Из теоремы 2 и леммы, доказанной в работе [5], следует теорема.

Теорема 3. *Пусть для некоторых констант* $M_1 > 0$, $M > 0$, $s_1 \geqslant 0$ *и* $s \geqslant 0$ *выполняются неравенство* (16) *и неравенства* $\lambda_j(k) \geqslant M \mid k \mid^{-s}$ ($j = 1, \ldots, ns$) *для всех (кроме конечного числа) векторов* k *с натуральными координатами и пусть* $f(t, x) \in C^{(0,N)}(\overline{R}_m)$, *где* N *— некоторое достаточно большое натуральное число. Тогда для почти всех чисел* T/π *(т. е. для почти всех параллелепипедов* $\overline{R}_m^-$*) существует решение задачи* (1), (2), *которое принадлежит классу* $C^{(2n,2n)}(\overline{R}_m)$ *и корректно относительно вектор-функции* $f(t, x)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вахания Н. Н.— ДАН СССР, 1957, **116**, 6.
2. Вирабян Г. В. Об операторах, связанных с системами дифференциальных уравнений типа С. Л. Соболева. Автореферат канд. дис. Ереван, 1965.
3. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. «Наука», М., 1969.
4. Пташник Б. И.— УМЖ, 1970, **22**, 6.
5. Пташник Б. И.— УМЖ, 1971, **23**, 4.
6. Соболев С. Л.— ДАН СССР, 1956, **109**, 4.
7. Соболев С. Л. Уравнения математической физики. Гостехиздат, М., 1954.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию в декабре 1973 г.

МАТРИЧНЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ И УРАВНЕНИЯ

П. С. Казимирский

В работе при некоторых предположениях доказана теорема существования и единственности решения матричного уравнения вида

$$A_0X^s + A_1X^{s-1} + \cdots + A_{s-1}X + A_s = 0$$
$$(X^sA_0 + X^{s-1}A_1 + \cdots + XA_{s-1} + A_s = 0), \tag{1}$$

где A_i ($i = 0, 1, 2, \ldots, s$) — матрицы порядка n над алгебраически замкнутым полем P нулевой характеристики, X — неизвестная матрица того же порядка, а также предложен метод отыскания этого решения.

Рассмотрим матричный многочлен

$$A(x) = A_0x^s + A_1x^{s-1} + \cdots + A_{s-1}x + A_s, \tag{2}$$

соответствующий матричным уравнениям (1) (см. [1]). Из множества* всех корней уравнения $\det A(x) = 0$ (обозначим его через $K_{A(x)}$) выделим подмножество

$$K = \{\underbrace{\alpha_1, \ldots, \alpha_1}_{k_1}, \underbrace{\alpha_2, \ldots, \alpha_2}_{k_2}, \ldots, \underbrace{\alpha_i, \ldots, \alpha_i}_{k_i}\},$$

состоящее из $k \leqslant n$ корней, $k = k_1 + k_2 + \ldots + k_i$, $k_j \leqslant l_j$ ($j = 1, 2, \ldots, i$), где l_j — кратность корня α_j в уравнении $\det A(x) = 0$. Обозначим через $A_*(x)$ взаимную матрицу матрицы $A(x)$, т. е. матрицу, удовлетворяющую соотношению

$$A(x)A_*(x) = A_*(x)A(x) = \det A(x)E,$$

где E — единичная матрица.

* Множество корней уравнения рассматривается здесь с учетом кратности.

Определение 1. Матрицей, соответствующей выделенному подмножеству K корней, будем называть матрицу вида

$$M_{A_*(x)}[\alpha_1^{(k_1)}, \alpha_2^{(k_2)}, \dots, \alpha_i^{(k_i)}] = \begin{Vmatrix} A_*(\alpha_1) \\ A_*'(\alpha_1) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ A_*^{(k_1-1)}(\alpha_1) \\ A_*(\alpha_2) \\ A_*'(\alpha_2) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ A_*^{(k_2-1)}(\alpha_2) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ A_*(\alpha_i) \\ A_*'(\alpha_i) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ A_*^{(k_i-1)}(\alpha_i) \end{Vmatrix}, \tag{3}$$

где $A_*^{(t)}(x)$ — производная порядка t от матрицы $A_*(x)$. Очевидно, матрица (3) имеет n столбцов и nk строк.

