МАТРИЧНО-ОПЕРАТОРНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Я. С. Подстригач, В. А. Столяров

Однородное изотропное упругое тело, испытывающее малые деформации, отнесем к ортогональной системе криволинейных координат α, β, γ. За исходные уравнения примем три группы основных уравнений теории упругости, полученные для рассматриваемого случая в работе [1], которые представим в более удобной форме.

Первая группа состоит из трех уравнений равновесия [1]:

$$\frac{1}{H_1}\frac{\partial\sigma_\alpha}{\partial\alpha}+(k_{1\beta}+k_{1\gamma})\,\sigma_\alpha+\frac{1}{H_2}\frac{\partial\tau_{\alpha\beta}}{\partial\beta}+(2k_{2\alpha}+k_{2\gamma})\,\tau_{\alpha\beta}+$$

$$+\frac{1}{H_3}\frac{\partial\tau_{\alpha\gamma}}{\partial\gamma}+(2k_{3\alpha}+k_{3\beta})\,\tau_{\alpha\beta}-k_{1\beta}\sigma_\beta-k_{1\gamma}\sigma_\gamma+P_\alpha=0, \tag{1а}$$

$$\frac{1}{H_2}\frac{\partial\sigma_\beta}{\partial\beta}+(k_{2\gamma}+k_{2\alpha})\,\sigma_\beta+\frac{1}{H_3}\frac{\partial\tau_{\beta\gamma}}{\partial\gamma}+(2k_{3\beta}+k_{3\alpha})\,\tau_{\beta\gamma}+$$

$$+\frac{1}{H_1}\frac{\partial\tau_{\beta\alpha}}{\partial\alpha}+(2k_{1\beta}+k_{1\gamma})\,\tau_{\beta\gamma}-k_{2\gamma}\sigma_\gamma-k_{2\alpha}\sigma_\alpha+P_\beta=0, \tag{1б}$$

$$\frac{1}{H_3}\frac{\partial\sigma_\gamma}{\partial\gamma}+(k_{3\alpha}+k_{3\beta})\,\sigma_\gamma+\frac{1}{H_1}\frac{\partial\tau_{\gamma\alpha}}{\partial\alpha}+(2k_{1\gamma}+k_{1\beta})\,\tau_{\gamma\alpha}+$$

$$+\frac{1}{H_2}\frac{\partial\tau_{\gamma\beta}}{\partial\beta}+(2k_{2\gamma}+k_{2\alpha})\,\tau_{\gamma\beta}-k_{3\alpha}\sigma_\alpha-k_{3\beta}\sigma_\beta+P_\gamma=0. \tag{1в}$$

Обобщенный закон Гука составляет вторую группу исходных уравнений [1]:

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_\alpha&=\frac{2\nu G}{1-2\nu}\,\theta+2Ge_{\alpha\alpha}, & \tau_{\alpha\beta}&=Ge_{\alpha\beta},\\
\sigma_\beta&=\frac{2\nu G}{1-2\nu}\,\theta+2Ge_{\beta\beta}, & \tau_{\beta\gamma}&=Ge_{\beta\gamma},\\
\sigma_\gamma&=\frac{2\nu G}{1-2\nu}\,\theta+2Ge_{\gamma\gamma}, & \tau_{\gamma\alpha}&=Ge_{\gamma\alpha}.
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Третья группа — формулы, связывающие компоненты деформации с компонентами перемещения [1]:

$$\left.\begin{aligned}
e_{\alpha\alpha}&=\frac{1}{H_1}\frac{\partial u_\alpha}{\partial\alpha}+k_{2\alpha}u_\beta+k_{3\alpha}u_\gamma,\\
e_{\beta\beta}&=\frac{1}{H_2}\frac{\partial u_\beta}{\partial\beta}+k_{3\beta}u_\gamma+k_{1\beta}u_\alpha,\\
e_{\gamma\gamma}&=\frac{1}{H_3}\frac{\partial u_\gamma}{\partial\gamma}+k_{1\gamma}u_\alpha+k_{2\gamma}u_\beta,\\
e_{\alpha\beta}&=\frac{1}{H_2}\frac{\partial u_\alpha}{\partial\beta}-k_{2\alpha}u_\alpha+\frac{1}{H_1}\frac{\partial u_\beta}{\partial\alpha}-k_{1\beta}u_\beta,\\
e_{\beta\gamma}&=\frac{1}{H_3}\frac{\partial u_\beta}{\partial\gamma}-k_{3\beta}u_\beta+\frac{1}{H_2}\frac{\partial u_\gamma}{\partial\beta}-k_{2\gamma}u_\gamma,\\
e_{\gamma\alpha}&=\frac{1}{H_1}\frac{\partial u_\gamma}{\partial\alpha}-k_{1\gamma}u_\gamma+\frac{1}{H_3}\frac{\partial u_\alpha}{\partial\gamma}-k_{3\alpha}u_\alpha.
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Здесь σ_α, ..., $\tau_{\gamma\alpha}$ — компоненты напряжений; $e_{\alpha\alpha}$, ..., $e_{\gamma\alpha}$ — компоненты деформации; u_α, u_β, u_γ — компоненты перемещения; P_α, P_β, P_γ — компоненты объемной силы; ν — коэффициент Пуассона; G — модуль сдвига; θ — объемное расширение, определяемое формулой

$$\theta = \frac{1}{H_1}\frac{\partial u_\alpha}{\partial\alpha} + (k_{1\beta} + k_{1\gamma})\,u_\alpha + \frac{1}{H_2}\frac{\partial u_\beta}{\partial\beta} + \\ + (k_{2\gamma} + k_{2\alpha})\,u_\beta + \frac{1}{H_3}\frac{\partial u_\gamma}{\partial\gamma} + (k_{3\alpha} + k_{3\beta})\,u_\gamma; \tag{4}$$

H_1, H_2, H_3 — коэффициенты Ляме, удовлетворяющие во всякой ортогональной системе криволинейных координат шести дифференциальным уравнениям [1]:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial\beta}\right) + \frac{1}{H_3^2}\frac{\partial H_1}{\partial\gamma}\frac{\partial H_2}{\partial\gamma} = 0,\\
&\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_3}{\partial\beta}\right) + \frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\frac{1}{H_3}\frac{\partial H_2}{\partial\gamma}\right) + \frac{1}{H_1^2}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha}\frac{\partial H_3}{\partial\alpha} = 0,\\
&\frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\frac{1}{H_3}\frac{\partial H_1}{\partial\gamma}\right) + \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_3}{\partial\alpha}\right) + \frac{1}{H_2^2}\frac{\partial H_3}{\partial\beta}\frac{\partial H_1}{\partial\beta} = 0,\\
&\frac{\partial^2 H_1}{\partial\beta\partial\gamma} - \frac{1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\gamma}\frac{\partial H_1}{\partial\beta} - \frac{1}{H_3}\frac{\partial H_3}{\partial\beta}\frac{\partial H_1}{\partial\gamma} = 0,\\
&\frac{\partial^2 H_2}{\partial\gamma\partial\alpha} - \frac{1}{H_3}\frac{\partial H_3}{\partial\alpha}\frac{\partial H_2}{\partial\gamma} - \frac{1}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial\gamma}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha} = 0,\\
&\frac{\partial^2 H_3}{\partial\alpha\partial\beta} - \frac{1}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial\beta}\frac{\partial H_3}{\partial\alpha} - \frac{1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha}\frac{\partial H_3}{\partial\beta} = 0;
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

$k_{3\alpha}$, $k_{3\beta}$; $k_{1\beta}$, $k_{1\gamma}$; $k_{2\gamma}$, $k_{2\alpha}$ — кривизны координатных линий на поверхностях $\gamma = \text{const}$, $\alpha = \text{const}$, $\beta = \text{const}$ соответственно, определяемые следующими формулами [1]:

$$\left.\begin{aligned}
&k_{3\alpha} = \frac{1}{H_1H_3}\frac{\partial H_1}{\partial\gamma}, \quad k_{3\beta} = \frac{1}{H_2H_3}\frac{\partial H_2}{\partial\gamma},\\
&k_{1\beta} = \frac{1}{H_2H_1}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha}, \quad k_{1\gamma} = \frac{1}{H_3H_1}\frac{\partial H_3}{\partial\alpha},\\
&k_{2\gamma} = \frac{1}{H_3H_2}\frac{\partial H_3}{\partial\beta}, \quad k_{2\alpha} = \frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial\beta}.
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Эти кривизны, будучи функциями коэффициентов Ляме, должны удовлетворять определенным дифференциальным зависимостям, которые находятся подстановкой в систему (5) значений кривизн (6). К полученным таким путем шести зависимостям следует добавить еще три зависимости, которые получим при изменении порядка дифференцирования коэффициентов Ляме в последних трех уравнениях системы (5). Следовательно, имеем девять зависимостей вида

