где для кратности записано (c_i, x^i) вместо $(\ldots((c_i, x), x) \ldots x)$; c_i являются фиксированными элементами пространства $L_i(H;\ R)$ (непрерывных и линейных отображений $\underbrace{H\times\cdots\times H}_{i\ \text{раз}}$ в R [1]).

В случае, если H — конечномерное евклидово пространство R^k, то формула (9) примет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k_1=1}^{k}\cdots\sum_{k_n=1}^{k} c_{k_1\ldots k_n} x_{k_1}\ldots x_{k_n} = \frac{c_0|}{|1} - \frac{\sum\limits_{k_1=1}^{k} c_{k_1}x_{k_1}\Big|}{\Big|c_0+\sum\limits_{k_1=1}^{k} c_{k_1}x_{k_1}} - \frac{c_0\sum\limits_{k_2=1}^{k}\sum\limits_{k_2=1}^{k} c_{k_1k_2}x_{k_1}x_{k_2}\Big|}{\Big|\sum\limits_{k_1=1}^{k} c_{k_1}x_{k_1}+\sum\limits_{k_1=1}^{k}\sum\limits_{k_2=1}^{k} c_{k_1k_2}x_{k_1k_2}} -$$

$$- \frac{\sum\limits_{k_1=1}^{k} c_{k_1}x_{k_1}\sum\limits_{k_1=1}^{k}\sum\limits_{k_2=1}^{k}\sum\limits_{k_3=1}^{k} c_{k_1k_2k_3}x_{k_1}x_{k_2}x_{k_3}\Big|}{\Big|\sum\limits_{k_1=1}^{k}\sum\limits_{k_2=1}^{k} c_{k_1k_2}x_{k_1}x_{k_2}+\sum\limits_{k_1=1}^{k}\sum\limits_{k_2=1}^{k}\sum\limits_{k_3=1}^{k} c_{k_1k_2k_3}x_{k_1}x_{k_2}x_{k_3}} - \cdots.$$

Если же $H = H(T)$ — некоторое гильбертово пространство действительных функций определенных на подмножестве T действительного пространства R_n, то формулу (9) можно записать в условно-традиционной форме, а именно:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\overset{(n)}{\int_T\cdots\int_T} c_n(\tau_1,\ldots,\tau_n)\prod_{i=1}^{n} x(\tau_i)\,d\tau_i = \frac{c_0|}{|1} - \frac{\int\limits_T c_1(\tau_1)\,x(\tau_1)\,d\tau_1\Big|}{\Big|c_0+\int\limits_T c_1(\tau_1)\,x(\tau_1)\,d\tau_1} -$$

$$- \frac{c_0\cdot\int\limits_T\int\limits_T c_2(\tau_1,\tau_2)\,x(\tau_1)\,x(\tau_2)\,d\tau_1,\,d\tau_2\Big|}{\Big|\int\limits_T c_1(\tau_1)\,x(\tau_1)\,d\tau_1+\int\limits_T\int\limits_T c_2(\tau_1,\tau_2)\,x(\tau_1)\,x(\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2} - \cdots.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Дьедоне Ж. Основы современного анализа. ИЛ, М., 1964.
2. Далецкий Ю. Л.— Реф. журн. Математика, 1968, 12, 93.
3. Бобик Е. И. и др. Элементы качественной теории дифференциальных уравнений с частными производными. «Наукова думка», К., 1972.

Львовский
политехнический институт

Поступила в редколлегию
в ноябре 1973 г.

ОСОБЕННОСТИ РЕАЛИЗАЦИИ АЛГОРИТМОВ НАИЛУЧШЕГО ЧЕБЫШЕВСКОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ НА МАЛЫХ ЦВМ

Б. Р. Монцибович

В инженерной практике часто возникает задача нахождения простых аналитических выражений для приближения экспериментальных данных.

