контактное давление находим из третьего уравнения системы (4):

$$\bar{q} = \begin{cases} \dfrac{k \operatorname{ch} k\xi}{\operatorname{sh} k\theta} & \text{при } 0 \leqslant \xi \leqslant \theta, \\ & \text{при } \theta \leqslant \xi \leqslant 1. \end{cases} \tag{9}$$

Зависимость между P и a выражается формулой

$$\bar{P} = \frac{1}{\dfrac{2}{k^2} + (1-\theta)\left(1 - \theta + \dfrac{2}{k} \operatorname{cth} k\theta\right)}, \tag{10}$$

где $\bar{q} = \dfrac{2bq}{P}$; $\bar{P} = \dfrac{Pb}{8(C+D)}$; $\theta = \dfrac{a}{b}$; $\xi = \dfrac{x}{b}$; $k = \varkappa b$.

На рис. 2 показаны графики распределения контактного давления при значениях параметра анизотропии $\dfrac{E}{G_3} = 10$; 40; 100 (кривые *1*—*3* соответственно).

На рис. 3 приведены кривые, характеризующие изменение размера области контакта в зависимости от величины действующей силы P при $\dfrac{E}{G_3} = 0$; 40; 60 (кривые *1*—*3* соответственно). Случай $\theta = 1$ наступает при конечной величине вдавливающей силы; последняя тем меньше, чем больше отношение $\dfrac{E}{G_3}$. Кривая $\dfrac{E}{G_3} = 0$ соответствует решению задачи для однородной пластинки, когда за расчетную схему взята теория Кирхгофа; при этом случай $\theta \to 1$ возможен при $P \to \infty$.

Отметим, что аналогичный результат получен ранее для податливых на сдвиг однородных пластин в случае плоской и осесимметрических задач в исследованиях [2, 3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Григолюк Э. И.— Изв. АН СССР. ОТН, 1957, 1.
2. Пелех Б. Л., Сысак Р. Д.— Механика полимеров, 1970, 3.
3. Пелех Б. Л., Сысак Р. Д.— Механика полимеров, 1972, 2.

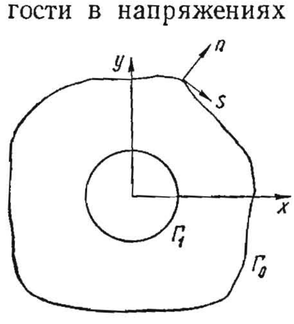
Львовский филиал
математической физики Института
математики АН УССР

Поступила в редколлегию
в январе 1974 г.

ОБ ОДНОМ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Н. М. Власов, В. С. Колесов, И. И. Федик

1. Пусть пластина с круговым отверстием Γ_1, ограниченная произвольным внешним контуром Γ_0 (рисунок), находится под действием гармонического поля температуры $T(x, y)$. Сформулируем плоскую задачу термоупругости в напряжениях [1, 2]. Требуется найти функцию F, являющуюся решением бигармонического уравнения



$$\Delta^2 F = \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0 \tag{1}$$

и удовлетворяющую следующим граничным условиям:

$$F = ax + by + c, \quad \frac{\partial F}{\partial n} = a\frac{\partial x}{\partial n} + b\frac{\partial y}{\partial n} \quad \text{на } \Gamma_0; \tag{2}$$

$$F = \frac{\partial F}{\partial n} = 0 \quad \text{на } \Gamma_1. \tag{3}$$

Постоянные a, b, c — произвольные в краевой задаче (1) — (3) и используются для удовлетворения условий однозначности перемещений и угла поворота на контуре Γ_0 (условий Митчелла):

$$\frac{1}{E}\int\limits_{\Gamma_0}\frac{\partial}{\partial n}\Delta F ds = -\alpha\int\limits_{\Gamma_0}\frac{\partial T}{\partial n}ds,$$

$$\frac{1}{E}\int\limits_{\Gamma_0}\left(x\frac{\partial}{\partial s} - y\frac{\partial}{\partial n}\right)\Delta F ds = -\alpha\int\limits_{\Gamma_0}\left(x\frac{\partial}{\partial s} - y\frac{\partial}{\partial n}\right)T ds, \tag{4}$$

$$\frac{1}{E}\int\limits_{\Gamma_0}\left(x\frac{\partial}{\partial n} + y\frac{\partial}{\partial n}\right)\Delta F ds = -\alpha\int\limits_{\Gamma_0}\left(x\frac{\partial}{\partial n} + y\frac{\partial}{\partial s}\right)T ds,$$

где E — модуль Юнга; α — коэффициент линейного расширения; n, s — единичные векторы нормали и касательной к внешнему контуру.