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{H_1}\frac{\partial k_{1\beta}}{\partial\alpha} + \frac{1}{H_2}\frac{\partial k_{2\alpha}}{\partial\beta} + k_{1\beta}^2 + k_{2\alpha}^2 + k_{3\alpha}k_{3\beta} = 0,\\
&\frac{1}{H_2}\frac{\partial k_{2\gamma}}{\partial\beta} + \frac{1}{H_3}\frac{\partial k_{3\beta}}{\partial\gamma} + k_{2\gamma}^2 + k_{3\beta}^2 + k_{1\beta}k_{1\gamma} = 0,\\
&\frac{1}{H_3}\frac{\partial k_{3\alpha}}{\partial\gamma} + \frac{1}{H_1}\frac{\partial k_{1\gamma}}{\partial\alpha} + k_{3\alpha}^2 + k_{1\gamma}^2 + k_{2\gamma}k_{2\alpha} = 0;
\end{aligned}\right\} \tag{7а}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{H_2}\frac{\partial k_{3\alpha}}{\partial\beta} + k_{2\alpha}k_{3\alpha} - k_{3\beta}k_{2\alpha} = 0,\\
&\frac{1}{H_3}\frac{\partial k_{1\beta}}{\partial\gamma} + k_{3\beta}k_{1\beta} - k_{1\gamma}k_{3\beta} = 0,\\
&\frac{1}{H_1}\frac{\partial k_{2\gamma}}{\partial\alpha} + k_{1\gamma}k_{2\gamma} - k_{2\alpha}k_{1\gamma} = 0;
\end{aligned}\right\} \tag{7б}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{H_3}\frac{\partial k_{2\alpha}}{\partial\gamma}+k_{3\alpha}k_{2\alpha}-k_{2\gamma}k_{3\alpha}=0,\\
&\frac{1}{H_1}\frac{\partial k_{3\beta}}{\partial\alpha}+k_{1\beta}k_{3\beta}-k_{3\alpha}k_{1\beta}=0,\\
&\frac{1}{H_2}\frac{\partial k_{1\gamma}}{\partial\beta}+k_{2\gamma}k_{1\gamma}-k_{1\beta}k_{2\gamma}=0.
\end{aligned}\right\} \qquad (7в)$$

Внутри каждой из этих групп зависимости связаны круговой перестановкой координат и индексов.

Применяя смешанный метод решения общей задачи теории упругости, за основные искомые функции принимаем три компоненты перемещения u_α, u_β, u_γ и три компоненты напряжений $\tau_{\alpha\gamma}$, $\tau_{\beta\gamma}$, σ_γ, действующих на поверхности $\gamma=\text{const}$. С этой целью исключаем из исходных 15 уравнений (1) — (3) компоненты деформации $e_{\alpha\alpha}$, ..., $e_{\gamma\alpha}$ и остальные три компоненты напряжений σ_α, σ_β, $\tau_{\alpha\beta}$. Оставшиеся после исключения упомянутых величин шесть дифференциальных уравнений представим в виде, явном относительно производных по координате γ от основных искомых функций.

Подставим в последнее уравнение системы (2) деформацию $e_{\alpha\gamma}$ из выражений (3):

$$\tau_{\alpha\gamma}=G\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial u_\gamma}{\partial\alpha}-k_{1\gamma}u_\gamma+\frac{1}{H_3}\frac{\partial u_\alpha}{\partial\gamma}-k_{3\alpha}u_\alpha\right)$$

и представим это уравнение в виде, явном относительно производной по координате γ от перемещения u_α:

$$\frac{1}{H_3}\frac{\partial u_\alpha}{\partial\gamma}=k_{3\alpha}u_\alpha-\frac{1}{H_1}\frac{\partial u_\gamma}{\partial\alpha}+k_{1\gamma}u_\gamma+\frac{\tau_{\alpha\gamma}}{G}. \qquad (8)$$

Аналогично получаем уравнение

$$\frac{1}{H_3}\frac{\partial u_\beta}{\partial\gamma}=k_{3\beta}u_\beta-\frac{1}{H_2}\frac{\partial u_\gamma}{\partial\beta}+k_{2\gamma}u_\gamma+\frac{\tau_{\beta\gamma}}{G}. \qquad (9)$$

Подставляя, далее, в формулу для σ_γ (2) расширение θ из формулы (4) и деформацию $e_{\gamma\gamma}$ из выражений (3), имеем

$$\begin{aligned}
\frac{1}{H_3}\frac{\partial u_\gamma}{\partial\gamma}=&-\frac{\nu}{1-\nu}\left[\frac{1}{H_1}\frac{\partial u_\alpha}{\partial\alpha}+k_{1\beta}u_\alpha+\frac{1}{H_2}\frac{\partial u_\beta}{\partial\beta}+k_{2\alpha}u_\beta+\right.\\
&\left.+(k_{3\alpha}+k_{3\beta})u_\gamma\right]-k_{1\gamma}u_\alpha-k_{2\gamma}u_\beta+\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\frac{\sigma_\gamma}{G}.
\end{aligned} \qquad (10)$$

Внося эту формулу в (4), получаем объемное расширение в виде, не содержащем производные по координате γ:

$$\begin{aligned}
\theta=\frac{1-2\nu}{1-\nu}&\left[\frac{1}{H_1}\frac{\partial u_\alpha}{\partial\alpha}+k_{1\beta}u_\alpha+\frac{1}{H_2}\frac{\partial u_\beta}{\partial\beta}+k_{2\alpha}u_\beta+\right.\\
&\left.+(k_{3\alpha}+k_{3\beta})u_\gamma+\frac{\sigma_\gamma}{2G}\right].
\end{aligned} \qquad (11)$$

Представляем компоненты напряжений σ_α, σ_β, $\tau_{\alpha\beta}$ через основные искомые функции:

$$\begin{aligned}
\sigma_\alpha=&\frac{2G}{1-\nu}\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial u_\alpha}{\partial\alpha}+k_{2\alpha}u_\beta+k_{3\alpha}u_\gamma\right)+\\
&+\frac{2\nu G}{1-\nu}\left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial u_\beta}{\partial\beta}+k_{1\beta}u_\alpha+k_{3\beta}u_\gamma+\frac{\sigma_\gamma}{2G}\right);
\end{aligned} \qquad (12)$$

$$\begin{aligned}
\sigma_\beta=&\frac{2G}{1-\nu}\left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial u_\beta}{\partial\beta}+k_{1\beta}u_\alpha+k_{3\beta}u_\gamma\right)+\\
&+\frac{2\nu G}{1-\nu}\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial u_\alpha}{\partial\alpha}+k_{2\alpha}u_\beta+k_{3\alpha}u_\gamma+\frac{\sigma_\gamma}{2G}\right);
\end{aligned} \qquad (13)$$

$$\tau_{\alpha\beta}=G\left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial u_\alpha}{\partial\beta}-k_{2\alpha}u_\alpha+\frac{1}{H_1}\frac{\partial u_\beta}{\partial\alpha}-k_{1\beta}u_\beta\right). \qquad (14)$$

Здесь также отсутствуют производные по координате γ.

С помощью формул (12) — (14) исключаем из уравнений равновесий (1) напряжения σ_α, σ_β, $\tau_{\alpha\beta}$. При этом производим необходимое дифференцирование и используем по ходу выкладок зависимости (7), связывающие кривизны. Результат исключения представляется уравнениями, первое из которых такое:

