

няя превышает ее весьма незначительно (соответствующие линии на графиках сливаются). Сплошными линиями изображена зависимость основной частоты от скорости при $\xi = 0$, штриховыми — при $\xi = 1$.

На рис. 2 три нижние пары кривых отвечают случаю цилиндрического изгиба ($k = 0$) при $\psi_1 = 0$ и $\psi_2 = \infty$; 1; 0, три верхние — квадратной пластинке ($n = 1, a/b = 1$) при тех же значениях параметров ψ_1 и ψ_2 .

Как показали вычисления, с увеличением жесткости защемления краев (уменьшение хотя бы одного из параметров ψ) основная частота и критическое значение скорости потока возрастают монотонно также при других значениях параметра a/b .

На рис. 3 приведены графики функции $\lambda(v)$ для случая жесткого защемления ($\psi_1 = \psi_2 = 0$) при следующих значениях отношения (a/b) сторон пластинки: 0; 1; 2 (нижняя кривая совпадает с соответствующим графиком работы [3], полученным другим путем). Как видно, с уменьшением параметра a/b соответствующие кривые опускаются, приближаясь к ветви, отвечающей случаю цилиндрического изгиба; при этом, начиная от значений $a/b \approx 0,5$, можно полагать $k = 0$ (разница меньше 5%).

Отметим, что влияние параметра ξ на основную частоту колебаний рассматриваемой пластинки может оказаться весьма значительным (при значениях $a/b > 1$). Так, например, при $a/b = 2$ и $v \approx 13$ значение параметра λ с изменением ξ увеличивается более чем в три раза.

В случаях $\psi_1 = 0, \psi_2 = \infty$ и $\psi_1 = \psi_2 = \infty$ ветви основной частоты имеют такой же характер, как на рис. 2, 3.

ЛИТЕРАТУРА

1. Балинский А. И., Зорий Л. М.— ФХММ, 1971, 3, 99.
2. Зорий Л. М.— ДАН УРСР, 1968, 11, 992.
3. Махортых Ж. К.— Инженерный журнал, МТТ, 1966, 5.

Львовский филиал
математической физики Института
математики АН УССР

Поступила в редколлегию
в декабре 1973 г.

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНКИ С ЛЕГКИМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ

Г. С. Крук

На трехслойную пластинку с легким наполнителем (рис. 1), жестко закрепленную на концах, действует силой P абсолютно жесткий симметрический штамп, основание которого описывается уравнением $z = f(x, y)$. Пусть S_0 и S — области пластинки, находящиеся в соприкосновении со штампом и вне его, Γ — линия контакта. В предположении отсутствия касательных усилий в области контакта задача сводится к определению контактного давления q и размера области контакта $[-a, a]$.

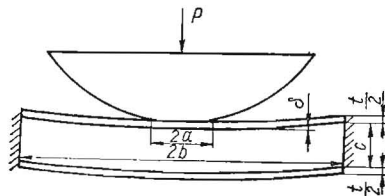


Рис. 1.

Исходим из уравнений линейной теории трехслойных пластин, учитывающей деформации поперечного сдвига [1]:

$$\alpha + w' = \frac{Bc}{2G_3} \alpha'',$$

$$Dw^{IV} - \frac{B(c+t)^2}{2} \alpha''' = q. \quad (1)$$

Контактное давление, зависимость размеров области контакта от приложенной силы и постоянные интегрирования дифференциальных уравнений (1) находим из условий непрерывности прогибов, углов поворота нормали,

усилий-моментов на линии контакта Γ и условий на внешнем контуре пластинки (границе предполагаемой области контакта):

$$\begin{aligned} w_i = w_e, \quad w'_i = w'_e, \quad \alpha_i = \alpha_e, \quad M_i = M_e, \quad Q_i = Q_e \quad \text{при } x = a; \\ w_e = 0, \quad w'_e = 0, \quad \alpha_e = 0, \quad Q_e = -\frac{P}{2} \quad \text{при } x = b. \end{aligned} \quad (2)$$

В случае цилиндрического изгиба пластинки напряженно-деформированное состояние пластинки зависит от координаты x и угла поворота α . В области S_0 прогиб

$$w = -[\delta - f(x)], \quad (3)$$

где δ — осадка штампа; $f(x)$ — функция, описывающая основание штампа. Тогда система исходных уравнений (1) приводится к системе разрешающих уравнений в области S_0

$$w_i = -[\delta - f(x)], \quad \alpha''_i - \kappa^2 \alpha_i = \kappa^2 f'(x), \quad \alpha^V_i - \eta^2 \alpha'''_i = \frac{\kappa^2}{D} q; \quad (4)$$

в области S

$$\alpha''_e - \kappa^2 \alpha_e = \kappa^2 w', \quad \alpha^V_e - \eta^2 \alpha'''_e = 0, \quad q = 0. \quad (5)$$

Здесь $\kappa^2 = \frac{2G_3}{Bc}$; $\eta^2 = \kappa^2 \left(1 + \frac{C}{D}\right)$; $B = \frac{Et}{1 + \mu^2}$; $C = \frac{Et(c + t)^2}{2(1 - \mu^2)}$; $D = \frac{Et^3}{12(1 - \mu^2)}$; c — толщина слоя заполнителя; $\frac{t}{2}$ — толщина несущего слоя.