Как известно [3], имеет место математическая аналогия между задачей определения функции напряжения F и задачей определения функции прогиба w упругой пластины, внутренний контур которой жестко защемлен, а на внешнем контуре приложены усилия и моменты:

$$\Delta^2 w = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 0,$$

$$w = a_1 x + b_1 y + c_1, \quad \frac{\partial w}{\partial n} = a_1\frac{\partial x}{\partial n} + b_1\frac{\partial y}{\partial n} \quad \text{на} \quad \Gamma_0;$$

$$w = \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_1.$$

Моменты и нагрузки, приложенные к контуру Γ_0, находятся из условий:

$$-D\int\limits_{\Gamma_0}\frac{\partial}{\partial n}\Delta w ds = P,$$

$$-D\int\limits_{\Gamma_0}\left(x\frac{\partial}{\partial s} - y\frac{\partial}{\partial n}\right)\Delta w ds = M_x, \tag{5}$$

$$-D\int\limits_{\Gamma_0}\left(x\frac{\partial}{\partial s} + y\frac{\partial}{\partial n}\right)\Delta w ds = M_y,$$

где $D = \frac{Eh^3}{1-\nu^2}$ — жесткость пластины; h — толщина пластины; ν — коэффициент Пуассона.

Указанная аналогия дает возможность экспериментально определять термоупругие напряжения посредством замера деформаций на модели-пластине [4].

2. Предположим, что изменение температуры во времени приводит к появлению пластической зоны на внутреннем контуре. Распределение напряжений в пластической области вокруг отверстия описывается обычными компонентами напряжения

$$\sigma_{rr} = 2k\ln\frac{r}{R}, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = 2k\left(1 + \ln\frac{r}{R}\right), \tag{6}$$

где k — предел текучести, R — радиус круга Γ_1, которым соответствует функция напряжения

$$F = \frac{k}{2}\left(R^2 - r^2 + 2r^2\ln\frac{r}{R}\right). \tag{7}$$

Поскольку на упругопластической границе $\rho = \rho(x, y)$ все компоненты напряжения σ_{xx}, σ_{yy} и τ_{xy} должны быть непрерывными, то для определения функции F имеем следующую задачу: в пластической области, т. е. между контуром Γ_1 и кривой $\rho = \rho(x, y)$, функция F определяется формулой (7); в упругой области функция F есть решение задачи (1)—(3); на упругопластической границе ρ вторые производные функции F непрерывны. Следовательно, указанную выше аналогию между функциями напряжений F и прогиба w можно распространить на упругопластические задачи, если окажется возможным учесть специальный вид функции F в пластической области.

Следуя Л. А. Галину [5], рассмотрим, какой вид принимает поверхность, изображающая функцию напряжения при упругопластическом состоянии, и как она изменяется в процессе изменения температурного поля. Пока температурное поле таково, что имеет место упругое состояние, функция напряжения изображается средней поверхностью пластины, изогнутой силами и моментами (5). При появлении пластической области около отверстия пластина касается поверхности

$$z = \frac{k}{2}\left(R^2 - r^2 + 2r^2 \ln \frac{r}{R}\right) \tag{8}$$

с вырезом, контур которого совпадает с круговым контуром Γ_1. При дальнейшем увеличении зоны пластичности упругая пластина все большей и большей частью прилипает к указанной поверхности. Таким образом, введение поверхности (8) позволяет распространить математическую аналогию между функциями напряжения и прогиба для упругопластических задач.

3. Экспериментальная реализация полученной аналогии заключается в следующем. Из твердого материала изготовим две поверхности вращения, определяемые уравнениями

$$z = 0 \quad (0 \leqslant r \leqslant R), \quad z = \frac{k}{2}\left(R^2 - r^2 + 2r^2 \ln \frac{r}{R}\right) \quad (r \geqslant R). \tag{9}$$

Прижмем эти поверхности друг к другу, поместив между ними упругую пластину, моделирующую рассматриваемую упругопластическую задачу.

Начнем теперь изгибать упругую пластину моментами и сосредоточенными силами, приложенными к контуру Γ_0. Пока силы и моменты невелики, модель-пластина не будет касаться поверхности вращения, т. е. во всей пластине имеет место упругое состояние. Напряжения при этом определяются замерами деформаций на модели-пластине. При достаточно больших величинах изгибающих моментов и сосредоточенных сил, приложенных к контуру Γ_0, часть пластины будет касаться поверхности вращения (9). В этом случае под частями, касающимися поверхности вращения (9), образуется пластическое состояние, а под свободными — упругое. Кривые, ограничивающие области касания, будут упругопластическими границами. Напряжения в пластической области определяются формулами (6), а в упругой — замерами деформаций на модели-пластине.

В заключение следует отметить, что данный метод может быть распространен на некоторые задачи плоской деформации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боли Б., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений. «Мир», М., 1964.
2. Коваленко А. Д. Введение в термоупругость. «Наукова думка», К., 1963.
3. Росс А.— Техническая механика, 1963, 4.
4. Иванов С. Д., Прейсс А. К., Чернышев Г. Н.— В кн.: Экспериментальные методы исследования температурных напряжений. «Наука», М., 1970.
5. Галин Л. А.— Прикладная математика и механика, 1948, 13, 6.

Поступила в редколлегию
в сентябре 1973 г.