$$\frac{1}{H_3}\frac{\partial\tau_{\alpha\gamma}}{\partial\gamma} = -\frac{2G}{1-\nu}\left[\frac{1}{H_1}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial u_\alpha}{\partial\alpha}\right) + (k_{1\beta}+k_{1\gamma})\frac{1}{H_1}\frac{\partial u_\alpha}{\partial\alpha}\right] -$$
$$- G\left[\frac{1}{H_2}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial u_\alpha}{\partial\beta}\right) + (k_{2\alpha}+k_{2\gamma})\frac{1}{H_2}\frac{\partial u_\alpha}{\partial\beta}\right] -$$
$$- G\left[\frac{2}{1-\nu}\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial k_{1\beta}}{\partial\alpha} + \nu k_{1\beta}k_{1\gamma}\right) + \frac{1}{H_2}\frac{\partial k_{2\alpha}}{\partial\beta} + 2k_{3\alpha}k_{3\beta} - k_{2\alpha}k_{2\gamma}\right]u_\alpha -$$
$$- \frac{1+\nu}{1-\nu}\frac{G}{H_1H_2}\frac{\partial^2 u_\beta}{\partial\alpha\partial\beta} - \frac{G}{1-\nu}\left[2\nu k_{1\gamma} - (3-\nu)k_{1\beta}\right]\frac{1}{H_2}\frac{\partial u_\beta}{\partial\beta} -$$
$$- \frac{G}{H_1}\left(k_{2\gamma} + \frac{3-\nu}{1-\nu}k_{2\alpha}\right)\frac{\partial u_\beta}{\partial\alpha} + G\left[\frac{1}{H_2}\frac{\partial k_{1\beta}}{\partial\beta} + k_{2\gamma}k_{1\beta} -\right.$$
$$\left. - \frac{2}{1-\nu}\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial k_{2\alpha}}{\partial\alpha} + k_{1\gamma}k_{2\alpha}\right)\right]u_\beta - \frac{2G}{1-\nu}(k_{3\alpha}+\nu k_{3\beta})\frac{1}{H_1}\frac{\partial u_\gamma}{\partial\alpha} -$$
$$- \frac{2G}{1-\nu}\left[\frac{1}{H_1}\frac{\partial}{\partial\alpha}(k_{3\alpha}+k_{3\beta}) + k_{1\gamma}(k_{3\alpha}+\nu k_{3\beta})\right]u_\gamma -$$
$$- (2k_{3\alpha}+k_{3\beta})\tau_{\alpha\gamma} - \frac{\nu}{1-\nu}\frac{1}{H_1}\frac{\partial\sigma_\gamma}{\partial\alpha} - \frac{1-2\nu}{1-\nu}k_{1\gamma}\sigma_\gamma - P_\alpha. \qquad (15)$$

Второе уравнение можно получить перестановкой координат α, β и индексов 1, 2 и α, β в уравнении (15). В результате получаем

$$\frac{1}{H_3}\frac{\partial\tau_{\beta\gamma}}{\partial\gamma} = -\frac{2G}{1-\nu}\left[\frac{1}{H_2}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial u_\beta}{\partial\beta}\right) + (k_{2\alpha}+k_{2\gamma})\frac{1}{H_2}\frac{\partial u_\beta}{\partial\beta}\right] -$$
$$- G\left[\frac{1}{H_1}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial u_\beta}{\partial\alpha}\right) + (k_{1\beta}+k_{1\gamma})\frac{1}{H_1}\frac{\partial u_\beta}{\partial\alpha}\right] -$$
$$- G\left[\frac{2}{1-\nu}\left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial k_{2\alpha}}{\partial\beta} + \nu k_{2\alpha}k_{2\gamma}\right) + \frac{1}{H_1}\frac{\partial k_{1\beta}}{\partial\alpha} + 2k_{3\beta}k_{3\alpha} - k_{1\beta}k_{1\gamma}\right]u_\beta -$$
$$- \frac{1+\nu}{1-\nu}\frac{G}{H_1H_2}\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial\alpha\partial\beta} - \frac{G}{1-\nu}\left[2\nu k_{2\gamma} - (3-\nu)k_{2\alpha}\right]\frac{1}{H_1}\frac{\partial u_\alpha}{\partial\alpha} -$$
$$- \frac{G}{H_2}\left(k_{1\gamma} + \frac{3-\nu}{1-\nu}k_{1\beta}\right)\frac{\partial u_\alpha}{\partial\beta} + G\left[\frac{1}{H_1}\frac{\partial k_{2\alpha}}{\partial\alpha} + k_{1\gamma}k_{2\alpha} -\right.$$
$$\left. - \frac{2}{1-\nu}\left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial k_{1\beta}}{\partial\beta} + k_{2\gamma}k_{1\beta}\right)\right]u_\alpha - \frac{2G}{1-\nu}(k_{3\beta}+\nu k_{3\alpha})\frac{1}{H_2}\frac{\partial u_\gamma}{\partial\beta} -$$
$$- \frac{2G}{1-\nu}\left[\frac{1}{H_2}\frac{\partial}{\partial\beta}(k_{3\beta}+k_{3\alpha}) + k_{2\gamma}(k_{3\beta}+\nu k_{3\alpha})\right]u_\gamma -$$
$$- (2k_{3\beta}+k_{3\alpha})\tau_{\beta\gamma} - \frac{\nu}{1-\nu}\frac{1}{H_2}\frac{\partial\sigma_\gamma}{\partial\beta} - \frac{1-2\nu}{1-\nu}k_{2\gamma}\sigma_\gamma - P_\beta. \qquad (16)$$

И последнее уравнение

$$\frac{1}{H_3}\frac{\partial\sigma_\gamma}{\partial\gamma} = \frac{2G}{1-\nu}(k_{3\alpha}+\nu k_{3\beta})\frac{1}{H_1}\frac{\partial u_\alpha}{\partial\alpha} + \frac{2G}{1-\nu}k_{1\beta}(k_{3\beta}+\nu k_{3\alpha})u_\alpha +$$
$$+ \frac{2G}{1-\nu}(k_{3\beta}+\nu k_{3\alpha})\frac{1}{H_2}\frac{\partial u_\beta}{\partial\beta} + \frac{2G}{1-\nu}k_{2\alpha}(k_{3\alpha}+\nu k_{3\beta})u_\beta +$$
$$+ \frac{2G}{1-\nu}(k_{3\alpha}^2 + 2\nu k_{3\alpha}k_{3\beta} + k_{3\beta}^2)u_\gamma - \frac{1}{H_1}\frac{\partial\tau_{\alpha\gamma}}{\partial\alpha} - (2k_{1\gamma}+k_{1\beta})\tau_{\alpha\gamma} -$$
$$- \frac{1}{H_2}\frac{\partial\tau_{\beta\gamma}}{\partial\beta} - (2k_{2\gamma}+k_{2\alpha})\tau_{\beta\gamma} - \frac{1-2\nu}{1-\nu}(k_{3\alpha}+k_{3\beta})\sigma_\gamma - P_\gamma. \qquad (17)$$

Шесть уравнений (8) — (10), (15) — (17) относительно шести искомых функций u_α, u_β, u_γ, $\tau_{\alpha\gamma}$, $\tau_{\beta\gamma}$, σ_γ вместе с соответствующими граничными условиями полностью определяют деформированное и напряженное состояние твердого однородного упругого тела, испытывающего малые деформации и отнесенного к ортогональной системе криволинейных координат.

При отсутствии объемных сил систему из шести уравнений относительно искомых функций представим в следующей матрично-операторной форме [5]:

$$f' = H_3 \overset{(1)}{M} f, \tag{18}$$

где f — матрица-столбец с компонентами u_α, u_β, u_γ, $\tau_{\alpha\gamma}$, $\tau_{\beta\gamma}$, σ_γ; f' — производная по координате γ; $\overset{(1)}{M}$ — матрица-оператор дифференцирования по переменным α, β:

$$\overset{(1)}{M} = \overset{(1)}{M}(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ p,\ q,\ \nu,\ G). \tag{19}$$

Здесь обозначено

$$p^m q^n = \frac{\partial^{m+n}}{\partial\alpha^m \partial\beta^n} \qquad (m,\ n = 1,\ 2,\ \ldots). \tag{20}$$

Выражение (I) представляет матрицу-оператор (19) в развернутом виде. С помощью этой матрицы довольно просто получить значение матрицы-оператора $\overset{(1)}{M}$ в любой ортогональной системе координат. Рассмотрим несколько примеров.

