Если $J_2 - \frac{1}{2} J_1' = 0$, то уравнение (8) приводится к уравнению $z''' = 0$ с помощью замены

$$y = \frac{z(t)\, e^{\frac{1}{3}\int p_1 dx}}{g'}, \qquad t = g(x),$$

где $g(x)$ находится из уравнения

$$J_1 = 2\left(\frac{g''}{g'}\right)' - \left(\frac{g''}{g'}\right)^2.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Т. 1. ИЛ, М., 1953.
2. Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Т. 2. ИЛ, М. 1954.

Львовский политехнический институт

Поступила в редколлегию в ноябре 1973 г.

РЕШЕНИЕ ЦЕПНЫМИ ДРОБЯМИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ФУНКЦИОНАЛЬНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

М. С. Сявавко, Ю. Р. Батюк

1. Пусть H — некоторое гильбертово пространство, элементы которого будем обозначать x, y и т. д., R — действительная прямая. В пространстве H рассмотрим функционал $U(x)$. Производную Фреше и функциональную производную $U(x)$ будем обозначать U_x' и $\frac{\delta u}{\delta x(\tau)}$.

Рассмотрим уравнение

$$U_x' = f(x; U), \tag{1}$$

где $f(x; U)$ при фиксированных x и U принадлежит пространству H^* и является функционалом по x и функцией по U.

Уравнение (1) назовем вполне разрешимым, если начальное условие

$$U(x_0) = U_0 \tag{2}$$

однозначно определяет решение в некоторой окрестности точки x_0. Условие полной разрешимости задачи (1), (2) вытекает из теоремы Фробениуса (см. [1]).

Применим теорию цепных дробей к решению задачи (1), (2). Пусть $V_0(x)$ и $W_0(x)$ — первые нижнее и верхнее приближения решения уравнения (1). Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть при фиксированном x функция*

$$\int_0^1 d\xi \int_a^b f(x_0 + \xi(x - x_0);\ U, \tau)\,[x(\tau) - x_0(\tau)]\,d\tau \tag{3}$$

монотонно убывает по U и положительна. Тогда при заданных функционалах $V_0(x)$ и $W_0(x)$ рекуррентные формулы

$$\frac{P_n}{Q_n} = U_0 + \int_0^1 d\xi \int_a^b f\left(x_0 + \xi(x - x_0);\ \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}, \tau\right)[x(\tau) - x_0(\tau)]\,d\tau, \tag{4}$$

где $\frac{P_0}{Q_0} = V_0(x)$, однозначно определяют сходящуюся к решению задачи Коши (1), (2) цепную дробь, подходящие дроби $\frac{P_n}{Q_n}$ которой при дополнительном условии

$$U_0 + \int_0^1 d\xi \int_a^b f\left(x_0 + \xi(x - x_0);\ \frac{P_1}{Q_1}, \tau\right)[x(\tau) - x_0(\tau)]\,d\tau \geqslant \frac{P_0}{Q_0}$$

характеризуются свойствами

а) при любом $n = 0, 1, 2, \ldots$ $\frac{P_{2n}}{Q_{2n}} \leqslant U(x) \leqslant \frac{P_{2n-1}}{Q_{2n-1}}$;

б) при любом $n = 0, 1, 2, \ldots$ $\frac{P_{2n}}{Q_{2n}} > \frac{P_{2n-2}}{Q_{2n-2}}$ *и* $\frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}} < \frac{P_{2n-1}}{Q_{2n-1}}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{P_n}{Q_n} = \frac{P}{Q} = U(x)$, *где* $U(x)$ — *решение задачи Коши;*

г) при надлежащем выборе $V_0(x)$ *и* $W_0(x)$ *имеет место оценка точности решения:*

$$\left| \frac{P_n}{Q_n} - U(x) \right| < \frac{1}{Q_n^2}.$$

Доказательство теоремы следует из сводимости задачи (1), (2) к задаче Коши для обыкновенного дифференциального уравнения [2] и теории цепных дробей [3].

Справедлива аналогичная теорема и в случае, когда функция (3) положительна и монотонно возрастает.

2. Рассмотрим теперь задачу

$$\frac{\partial U(x;\, t)}{\partial t} = \left(\frac{\delta U(x;\, t)}{\delta x(\tau)},\, a(x;\, \tau) \right) + f(x;\, U,\, t), \tag{5}$$

$$U(x;\, 0) = U_0(x). \tag{6}$$

Здесь $f(x;\, U,\, t)$ — функционал по x и функция по U и t.

Решение этой задачи можно представить в виде

$$U(x;\, t) = U_0(y(x;\cdot,t)) + \int\limits_0^t f(y(x;\cdot,t-s);\, U(y(x;\cdot,t-s),\, s)\, ds, \tag{7}$$

где $y(x;\, \tau,\, t)$ решение задачи [2]

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y(x;\, \tau,\, t)}{\partial t} = a(y(x;\cdot,t);\, \tau), \\ y(x;\, \tau,\, 0) = x(\tau). \end{cases} \tag{8}$$

Пусть теперь $V_0(x;\, t)$ и $W_0(x;\, t)$ — первые нижнее и верхнее приближения уравнения (5). Из представления (7), используя теорию цепных дробей, можно доказать следующую теорему.