В 60-х годах появились эффективные машинно-ориентированные алгоритмы и программы для мощных ЦВМ для нахождения чебышевских приближений с помощью многочленов и рациональных функций [5, 7, 9]. Непосредственная реализация этих алгоритмов на малых ЦВМ (типа «МИР», «Наири», «Промінь» и т. д.) затруднительна, поскольку для этого требуется значительный объем памяти. Поэтому для практики инженерных расчетов представляет интерес разработка этих алгоритмов по нахождению наилучшего приближения выражениями, содержащими небольшое число m искомых параметров (например, $m \leqslant 4$), чтобы реализовать их на малых ЦВМ.

Опишем общую схему алгоритмов Е. Я. Ремеза нахождения наилучших приближений [2, 6]. Пусть задана ограниченная функция $y(x)$, определенная на ограниченном множестве X. Пусть, далее, существует на множестве X наилучшее чебышевское приближение вида

$$U_m(A, x) \equiv U_m(a_0, a_1, \ldots, a_m, x) \tag{1}$$

с весом $w(x) > 0$ к функции $y(x)$. Тогда метод последовательных чебышевских интерполяций Ремеза состоит в последовательном выполнении следующих пунктов.

1. Некоторым образом из множества X выбираются начальные значения для точек чебышевского альтернанса

$$Z^{(0)} = \{z_i^{(0)}\}_{i=0}^{m+1},\ (z_i^{(0)} < z_{i+1}^{(0)},\quad i = \overline{0, m}).$$

На каждом j-м шаге выполняются следующие пункты.

2. Осуществляется чебышевская интерполяция функции $y(x)$ выражением $U_m(A^{(j)}, x)$ на множестве точек $Z^{(j)}$, т. е. определяются коэффициенты $\{a_i\}_{i=0}^{m}$ и величина ρ_j, для которых выполняются условия

$$\frac{y(z_i^{(j)}) - U_m(A^{(j)}, z_i^{(j)})}{w(z_i^{(j)})} = (-1)^i \rho_j, \quad i = \overline{0, m+1}. \tag{2}$$

3. Проверяется выполнение равенства

$$|\rho_j| = \max_{x \in X} \left| \frac{y(x) - U_m(A^{(j)}, x)}{w(x)} \right|. \tag{3}$$

Если равенство выполняется, то $U_m(A^{(j)}, x)$ — наилучшее чебышевское приближение функции $y(x)$ выражением вида (1). Выполнение алгоритма на этом прекращается.

4. Если равенство (3) не выполняется, то некоторым образом выбирается следующее (уточненное) приближение для точек чебышевского альтернанса $Z^{(j+1)} = \{z_i^{(j+1)}\}_{i=0}^{m+1} \in X$ $(z_i^{(j+1)} < z_{i+1}^{(j+1)},\ i = \overline{0, m})$ вместо предыдущего приближения $Z^{(j)}$.

5. Полагают, $j = j + 1$. Выполнение алгоритма повторяется начиная с п. 2.

Простейшим алгоритмом для замены точек альтернанса (п. 4) является один из вариантов первого алгоритма Ремеза — алгоритм с одноточечной заменой (или алгоритм Валле — Пуссена) [2, 6]. Реализация его на малых ЦВМ не представляет труда, если точек альтернанса имеется конкретное число $k = 3;\ 4;\ 5;\ 6$.

Основной момент, где следует учитывать специфику малых ЦВМ при решении задачи чебышевского приближения,— осуществление чебышевской интерполяции. Как известно, в общем случае для этого приходится решать систему (2) $m + 2$ нелинейных уравнений. Решают ее различными итерационными способами.