В смешанной системе криволинейных координат α, β, z коэффициенты Ляме определяются формулами [1], в которых координата γ заменена прямолинейной координатой z:

$$H_1 = A(1 + k_1 z), \quad H_2 = B(1 + k_2 z), \quad H_3 = 1, \tag{21}$$

где $A = A(\alpha, \beta)$, $B = B(\alpha, \beta)$ — коэффициенты первой квадратичной формы поверхности $z = 0$, отнесенной к линиям ее главных кривизн; $k_1 = k_1(\alpha, \beta)$, $k_2 = k_2(\alpha, \beta)$ — главные кривизны той же поверхности. Формулы для кривизн (6) в смешанной системе координат принимают следующий вид:

$$\left.\begin{aligned}
&k_{3\alpha} = \frac{k_1}{1 + k_1 z} = \frac{1}{r_1 + z}, && k_{3\beta} = \frac{k_2}{1 + k_2 z} = \frac{1}{r_2 + z},\\
&k_{1\beta} = \frac{1}{H_2 H_1}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha}, && k_{1z} = 0,\\
&k_{2z} = 0, && k_{2\alpha} = \frac{1}{H_1 H_2}\frac{\partial H_1}{\partial\beta}.
\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Здесь

$$r_1 = \frac{1}{k_1}, \quad r_2 = \frac{1}{k_2} \tag{23}$$

являются главными радиусами кривизны поверхности $z = 0$. Формулы (7), связывающие кривизны, после подстановки в них значений (22) упрощаются и имеют вид

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{H_1}\frac{\partial k_{1\beta}}{\partial\alpha} + \frac{1}{H_2}\frac{\partial k_{2\alpha}}{\partial\beta} + k_{1\beta}^2 + k_{2\alpha}^2 + k_{3\alpha}k_{3\beta} = 0,\\
&\frac{\partial k_{3\beta}}{\partial z} + k_{3\beta}^2 = 0, \quad \frac{\partial k_{3\alpha}}{\partial z} + k_{3\alpha}^2 = 0,\\
&\frac{1}{H_2}\frac{\partial k_{3\alpha}}{\partial\beta} + k_{2\alpha}(k_{3\alpha} - k_{3\beta}) = 0, \quad \frac{\partial k_{1\beta}}{\partial z} + k_{3\beta}k_{1\beta} = 0,\\
&\frac{\partial k_{2\alpha}}{\partial z} + k_{3\alpha}k_{2\alpha} = 0, \quad \frac{1}{H_1}\frac{\partial k_{3\beta}}{\partial\alpha} + k_{1\beta}(k_{3\beta} - k_{3\alpha}) = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Внося соответствующие смешанной системе координат изменения в матрицу (I) получаем матрицу-оператор $\overset{(1)}{M}$, компоненты которой представлены в виде (II).

$$\overset{(1)}{M} =$$

$$= \begin{bmatrix} k_{3\alpha} & 0 \\ 0 & k_{3\beta} \\ -\frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{p}{H_1}+k_{1\beta}\right)-k_{1\gamma} & -\frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{q}{H_2}+k_{2\alpha}\right)-k_{2\gamma} \\ \begin{gathered} -\frac{2G}{1-\nu}\left[\frac{p^2}{H_1^2}+\left(k_{1\beta}+k_{1\gamma}-\frac{1}{H_1^2}\times\right.\right. \\ \left.\left.\times\frac{\partial H_1}{\partial\alpha}\right)\frac{p}{H_1}\right]-G\left[\frac{q^2}{H_2^2}+\left(k_{2\alpha}+k_{2\gamma}-\right.\right. \\ \left.\left.-\frac{1}{H_2^2}\frac{\partial H_2}{\partial\beta}\right)\frac{q}{H_2}\right]-G\left[\frac{2}{1-\nu}\left(\frac{1}{H_1}\times\right.\right. \\ \left.\times\frac{\partial k_{1\beta}}{\partial\alpha}+\nu k_{1\beta}k_{1\gamma}\right)+ \\ \left.+\frac{1}{H_2}\frac{\partial k_{2\alpha}}{\partial\beta}+2k_{3\alpha}k_{3\beta}-k_{2\alpha}k_{2\gamma}\right] \end{gathered} & \begin{gathered} -\frac{1+\nu}{1-\nu}G\frac{pq}{H_1H_2}-\frac{G}{1-\nu}[2\nu k_{1\gamma}- \\ -(3-\nu)k_{1\beta}]\frac{q}{H_2}-G\left(k_{2\gamma}+\right. \\ \left.+\frac{3-\nu}{1-\nu}k_{2\alpha}\right)\frac{p}{H_1}+G\left[\frac{1}{H_2}\frac{\partial k_{1\beta}}{\partial\beta}+\right. \\ \left.+k_{2\gamma}k_{1\beta}-\frac{2}{1-\nu}\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial k_{2\alpha}}{\partial\alpha}+k_{1\gamma}k_{2\alpha}\right)\right] \end{gathered} \\ \begin{gathered} -\frac{1+\nu}{1-\nu}G\frac{pq}{H_1H_2}-\frac{G}{1-\nu}[2\nu k_{2\gamma}- \\ -(3-\nu)k_{2\alpha}]\frac{p}{H_1}-G\left(k_{1\gamma}+\frac{3-\nu}{1-\nu}\times\right. \\ \left.\times k_{1\beta}\right)\frac{q}{H_2}+G\left[\frac{1}{H_1}\frac{\partial k_{2\alpha}}{\partial\alpha}+k_{1\gamma}k_{2\alpha}-\right. \\ \left.-\frac{2}{1-\nu}\left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial k_{1\beta}}{\partial\beta}+k_{2\gamma}k_{1\beta}\right)\right] \end{gathered} & \begin{gathered} -\frac{2G}{1-\nu}\left[\frac{q^2}{H_2^2}+(k_{2\alpha}+k_{2\gamma}-\right. \\ \left.\left.-\frac{1}{H_2^2}\frac{\partial H_2}{\partial\beta}\right)\frac{q}{H_2}\right]-G\left[\frac{p^2}{H_1^2}+\left(k_{1\beta}+\right.\right. \\ \left.\left.+k_{1\gamma}-\frac{1}{H_1^2}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha}\right)\frac{p}{H_1}\right]-G\left[\frac{2}{1-\nu}\times\right. \\ \times\left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial k_{2\alpha}}{\partial\beta}+\nu k_{2\alpha}k_{2\gamma}\right)+ \\ \left.+\frac{1}{H_1}\frac{\partial k_{1\beta}}{\partial\alpha}+2k_{3\beta}k_{3\alpha}-k_{1\beta}k_{1\gamma}\right] \end{gathered} \\ \frac{2G}{1-\nu}\left[(k_{3\alpha}+\nu k_{3\beta})\frac{p}{H_1}+k_{1\beta}(k_{3\beta}+\nu k_{3\alpha})\right] & \frac{2G}{1-\nu}\left[(k_{3\beta}+\nu k_{3\alpha})\frac{q}{H_2}+k_{2\alpha}(k_{3\alpha}+\nu k_{3\beta})\right] \end{bmatrix}$$

В произвольной цилиндрической системе координат коэффициенты Ляме являются функциями только двух координат α, β:

$$H_1 = H_1(\alpha, \beta), \quad H_2 = H_2(\alpha, \beta), \quad H_3 = 1. \tag{25}$$

В этой системе координат отличны от нуля только две кривизны

$$\left.\begin{aligned} k_{1\beta} &= \frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha} = \frac{1}{H_1}\frac{\partial \ln H_2}{\partial\alpha}, \\ k_{2\alpha} &= \frac{1}{H_2H_1}\frac{\partial H_1}{\partial\beta} = \frac{1}{H_2}\frac{\partial \ln H_1}{\partial\beta}, \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

а из зависимостей (7) сохраняется только одна:

$$\frac{1}{H_1}\frac{\partial k_{1\beta}}{\partial\alpha} + \frac{1}{H_2}\frac{\partial k_{2\alpha}}{\partial\beta} + k_{1\beta}^2 + k_{2\alpha}^2 = 0. \tag{27}$$

Соответствующие произвольной цилиндрической системе координат компоненты матрицы-оператора $\overset{(1)}{M}$, которые, как это следует из формул (25), не зависят от координаты γ, представлены выражением (III).

$$
\left.
\begin{array}{cccc}
-\dfrac{p}{H_1}+k_{1\gamma} & \dfrac{1}{G} & 0 & 0 \\[2ex]
-\dfrac{q}{H_2}+k_{2\gamma} & 0 & \dfrac{1}{G} & 0 \\[2ex]
-\dfrac{\nu}{1-\nu}(k_{3\alpha}+k_{3\beta}) & 0 & 0 & \dfrac{1-2\nu}{2(1-\nu)G} \\[6ex]
\begin{array}{l}
-\dfrac{2G}{1-\nu}(k_{3\alpha}+\nu k_{3\beta})\dfrac{p}{H_1}- \\
-\dfrac{2G}{1-\nu}\left[\dfrac{1}{H_1}\dfrac{\partial}{\partial\alpha}(k_{3\alpha}+\right. \\
\left.+k_{3\beta})+k_{1\gamma}(k_{3\alpha}+\nu k_{3\beta})\right]
\end{array} & -(2k_{3\alpha}+k_{3\beta}) & 0 & \begin{array}{c} -\dfrac{\nu}{1-\nu}\dfrac{p}{H_1}+ \\ +\dfrac{1-2\nu}{1-\nu}k_{1\gamma}\end{array} \\[10ex]
\begin{array}{l}
-\dfrac{2G}{1-\nu}(k_{3\beta}+\nu k_{3\alpha})\dfrac{q}{H_2}- \\
-\dfrac{2G}{1-\nu}\left[\dfrac{1}{H_2}\dfrac{\partial}{\partial\beta}(k_{3\beta}+\right. \\
\left.+k_{3\alpha})+k_{2\gamma}(k_{3\beta}+\nu k_{3\alpha})\right]
\end{array} & 0 & -(k_{3\alpha}+2k_{3\beta}) & \begin{array}{c} -\dfrac{\nu}{1-\nu}\dfrac{q}{H_2}+ \\ +\dfrac{1-2\nu}{1-\nu}k_{2\gamma}\end{array} \\[10ex]
\dfrac{2G}{1-\nu}(k_{3\alpha}^2+2\nu k_{3\alpha}k_{3\beta}+k_{3\beta}^2) & -\dfrac{p}{H_1}-(2k_{1\gamma}+k_{1\beta}) & -\dfrac{q}{H_2}-(2k_{2\gamma}+k_{2\alpha}) & -\dfrac{1-2\nu}{1-\nu}(k_{3\alpha}+k_{3\beta})
\end{array}
\right]
\qquad (\mathrm{I})
$$