Теорема 2. *Если оператор* $f(x;\, U,\, t)$ *положителен и монотонно убывает по* U *для всех* x, *равных* $y(x;\, \tau,\, t-s)$, *где* $y(x;\, \tau,\, t)$ — *решение задачи* (8), *то рекуррентные формулы*

$$\frac{P_n(x;\, t)}{Q_n(x;\, t)} = U_0(y(x;\cdot,t)) + \int\limits_0^t f\left(y(x;\cdot,t-s);\ \frac{P_{n-1}(y(x;\cdot,t-s);\, s)}{Q_{n-1}(y(x;\cdot,t-s);\, s)},\, s \right) ds$$

однозначно определяют сходящуюся к решению задачи Коши (5), (6) *цепную дробь, подходящие дроби* $\frac{P_n}{Q_n}$ *которой при дополнительном условии*

$$U_0(y(x;\cdot,t)) + \int\limits_0^t f\left(y(x;\cdot,t-s);\ \frac{P_0(y(x;\cdot,t-s);\, s)}{Q_0(y(x;\cdot,t-s);\, s)},\, s \right) ds \geqslant \frac{P_0}{Q_0}$$

характеризуются свойствами а) — г) теоремы 1.

3. Разложение функционалов в цепные дроби тесно связано с разложением их в ряд Тейлора, а именно: имеет место следующий функциональный аналог тождества Эйлера:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (c_n,\, x^n) = \frac{c_0|}{|1} - \frac{(c_1,\, x)|}{|c_0 + (c_1,\, x)} - \frac{c_0(c_2,\, x^2)|}{|(c_1,\, x) + (c_2,\, x^2)} -$$

$$- \frac{(c_1,\, x)(c_3,\, x^3)|}{|(c_2,\, x^2) + (c_3,\, x^3)} - \ldots - \frac{(c_{n-2},\, x^{n-2})(c_n,\, x^n)|}{|(c_{n-1},\, x^{n-1}) + (c_n,\, x^n)} - \ldots, \tag{9}$$

где для кратности записано (c_i, x^i) вместо $(\ldots((c_i, x), x) \ldots x)$; c_i являются фиксированными элементами пространства $L_i(H; R)$ (непрерывных и линейных отображений $\underbrace{H \times \cdots \times H}_{i \text{ раз}}$ в R [1]).

В случае, если H — конечномерное евклидово пространство R^k, то формула (9) примет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k_1=1}^{k} \cdots \sum_{k_n=1}^{k} c_{k_1 \ldots k_n} x_{k_1} \ldots x_{k_n} = \frac{c_0 |}{| 1} - \frac{\sum\limits_{k_1=1}^{k} c_{k_1} x_{k_1} \Big|}{\Big| c_0 + \sum\limits_{k_1=1}^{k} c_{k_1} x_{k_1}} - \frac{c_0 \sum\limits_{k_2=1}^{k} \sum\limits_{k_2=1}^{k} c_{k_1 k_2} x_{k_1} x_{k_2} \Big|}{\Big| \sum\limits_{k_1=1}^{k} c_{k_1} x_{k_1} + \sum\limits_{k_1=1}^{k} \sum\limits_{k_2=1}^{k} c_{k_1 k_2} x_{k_1 k_2}} - \frac{\sum\limits_{k_1=1}^{k} c_{k_1} x_{k_1} \sum\limits_{k_1=1}^{k} \sum\limits_{k_2=1}^{k} \sum\limits_{k_3=1}^{k} c_{k_1 k_2 k_3} x_{k_1} x_{k_2} x_{k_3} \Big|}{\Big| \sum\limits_{k_1=1}^{k} \sum\limits_{k_2=1}^{k} c_{k_1 k_2} x_{k_1} x_{k_2} + \sum\limits_{k_1=1}^{k} \sum\limits_{k_2=1}^{k} \sum\limits_{k_3=1}^{k} c_{k_1 k_2 k_3} x_{k_1} x_{k_2} x_{k_3}} - \cdots.$$

Если же $H = H(T)$ — некоторое гильбертово пространство действительных функций определенных на подмножестве T действительного пространства R_n, то формулу (9) можно записать в условно-традиционной форме, а именно:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_T \overset{(n)}{\cdots} \int_T c_n(\tau_1, \ldots, \tau_n) \prod_{i=1}^{n} x(\tau_i)\, d\tau_i = \frac{c_0 |}{| 1} - \frac{\int\limits_T c_1(\tau_1)\, x(\tau_1)\, d\tau_1 \,|}{\Big| c_0 + \int\limits_T c_1(\tau_1)\, x(\tau_1)\, d\tau_1} - \frac{c_0 \cdot \int\limits_T \int\limits_T c_2(\tau_1, \tau_2)\, x(\tau_1)\, x(\tau_2)\, d\tau_1,\, d\tau_2 \,|}{\Big| \int\limits_T c_1(\tau_1)\, x(\tau_1)\, d\tau_1 + \int\limits_T \int\limits_T c_2(\tau_1, \tau_2)\, x(\tau_1)\, x(\tau_2)\, d\tau_1 d\tau_2} - \cdots.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Дьедоне Ж. Основы современного анализа. ИЛ, М., 1964.
2. Далецкий Ю. Л.— Реф. журн. Математика, 1968, 12, 93.
3. Бобик Е. И. и др. Элементы качественной теории дифференциальных уравнений с частными производными. «Наукова думка», К., 1972.

Львовский
политехнический институт

Поступила в редколлегию
в ноябре 1973 г.

ОСОБЕННОСТИ РЕАЛИЗАЦИИ АЛГОРИТМОВ НАИЛУЧШЕГО ЧЕБЫШЕВСКОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ НА МАЛЫХ ЦВМ

Б. Р. Монцибович

В инженерной практике часто возникает задача нахождения простых аналитических выражений для приближения экспериментальных данных.

В 60-х годах появились эффективные машинно-ориентированные алгоритмы и программы для мощных ЦВМ для нахождения чебышевских при-