Для реализации на малых ЦВМ весьма эффективными оказываются алгоритмы, основанные на аналитическом решении (точном решении) задачи чебышевской интерполяции. В некоторых конкретных случаях удается получить аналитические выражения для определения неизвестных коэффициентов $\{a_i\}_i^m = 0$ и величины максимальной погрешности приближения $U_m(A, x)$ через точки альтернанса и значения функции $y(x)$ в этих точках. В работе [3] приведены аналитические выражения для искомых параметров наилучших чебышевских приближений вида

$$P_m(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m, \ m \leqslant 4, \ w(x) = 1, \ w(x) = y(x), \quad (4)$$

$$R_{k,l}(x) = \frac{a_0 + a_1x + \cdots + a_kx^k}{1 + b_1x + \cdots + b_lx^l}, \ k + l \leqslant 3, w(x) = 1, \ w(x) = y(x), \quad (5)$$

$$\varphi_m(x) = a_0 \exp(a_1x + \cdots + a_mx^m), \ m \leqslant 4, \ w(x) = y(x), \quad (6)$$

$$\psi_m(x) = \ln\left[a_m\left(x^m + \sum_{i=0}^{m-1} a_ix^i\right)\right], \ m \leqslant 3, \ w(x) = 1, \quad (7)$$

$$Q_m(x) = g(x)\left[a_m\left(x^m + \sum_{i=0}^{m-1} a_ix^i\right)\right]^{\frac{p}{q}}, \ m \leqslant 3, \ w(x) = y(x), \quad (8)$$

$$W_{k,l}(x) = b_0x^{\sum_{i=1}^{k} a_ix^{i-1}} e^{\sum_{i=1}^{l} b_ix^i}, \ x > 0, \ k + l \leqslant 3, \ w(x) = y(x). \quad (9)$$

Справа указаны значения m, k и l, а также конкретный вид весовой функции $w(x)$, при которой они получены. Исходя из полученных формул для решения задачи чебышевской интерполяции, построены алгоритмы для нахождения наилучших чебышевских приближений вида (4)—(9). Для реализации этих алгоритмов составлены соответствующие программы для ЦВМ «МИР-1» [4].

Таким образом, особенность реализации алгоритмов для нахождения наилучших чебышевских приближений функций на малых ЦВМ состоит в учете и использовании следующих факторов.

1. Количество неизвестных параметров приближений, употребляемых в инженерной практике, обычно невелико.

2. Для многих конкретных случаев приближений задачу чебышевской интерполяции удается решить аналитически, получая при этом значительный выигрыш в длине программы и времени ее исполнения.

3. Простейшим алгоритмом для нахождения точек альтернанса, применимым на малых ЦВМ, является один из вариантов первого алгоритма Е. Я. Ремеза — алгоритм с одноточечной заменой.

Заметим дополнительно, что при составлении программ для малых ЦВМ по нахождению наилучших приближений таблично заданных функций следует стремиться достигнуть минимальной длины программы (возможно, даже за счет увеличения времени работы ее). Это позволяет вводить в память ЦВМ бо́льшее количество значений приближаемой функции.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гаврилюк В. Т., Ремез Е. Я. О принципе равномерного приближения в применении к обработке результатов измерений, условных в особенности. Препринт ИМ-69-1. Изд. Ин-та математики АН УССР, К., 1969.
2. Демьянов В. Ф., Малоземов В. Н. Введение в минимакс. «Наука», М., 1972.
3. Монцибович Б. Р., Попов Б. А. Наилучшие приближения табличных функций. Ч. 1. Алгоритмы для малых ЦВМ. Изд. РФАП АН УССР, К., 1973.
4. Монцибович Б. Р., Попов Б. А. Наилучшие приближения табличных функций. Ч. 2. Программы для ЦВМ «МИР-1». Изд. РФАП АН УССР, К., 1973.
5. Олександренко В. Л., Порханова А. О.— Автоматика, 1967, 4.
6. Ремез Е. Я. Основы численных методов чебышевского приближения. «Наукова думка», К., 1969.
7. Шостаковский Б. И. Алгоритм наилучшего равномерного приближения функций одной переменной (на языке АЛГОЛ-60). Изд. ВЦ МГУ, 1972.
8. Rice J. R. The Approximation of Functions, 1. Reading, Massach., 1964.
9. Werner H., Stoer J., Bommas W.— Numer. Math., 1967, 10, 4.

Львовский филиал
математической физики Института
математики АН УССР

Поступила в редколлегию
в ноябре 1973 г.