В сферических координатах $\alpha=\theta$, $\beta=\varphi$, $\gamma=z$ имеем

$$H_1=r+z,\quad H_2=(r+z)\sin\theta,\quad H_3=1, \qquad (28)$$

где r — радиус сферы $z=0$. Для отличных от нуля кривизн получаются следующие формулы:

$$k_{3\alpha}=k_{3\beta}=\frac{1}{r+z},\quad k_{1\beta}=\frac{1}{r+z}\operatorname{ctg}\theta. \qquad (29)$$

Для сферической системы координат компоненты $\overset{(1)}{M}$ записаны в виде (IV).

В круговых цилиндрических координатах x, β, z с коэффициентами Ляме

$$H_1=1,\quad H_2=r+z,\quad H_3=1, \qquad (30)$$

где r — радиус цилиндрической поверхности $z=0$, остается отличной от нуля только одна кривизна

$$k_{3\beta}=\frac{1}{r+z}. \qquad (31)$$

$$\overset{(1)}{M} = \begin{bmatrix} k_{3\alpha} & 0 \\ 0 & k_{3\beta} \\ -\frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{p}{H_1}+k_{1\beta}\right) & -\frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{q}{H_2}+k_{2\alpha}\right) \\ \begin{gathered} -\frac{2G}{1-\nu}\left[\frac{p^2}{H_1^2}+\left(k_{1\beta}-\frac{1}{H_1^2}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha}\right)\times \right. \\ \left.\times\frac{p}{H_1}\right]-G\left[\frac{q^2}{H_2^2}+\left(k_{2\alpha}-\frac{1}{H_2^2}\frac{\partial H_2}{\partial\beta}\right)\times\right. \\ \left.\times\frac{q}{H_2}\right]-G\left(\frac{2}{1-\nu}\frac{1}{H_1}\frac{\partial k_{1\beta}}{\partial\alpha}+\right. \\ \left.+\frac{1}{H_2}\frac{\partial k_{2\alpha}}{\partial\beta}+2k_{3\alpha}k_{3\beta}\right) \end{gathered} & \begin{gathered} -\frac{1+\nu}{1-\nu}G\frac{pq}{H_1H_2}+ \\ +\frac{3-\nu}{1-\nu}Gk_{1\beta}\frac{q}{H_2}-\frac{3-\nu}{1-\nu}Gk_{2\alpha}\frac{p}{H_1}+ \\ +G\left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial k_{1\beta}}{\partial\beta}-\frac{2}{1-\nu}\frac{1}{H_1}\frac{\partial k_{2\alpha}}{\partial\alpha}\right) \end{gathered} \\ \begin{gathered} -\frac{1+\nu}{1-\nu}G\frac{pq}{H_1H_2}+\frac{3-\nu}{1-\nu}Gk_{2\alpha}\frac{p}{H_1}- \\ -\frac{3-\nu}{1-\nu}Gk_{1\beta}\frac{q}{H_2}+ \\ +G\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial k_{2\alpha}}{\partial\alpha}-\frac{2}{1-\nu}\frac{1}{H_2}\frac{\partial k_{1\beta}}{\partial\beta}\right) \end{gathered} & \begin{gathered} -\frac{2G}{1-\nu}\left[\frac{q^2}{H_2^2}+\left(k_{2\alpha}-\frac{1}{H_2^2}\frac{\partial H_2}{\partial\beta}\right)\times\right. \\ \left.\times\frac{q}{H_2}\right]-G\left[\frac{p^2}{H_1^2}+\left(k_{1\beta}-\frac{1}{H_1^2}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha}\right)\times\right. \\ \left.\times\frac{p}{H_1}\right]-G\left(\frac{2}{1-\nu}\frac{1}{H_2}\frac{\partial k_{2\alpha}}{\partial\beta}+\right. \\ \left.+\frac{1}{H_1}\frac{\partial k_{1\beta}}{\partial\alpha}+2k_{3\beta}k_{3\alpha}\right) \end{gathered} \\ \frac{2G}{1-\nu}\left[(k_{3\alpha}+\nu k_{3\beta})\frac{p}{H_1}+k_{1\beta}(k_{3\beta}+\nu k_{3\alpha})\right] & \frac{2G}{1-\nu}\left[(k_{3\beta}+\nu k_{3\alpha})\frac{q}{H_2}+k_{2\alpha}(k_{3\alpha}+\nu k_{3\beta})\right] \end{bmatrix}$$

Внося это значение кривизны в выражение (II) и учитывая формулы (30), получаем матрицу-оператор $\overset{(1)}{M}$, компоненты которой представлены в виде (V). Отметим, что в этой системе координат $\overset{(1)}{M}$ зависит только от одной переменной — координаты z.

И, наконец, в декартовой системе координат x, y, z все коэффициенты Ляме равны единице, а кривизны — нулю. Компоненты $\overset{(1)}{M}$ в декартовой системе координат представлены выражением (VI) и являются постоянными, не зависящими от координат величинами. Система уравнений (18) в этом случае переходит в исходную систему уравнений метода начальных функций [2], если в последней отсутствуют объемные силы.

Из приведенных выше систем координат наиболее удобной и, в то же время, достаточно общей, следует признать смешанную систему координат, для которой, если учесть формулы (21), уравнение (18) имеет вид

$$f' = \overset{(1)}{M} f. \tag{32}$$

Здесь штрих обозначает производную по координате z.

Рассматривая уравнение (32) как систему обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, записанную в матричной форме, ищем ее решение в виде ряда Тейлора по переменной z:

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)\frac{z-z_0}{1!} + f''(z_0)\frac{(z-z_0)^2}{2!} + \cdots \tag{33}$$

$$
\left.\begin{array}{cccc}
-\dfrac{p}{H_1} & \dfrac{1}{G} & 0 & 0 \\[2ex]
-\dfrac{q}{H_2} & 0 & \dfrac{1}{G} & 0 \\[2ex]
-\dfrac{\nu}{1-\nu}(k_{3\alpha}+k_{3\beta}) & 0 & 0 & \dfrac{1-2\nu}{2(1-\nu)G} \\[4ex]
\begin{array}{l} -\dfrac{2G}{1-\nu}(k_{3\alpha}+\nu k_{3\beta})\times \\ \times\dfrac{p}{H_1}-\dfrac{2G}{1-\nu}\,\dfrac{1}{H_1}\times \\ \times\dfrac{\partial}{\partial\alpha}(k_{3\alpha}+k_{3\beta}) \end{array} & -(2k_{3\alpha}+k_{3\beta}) & 0 & -\dfrac{\nu}{1-\nu}\,\dfrac{p}{H_1} \\[8ex]
\begin{array}{l} -\dfrac{2G}{1-\nu}(k_{3\beta}+\nu k_{3\alpha})\times \\ \times\dfrac{q}{H_2}-\dfrac{2G}{1-\nu}\,\dfrac{1}{H_2}\times \\ \times\dfrac{\partial}{\partial\beta}(k_{3\beta}+k_{3\alpha}) \end{array} & 0 & -(k_{3\alpha}+2k_{3\beta}) & -\dfrac{\nu}{1-\nu}\,\dfrac{q}{H_2} \\[8ex]
\dfrac{2G}{-\nu}(k_{3\alpha}^2+2\nu k_{3\alpha}k_{3\gamma}+k_{3\beta}^2) & -\dfrac{p}{H_1}-k_{1\beta} & -\dfrac{q}{H_2}-k_{2\alpha} & -\dfrac{1-2\nu}{1-\nu}(k_{3\alpha}+k_{3\beta})
\end{array}\right] \qquad (31)
$$

