1-1)}} + \cdots + R_{\alpha_l} + R_{\alpha_l'} + \cdots + R_{\alpha_l^{(s_l-1)}}) -$$