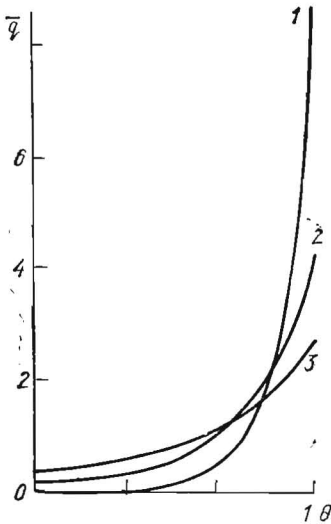


Рис. 2.

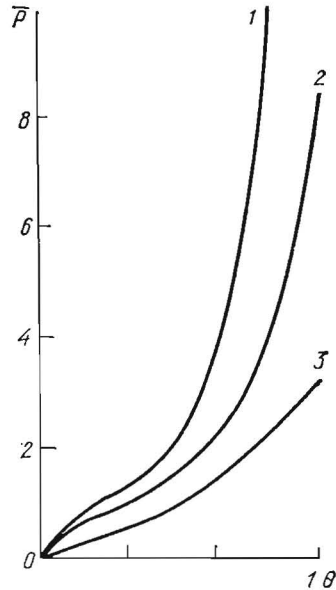


Рис. 3.

Системы (4), (5) с учетом условий (2) дают решение поставленной задачи. Общее решение второго уравнения системы (4) имеет вид

$$\alpha_i = d_1 \operatorname{sh} \kappa x + \alpha_i^*, \quad (6)$$

где α_i^* — частное решение неоднородного уравнения. Прогиб и угол поворота нормали пластинки в области S запишутся так:

$$\alpha_e = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 \operatorname{sh} \eta x + C_5 \operatorname{ch} \eta x, \quad (7)$$

$$w_e = \int \left(\frac{1}{\kappa^2} \alpha_e - \alpha_e \right) dx + C_6. \quad (8)$$

Удовлетворяя условиям (2), для определения неизвестных констант и зависимостей между δ , P и a получаем систему алгебраических уравнений, решение которой можно получить в явном виде.

В случае параболического цилиндрического штампа $f(x) = x^2$

контактное давление находим из третьего уравнения системы (4):

$$\bar{q} = \begin{cases} \frac{k \operatorname{ch} k\xi}{\operatorname{sh} k\theta} & \text{при } 0 \leq \xi \leq \theta, \\ & \text{при } \theta \leq \xi \leq 1. \end{cases} \quad (9)$$

Зависимость между P и a выражается формулой

$$\bar{P} = \frac{1}{\frac{2}{k^2} + (1-\theta) \left(1 - \theta + \frac{2}{k} \operatorname{cth} k\theta \right)}, \quad (10)$$

где $\bar{q} = \frac{2bq}{P}$; $\bar{P} = \frac{Pb}{8(C+D)}$; $\theta = \frac{a}{b}$; $\xi = \frac{x}{b}$; $k = \kappa b$.

На рис. 2 показаны графики распределения контактного давления при значениях параметра анизотропии $\frac{E}{G_3} = 10; 40; 100$ (кривые 1—3 соответственно).

На рис. 3 приведены кривые, характеризующие изменение размера области контакта в зависимости от величины действующей силы P при $\frac{E}{G_3} = 0; 40; 60$ (кривые 1—3 соответственно). Случай $\theta = 1$ наступает при конечной величине вдавливающей силы; последняя тем меньше, чем больше отношение $\frac{E}{G_3}$. Кривая $\frac{E}{G_3} = 0$ соответствует решению задачи для однородной пластинки, когда за расчетную схему взята теория Кирхгофа; при этом случай $\theta \rightarrow 1$ возможен при $P \rightarrow \infty$.

Отметим, что аналогичный результат получен ранее для податливых на сдвиг однородных пластин в случае плоской и осесимметрических задач в исследованиях [2, 3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Григолюк Э. И.—Изв. АН СССР. ОТН, 1957, 1.
2. Пелех Б. Л., Сысак Р. Д.—Механика полимеров, 1970, 3.
3. Пелех Б. Л., Сысак Р. Д.—Механика полимеров, 1972, 2.

Львовский филиал
математической физики Института
математики АН УССР

Поступила в редколлегию
в январе 1974 г.

ОБ ОДНОМ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Н. М. Власов, В. С. Колесов, И. И. Федик

1. Пусть пластина с круговым отверстием Γ_1 , ограниченная произвольным внешним контуром Γ_0 (рисунок), находится под действием гармонического поля температуры $T(x, y)$. Сформулируем плоскую задачу термоупругости в напряжениях [1, 2]. Требуется найти функцию F , являющуюся решением бигармонического уравнения

$$\Delta^2 F = \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0 \quad (1)$$

и удовлетворяющую следующим граничным условиям:

$$F = ax + by + c, \quad \frac{\partial F}{\partial n} = a \frac{\partial x}{\partial n} + b \frac{\partial y}{\partial n} \quad \text{на } \Gamma_0; \quad (2)$$

$$F = \frac{\partial F}{\partial n} = 0 \quad \text{на } \Gamma_1. \quad (3)$$

Постоянные a, b, c — произвольные в краевой задаче (1) — (3) и использу-