Используя выражение (32), получаем следующие зависимости для высших производных от f по z:

$$
\begin{aligned}
f' &= \overset{(1)}{M}f, \\
f'' &= \overset{(1)}{M}{}'f + \overset{(1)}{M}f' = (\overset{(1)}{M}{}' + \overset{(1)}{M}\overset{(1)}{M})f = \overset{(2)}{M}f, \\
f''' &= \overset{(2)}{M}{}'f + \overset{(2)}{M}f' = (\overset{(2)}{M}{}' + \overset{(2)}{M}\overset{(1)}{M})f = \overset{(3)}{M}f, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
f^{(n)} &= \overset{(n-1)}{M}{}'f + \overset{(n-1)}{M}f' = (\overset{(n-1)}{M}{}' + \overset{(n-1)}{M}\overset{(1)}{M})f = \overset{(n)}{M}f.
\end{aligned} \qquad (34)
$$

Отсюда имеем рекуррентные зависимости

$$
\overset{(n)}{M} = \overset{(n-1)}{M}{}' + \overset{(n-1)}{M}\overset{(1)}{M}. \qquad (35)
$$

Решение (33) представим в матрично-операторной форме [5]

$$
f(z) = Lf(z_0), \qquad (36)
$$

где

$$
L = \sum_{n=0}^{\infty} \overset{(n)}{M} \frac{(z-z_0)^n}{n!} \qquad (37)
$$

и принято, что $\overset{(0)}{M} = E$ — единичная матрица.

$$
\overset{(1)}{M} =
$$

$$
= \begin{bmatrix}
0 & & -\frac{p}{H_1} & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\
0 & & -\frac{q}{H_2} & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\
-\frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{p}{H_1}+k_{1\beta}\right) & -\frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{q}{H_2}+k_{2\alpha}\right) & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)G} \\
\begin{gathered} -\frac{2G}{1-\nu}\left[\frac{p^2}{H_1^2}+\left(k_{1\beta}-\frac{1}{H_1^2}\frac{\partial H_1}{\partial \alpha}\right)\times \right. \\ \left. \times\frac{p}{H_1}\right]-G\left[\frac{q^2}{H_2^2}+\left(k_{2\alpha}-\frac{1}{H_2^2}\times \right.\right. \\ \left.\left. \times\frac{\partial H_2}{\partial \beta}\right)\frac{q}{H_2}\right]- \\ -G\left(\frac{2}{1-\nu}\frac{1}{H_1}\frac{\partial k_{1\beta}}{\partial \alpha}+\frac{1}{H_2}\frac{\partial k_{2\alpha}}{\partial \beta}\right) \end{gathered} & \begin{gathered} -\frac{1+\nu}{1-\nu}G\frac{pq}{H_1H_2}+ \\ +\frac{3-\nu}{1-\nu}Gk_{1\beta}\frac{q}{H_2}-\frac{3-\nu}{1-\nu}Gk_{2\alpha}\frac{p}{H_1}+ \\ +G\left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial k_{1\beta}}{\partial \beta}-\frac{2}{1-\nu}\frac{1}{H_1}\frac{\partial k_{2\alpha}}{\partial \alpha}\right) \end{gathered} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\nu}{1-\nu}\frac{p}{H_1} \\
\begin{gathered} -\frac{1+\nu}{1-\nu}G\frac{pq}{H_1H_2}+ \\ +\frac{3-\nu}{1-\nu}Gk_{2\alpha}\frac{p}{H_1}-\frac{3-\nu}{1-\nu}Gk_{1\beta}\frac{q}{H_2}+ \\ +G\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial k_{2\alpha}}{\partial \alpha}-\frac{2}{1-\nu}\frac{1}{H_2}\frac{\partial k_{1\beta}}{\partial \beta}\right) \end{gathered} & \begin{gathered} -\frac{2G}{1-\nu}\left[\frac{q^2}{H_2^2}+\left(k_{2\alpha}-\frac{1}{H_2^2}\frac{\partial H_2}{\partial \beta}\right)\times \right. \\ \left. \times\frac{q}{H_2}\right]-G\left[\frac{p^2}{H_1^2}+\right. \\ \left. +\left(k_{1\beta}-\frac{1}{H_1^2}\frac{\partial H_1}{\partial \alpha}\right)\frac{p}{H_1}\right]- \\ -G\left(\frac{2}{1-\nu}\frac{1}{H_2}\frac{\partial k_{2\alpha}}{\partial \beta}+\frac{1}{H_1}\frac{\partial k_{1\beta}}{\partial \alpha}\right) \end{gathered} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\nu}{1-\nu}\frac{q}{H_2} \\
0 & 0 & 0 & \multicolumn{2}{c}{-\frac{p}{H_1}-k_{1\beta}-\frac{q}{H_2}-k_{2\alpha}} & 0
\end{bmatrix} \qquad \text{(III)}
$$

$$
\overset{(1)}{M} = \begin{bmatrix}
\frac{1}{r+z} & 0 & -\frac{p}{r+z} & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\[2ex]
0 & \frac{1}{r+z} & -\frac{q}{(r+z)\sin\theta} & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\[2ex]
-\frac{\nu}{1-\nu}\frac{p+\operatorname{ctg}\theta}{r+z} & -\frac{\nu}{1-\nu}\frac{q}{(r+z)\sin\theta} & -\frac{2\nu}{1-\nu}\frac{1}{r+z} & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)G} \\[2ex]
\begin{gathered} -\frac{G}{(r+z)^2}\left[\frac{2}{1-\nu}(p+\operatorname{ctg}\theta)\,p+\right. \\ \left.+\frac{q^2}{\sin^2\theta}-\frac{2}{1-\nu}\frac{1}{\sin^2\theta}+2\right] \end{gathered} & \begin{gathered} -\frac{1+\nu}{1-\nu}\frac{G}{(r+z)^2}\frac{pq}{\sin\theta}+ \\ +\frac{3-\nu}{1-\nu}\frac{G}{(r+z)^2}\frac{\operatorname{ctg}\theta}{\sin\theta}\,q \end{gathered} & -\frac{1+\nu}{1-\nu}\frac{2G}{(r+z)^2}\,p & -\frac{3}{r+z} & 0 & -\frac{\nu}{1-\nu}\frac{p}{r+z} \\[4ex]
\begin{gathered} -\frac{1+\nu}{1-\nu}\frac{G}{(r+z)^2}\frac{pq}{\sin\theta}- \\ -\frac{3-\nu}{1-\nu}\frac{G}{(r+z)^2}\frac{\operatorname{ctg}\theta}{\sin\theta}\,q \end{gathered} & \begin{gathered} -\frac{G}{(r+z)^2}\left[(p+\operatorname{ctg}\theta)\,p+\right. \\ \left.+\frac{2}{1-\nu}\frac{q^2}{\sin^2\theta}-\frac{1}{\sin^2\theta}+2\right] \end{gathered} & \begin{gathered} -\frac{1+\nu}{1-\nu}\frac{2G}{(r+z)^2}\times \\ \times\frac{q}{\sin\theta} \end{gathered} & 0 & -\frac{3}{r+z} & \begin{gathered} -\frac{\nu}{1-\nu}\times \\ \times\frac{q}{(r+z)\sin\theta} \end{gathered} \\[4ex]
\frac{1+\nu}{1-\nu}\frac{2G}{(r+z)^2}(p+\operatorname{ctg}\theta) & \frac{1+\nu}{1-\nu}\frac{2G}{(r+z)^2}\frac{q}{\sin\theta} & 4\,\frac{1+\nu}{1-\nu}\frac{G}{(r+z)^2} & -\frac{p+\operatorname{ctg}\theta}{r+z} & -\frac{q}{(r+z)\sin\theta} & \begin{gathered} -2\,\frac{1-2\nu}{1-\nu}\times \\ \times\frac{1}{r+z} \end{gathered}
\end{bmatrix} \quad \text{(IV)}
$$

$$\overset{(1)}{M} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -p & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r+z} & -\frac{q}{r+z} & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ -\frac{\nu}{1-\nu}p & -\frac{\nu}{1-\nu}\frac{q}{r+z} & -\frac{\nu}{1-\nu}\frac{1}{r+z} & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)G} \\ -\frac{2G}{1-\nu}p^2 - \frac{Gq^2}{(r+z)^2} & -G\frac{1+\nu}{1-\nu}\times\frac{pq}{r+z} & -\frac{2\nu G}{1-\nu}\frac{p}{r+z} & -\frac{1}{r+z} & 0 & -\frac{\nu}{1-\nu}p \\ -G\frac{1+\nu}{1-\nu}\times\frac{pq}{r+z} & -Gp^2 - \frac{2G}{1-\nu}\frac{q^2}{(r+z)^2} & -\frac{2G}{1-\nu}\times\frac{q}{(r+z)^2} & 0 & -\frac{2}{r+z} & -\frac{\nu}{1-\nu}\times\frac{q}{r+z} \\ \frac{2\nu G}{1-\nu}\frac{p}{r+z} & \frac{2G}{1-\nu}\frac{q}{(r+z)^2} & \frac{2G}{1-\nu}\frac{q}{(r+z)^2} & -p & -\frac{q}{r+z} & -\frac{1-2\nu}{1-\nu}\times\frac{1}{r+z} \end{bmatrix} \tag{V}$$

$$\overset{(1)}{M} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -p & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -q & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ -\frac{\nu}{1-\nu}p & -\frac{\nu}{1-\nu}q & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)G} \\ -\frac{2G}{1-\nu}p^2 - Gq^2 & -G\frac{1+\nu}{1-\nu}pq & 0 & 0 & 0 & -\frac{\nu}{1-\nu}p \\ -G\frac{1+\nu}{1-\nu}pq & -Gp^2 - \frac{2G}{1-\nu}q^2 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\nu}{1-\nu}q \\ 0 & 0 & 0 & -p & -q & 0 \end{bmatrix} \tag{VI}$$

Подставляя решение (36) в систему (32), получаем

$$L' = \overset{(1)}{M}L \tag{38}$$

и, следовательно, L — фундаментальная матрица этой системы, представленная в форме матрично-операторного ряда.

Известно, что определитель фундаментальной матрицы — определитель Вронского — вычисляется по формуле

$$W(z) = \operatorname{Det} L(z) = W(z_0) \exp \int_{z_0}^{z} \operatorname{Sp} \overset{(1)}{M}(z_1)\, dz_1, \tag{39}$$

где $W(z)$ — определитель Вронского, $\operatorname{Sp}\overset{(1)}{M}$ — след матрицы-оператора $\overset{(1)}{M}$, который в смешанной системе координат (см. (II)) имеет вид

$$\operatorname{Sp} \overset{(1)}{M} = -3(k_{3\alpha} + k_{3\beta}). \tag{40}$$

Представляя входящие сюда кривизны в форме, вытекающей из выражений (6) и (21):

$$k_{3\alpha} = \frac{\partial \ln H_1}{\partial z}, \quad k_{3\beta} = \frac{\partial \ln H_2}{\partial z}, \tag{41}$$

вычисляем интеграл:

$$\int_{z_0}^{z} \mathrm{Sp} \overset{(1)}{M}(z_1)\, dz_1 = -3 \int_{z_0}^{z} \frac{\partial \ln H_1 H_2}{\partial z_1}\, dz_1 =$$

$$= -3 \ln \frac{H_1(z)\, H_2(z)}{H_1(z_0)\, H_2(z_0)} = \ln \left[\frac{H_1(z_0)\, H_2(z_0)}{H_1(z)\, H_2(z)} \right]^3. \tag{42}$$

Подставляя вычисленный интеграл в формулу (39), получаем определитель Вронского системы (32):

$$W(z) = \left[\frac{H_1(z_0)\, H_2(z_0)}{H_1(z)\, H_2(z)} \right]^3. \tag{43}$$

Выражая коэффициенты Ляме в смешанной системе координат через их значения по формулам (21), определитель Вронского можно представить в другой форме:

$$W(z) = \left[\frac{(r_1 + z_0)(r_2 + z_0)}{(r_1 + z)(r_2 + z)} \right]^3. \tag{44}$$

Из этой формулы непосредственно следует, что в точках, принадлежащих геометрическому месту центров радиусов кривизны поверхности $z = 0$, т. е. в точках с координатами $z = -r_1$, либо $z = -r_2$, система уравнений (32) имеет устранимые особенности. Устранимость понимается в том смысле, что при переходе к системам координат, для которых коэффициенты Ляме не зависят от координаты z, эти особенности исчезают. В таких системах определитель Вронского равен единице, поскольку след матрицы $\overset{(1)}{M}$ в этом случае равен нулю (см. (III), (VI)).

Реализация рекуррентных зависимостей (35) с целью вычисления оператора L и, следовательно, получения решения системы (32) в общем случае достаточно сложна. Эта сложность объясняется тем, что матрица-оператор $\overset{(1)}{M}$ не только содержит операторы дифференцирования по переменным α, β, но и сама является функцией этих же переменных. Исключениями являются круговые цилиндрические и декартовые системы координат.

Пусть твердое однородное упругое изотропное тело отнесено к смешанной системе криволинейных ортогональных координат и ограничено двумя поверхностями $z_0 = 0$, $z = h$. Это тело представляет собой криволинейный слой постоянной толщины h. Используя формулы (36), (37), выражаем основные искомые функции, действующие на поверхности $z = h$, через те же функции, заданные на поверхности $z_0 = 0$:

$$f(h) = Lf(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \overset{(n)}{M} \frac{h^n}{n!} f(0). \tag{45}$$

В каждой из точек граничной поверхности можно произвольно задаваться не более чем тремя основными функциями (но не любыми!). Следовательно, три из шести основных функций должны быть заданы на поверхности $z_0 = 0$, а другие три на поверхности $z = h$. Возникает задача: представить недостающие искомые функции, действующие на поверхности $z_0 = 0$, через заданные на поверхности $z = h$ функции. С этой целью разобьем систему (45) на две:

$$u(h) = L_{uu} u(0) + L_{ut} t(0), \tag{46}$$

$$t(h) = L_{tu} u(0) + L_{tt} t(0), \tag{47}$$

в которых

$$u = \begin{pmatrix} u_\alpha \\ u_\beta \\ u_z \end{pmatrix}, \quad t = \begin{pmatrix} \tau_{\alpha z} \\ \tau_{\beta z} \\ \sigma_z \end{pmatrix}, \tag{48}$$

а L_{uu}, L_{ut}, L_{tu}, L_{tt} — блоки оператора L:

$$L = \begin{pmatrix} L_{uu} & L_{ut} \\ L_{tu} & L_{tt} \end{pmatrix}. \tag{49}$$

Представление искомого решения в форме (46), (47) позволяет перейти к обсуждению основных граничных задач для криволинейного слоя, под которыми понимаются задачи с заданными на каждой из поверхностей $z_0 = 0$, $z = h$ либо только напряжениями, либо только перемещениями. Следовательно, таких задач будет четыре: статическая, геометрическая и две смешанных.

Статическая задача. На поверхностях $z_0 = 0$, $z = h$ заданы напряжения $t(0)$ и $t(h)$ соответственно. Чтобы иметь возможность применить решение (36) необходимо найти перемещения $u(0)$ на поверхности $z_0 = 0$. Эти перемещения находятся из системы трех дифференциальных уравнений бесконечно высокого порядка, которая просто получается из системы (47) перестановкой слагаемых:

$$L_{tu} u(0) = t(h) - L_{tt} t(0). \tag{50}$$

Геометрическая задача. В этой задаче известны перемещения $u(0)$, $u(h)$ на поверхностях $z_0 = 0$, $z = h$ соответственно. С помощью дифференциального уравнения

$$L_{ut} t(0) = u(t) - L_{uu} u(0), \tag{51}$$

взятого из системы (46), находятся напряжения $t(0)$, которые вместе с заданными перемещениями $u(0)$ позволяют использовать решение (36).

Смешанная задача. Две задачи этого типа возникают, если заданы либо $u(0)$, $t(h)$, либо $u(h)$, $t(0)$. В этом случае из систем (47) и (46) соответственно получаем

$$L_{tt} t(0) = t(h) - L_{tu} u(0), \tag{52}$$

$$L_{uu} u(0) = u(h) - L_{ut} t(0). \tag{53}$$

Кроме рассмотренных двух смешанных задач возможны и другие виды задач, для получения которых блоки оператора следовало бы разбить на отдельные элементы.

Пространственная задача теории упругости, заключающаяся в интегрировании исходных уравнений по объему тела (по трем переменным), сведена здесь к интегрированию уравнений (50) — (53) по поверхности этого тела (по двум переменным). По существу, упомянутыми уравнениями дается решение задачи приведения трехмерной теории упругости к двумерной [3]. Отмеченная в этой работе множественность решений задачи приведения связана с приближенным решением полученных здесь двумерных уравнений, имеющих бесконечно высокий порядок. Точное решение этих уравнений дает единственное решение задачи приведения.

Для разложения искомого решения в ряд Тейлора необходимо знать область и характер сходимости данного ряда [4]. Как уже отмечалось при обсуждении определителя Вронского (44), сходимость решения имеет место во всех точках исследуемого тела, за исключением точек, совпадающих с центрами кривизны координатной поверхности $z_0 = 0$. В декартовой системе координат для слоя конечной толщины сходимость решения обеспечена.

В качестве примера рассмотрим решение пространственной задачи теории упругости для плоского слоя, отнесенного к декартовой системе координат x, y, z. Рассматриваемый слой ограничен плоскостями $z_0 = 0$, $z = h$. В этом случае матрица-оператор $\overset{(1)}{M} = M$ является, как отмечалось, независимой от координат. Поэтому на основании рекуррентных зависимостей (35) оператор (37) может быть представлен в виде операторной экспоненты

$$L = \exp Mz = E + \frac{z}{1!} M + \frac{z^2}{2!} M^2 + \cdots, \tag{54}$$

а решение (36) — в форме

$$f(z) = e^{Mz} f(0). \tag{55}$$

Учитывая, что матрица-оператор M удовлетворяет минимальному многочлену

$$M^4 + 2\gamma^2 M^2 + \gamma^4 E = 0, \tag{56}$$

находим формулы для высших степеней матрицы-оператора M:

$$\left.\begin{aligned} M^{2n} &= (-1)^{n-1}\left[(n-1)\gamma^{2n}E + n\gamma^{2n-2}M^2\right] \\ M^{2n+1} &= (-1)^{n-1}\left[(n-1)\gamma^{2n}M + n\gamma^{2n-2}M^3\right] \end{aligned}\right\} \quad (n = 1,\ 2,\ \ldots), \tag{57}$$

где

$$\gamma^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \tag{58}$$

Заменим в разложении (54) высшие степени M по формулам (57). Тогда получим

$$\begin{aligned} L = {} & \left(1 - \frac{\gamma^4 z^4}{4!} + \frac{2\gamma^6 z^6}{6!} - \frac{3\gamma^8 z^8}{8!} + \cdots\right) E + \\ & + \left(\frac{z}{1!} - \frac{\gamma^4 z^5}{5!} + \frac{2\gamma^6 z^7}{7!} - \frac{3\gamma^8 z^9}{9!} + \cdots\right) M + \\ & + \left(\frac{z^2}{2!} - \frac{2\gamma^2 z^4}{4!} + \frac{3\gamma^4 z^6}{6!} - \frac{4\gamma^6 z^8}{8!} + \cdots\right) M^2 + \\ & + \left(\frac{z^3}{3!} - \frac{2\gamma^2 z^5}{5!} + \frac{3\gamma^4 z^7}{7!} - \frac{4\gamma^6 z^9}{9!} + \cdots\right) M^3. \end{aligned} \tag{59}$$

Входящие сюда ряды можно представить в замкнутой трансцендентной форме, если воспользоваться разложением тригонометрических функций по степеням их аргумента:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2}(\varphi\sin\varphi + 2\cos\varphi) &= 1 - \frac{\varphi^4}{4!} + \frac{2\varphi^6}{6!} - \frac{3\varphi^8}{8!} + \cdots, \\ \frac{1}{2}(3\sin\varphi - \varphi\cos\varphi) &= \varphi - \frac{\varphi^5}{5!} + \frac{2\varphi^7}{7!} - \frac{3\varphi^9}{9!} + \cdots, \\ \frac{1}{2}\varphi\sin\varphi &= \frac{\varphi^2}{2!} - \frac{2\varphi^4}{4!} + \frac{3\varphi^6}{6!} - \frac{4\varphi^8}{8!} + \cdots, \\ \frac{1}{2}(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi) &= \frac{\varphi^3}{3!} - \frac{2\varphi^5}{5!} + \frac{3\varphi^7}{7!} - \frac{4\varphi^9}{9!} + \cdots. \end{aligned}\right| \tag{60}$$

Принимая в этих разложениях $\varphi = \gamma z$ и суммируя ряды в (59), получаем

$$\begin{aligned} L = {} & \frac{1}{2}(\gamma z\sin\gamma z + 2\cos\gamma z)E + \frac{1}{2}\left(3\frac{\sin\gamma z}{\gamma z} - \cos\gamma z\right) zM + \\ & + \frac{1}{2}\frac{\sin\gamma z}{\gamma z} z^2 M^2 + \frac{1}{2\gamma^2 z^2}\left(\frac{\sin\gamma z}{\gamma z} - \cos\gamma z\right) z^3 M^3. \end{aligned} \tag{61}$$

Отметим, что матрица-оператор (61) с точностью до элементарных преобразований совпадает с матрицей-оператором метода начальных функций, полученных в работе [2] более громоздким способом. Представление матрицы-оператора L в форме матрично-операторной экспоненты (54) легко позволяет найти его основные свойства. Так, например, при замене z на $-z$ получаем матрицу-оператор L^{-1}, обратную исходной. Определитель матрицы-оператора L равен

$$\operatorname{Det} L = \exp(\operatorname{Sp} Mz) = 1, \tag{62}$$

поскольку след матрицы-оператора M равен нулю. При $z = 0$ получаем оператор тождественного преобразования — единичную матрицу.

Рассмотрим слой, нагруженный только нормальным давлением: на грани $z = 0$ давлением $\sigma_z(0) = q_0$, а на грани $z = h$ $-\sigma_z(h) = q$. Не вдаваясь в подробности вычислений, приведем окончательный результат в виде дифференциального уравнения бесконечно большого порядка относительно перемещения $u_z = w$:

$$(2\gamma^2 h^2 + \cos 2\gamma h - 1)\, w = \frac{h^4}{3D}\left[\left(\frac{\sin \gamma h}{\gamma h} + \cos \gamma h\right) q - \left(1 - \frac{\sin 2\gamma h}{2\gamma h}\right) q_0\right], \quad (63)$$

где D — цилиндрическая жесткость слоя вида

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu)}. \quad (64)$$

Здесь E — модуль упругости. Уравнение (63) представим в форме разложения дифференциальных операторов в степенные ряды

$$\left[\frac{(2\gamma h)^4}{4!} - \frac{(2\gamma h)^6}{6!} + \frac{(2\gamma h)^8}{8!} - \cdots\right] w = \frac{h^4}{3D}\left[2\left(1 - 2\frac{\gamma^2 h^2}{3!} + 3\frac{\gamma^4 h^4}{5!} - \cdots\right) q - \right.$$
$$\left. - \left(2 - \frac{(2\gamma h)^2}{3!} + \frac{(2\gamma h)^4}{5!} - \cdots\right) q_0\right]. \quad (65)$$

Первое приближение получим, если сохраним по одному члену каждого ряда в этом разложении, т. е.

$$\gamma^4 w = \frac{1}{D}(q - q_0). \quad (66)$$

Это известное уравнение Жермен — Лагранжа изгиба пластин. Второе приближение дает

$$\left(1 - \frac{2}{15}\gamma^2 h^2\right)\gamma^4 w = \frac{1}{D}\left(1 - \frac{1}{3}\gamma^2 h^2\right)(q - q_0), \quad (67)$$

а третье —

$$\left(1 - \frac{2}{15}\gamma^2 h^2 + \frac{1}{105}\gamma^4 h^4\right)\gamma^4 w = \frac{1}{D}\left[\left(1 - \frac{1}{3}\gamma^2 h^2 + \frac{1}{40}\gamma^4 h^4\right) q - \right.$$
$$\left. - \left(1 - \frac{1}{3}\gamma^2 h^2 + \frac{1}{15}\gamma^4 h^4\right) q_0\right]. \quad (68)$$

Рассматривая полученные приближения, видим, что лишь в третьем приближении имеет значение факт приложения нагрузки к той или иной граничной поверхности. В первом и втором приближениях безразлично считать ли нагрузку приложенной к поверхности $z = 0$ или $z = h$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Власов В. З. Общая теория оболочек и ее приложения в технике. ГИТТЛ, М.— Л., 1949.
2. Власов В. З., Леонтьев Н. Н. Балки, плиты и оболочки на упругом основании. Физматгиз, М., 1960.
3. Кильчевский Н. А. Основы аналитической механики оболочек. Изд-во АН УССР, К., 1963.
4. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. Судпромгиз, Л., 1962.
5. Підстригач Я. С., Столяров В. О.— ДАН УРСР, 1973, 11.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию в декабре 1973 г.

ЗАДАЧА ТИПА ДИРИХЛЕ ДЛЯ СИСТЕМЫ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Б. И. Пташник

В данной работе рассматривается краевая задача типа задачи Дирихле для системы гиперболических уравнений $2n$-го порядка ($n \geqslant 1$) с постоянными коэффициентами в $(m+1)$-мерном параллелепипеде, а также установлены условия существования, единственности и корректности решения задачи.