Теорема 1. *Для того чтобы для матричного многочлена существовала такая обратимая над P матрица R, что*

$$RA(x) = \begin{Vmatrix} E & 0 \\ 0 & F(x) \end{Vmatrix} C(x), \tag{4}$$

где $F(x) = F_0x + F_1$, $\det F_0 \neq 0$, — матрица порядка $k \leqslant n$, E — единичная матрица порядка $n - k$, и множество корней (с учетом кратности) уравнения $\det F(x) = 0$ совпадало бы с выделенным множеством K, достаточно, чтобы ранг матрицы (3) был равен k.

Доказательство. Сначала сформулируем следующие леммы.

Лемма 1. *Пусть $N(x)$ — матрица с элементами из $P[x]$ размером $m \times n$ $(m \leqslant n)$, субдетерминанты m-го порядка которой не все равны нулю. Для того чтобы субдетерминанты m-го порядка матрицы имели общим делителем многочлен $(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\dots(x - \alpha_k)$, $a_i \in P$, $i = 1, 2, \dots, k$, необходимо и достаточно, чтобы $N(x) = D_k(x) L(x)$, $\det D_k(x) = d(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\dots(x - \alpha_k)$, $d \in P$.*

Доказательство смотри в работе [4].

Лемма 2. *Пусть субдетерминанты m-го порядка матрицы $N(x)$ имеют общий делитель $(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_k)$* и пусть, далее, субдетерминанты $(m - i)$-го порядка подматрицы*

$$\begin{Vmatrix} a_{i+11}(x) & a_{i+12}(x) & \dots & a_{i+1n}(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1}(x) & a_{m2}(x) & \dots & a_{mn}(x) \end{Vmatrix} \tag{5}$$

матрицы $N(x)$ имеют общий делитель $(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\dots(x - \alpha_k)$, причем $r < k$. В этих предположениях существует такая обратимая над P матрица S, что в матрице $SN(x)$ субдетерминанты порядка $m - i + 1$, составленные из последних $m - i + 1$ строк матрицы $SN(x)$, имеют общий делитель $(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\dots(x - \alpha_r)(x - \alpha_{r+1})$.

Доказательство легко получить на основании леммы 1 (см. работу [4]).

Заметим, что если ранг матрицы $M_{A_*(x)}[\alpha_1^{(k_1)}, \dots, \alpha_i^{(k_i)}]$ равен $k \leqslant n$,

* Корни полинома $(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\dots(x - \alpha_k)$, как и в предыдущей лемме, не обязательно простые.

то какой бы ни была обратимая над P матрица Q матрица $A_*(x)\,Q$ не может содержать больше чем $n-k$ столбцов, все элементы которых делятся на полином

$$(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\dots(x-\alpha_l)^{k_l},\quad k_1+k_2+\dots+k_l=k. \tag{6}$$

Пусть R_1 — обратимая над P матрица такая, что

$$R_1A(x)=\begin{Vmatrix}1 & & & 0\\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & x-\alpha_1\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}a_{11}(x) & \dots & a_{1n}(x)\\ \dots & \dots & \dots\\ a_{n-11}(x) & \dots & a_{n-1n}(x)\\ a'_{n1}(x) & \dots & a''_{nn}(x)\end{Vmatrix}=B_1(x)\,A_1(x). \tag{7}$$

Очевидно, ни один из выделенных k корней уравнения $\det A(x)=0$ не обращает в нуль последнюю строку матрицы $A_1(x)$. В противном случае, учитывая замечание, сделанное вначале этого доказательства, и лемму 2, мы получили бы, что ранг матрицы $M_{A_*(x)}[\alpha_1^{(k_1)},\dots,\alpha_l^{(k_l)}]$ меньше n, что противоречит условию теоремы.

Теперь можно утверждать, что существует обратимая над P матрица R_2, такая, что

$$R_2R_1A(x)=\begin{Vmatrix}1 & & & & 0\\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & x-\alpha_2 & s\\ 0 & & & 0 & x-\alpha_1\end{Vmatrix}A_2(x),\quad s\in P.$$

Очевидно, все субдетерминанты второго порядка, составленные из элементов последних двух строк матрицы $A_2(x)$, не обращаются в нуль никаким из выделенных k корней, в противном случае, учитывая лемму 2, мы получили бы противоречие с условием теоремы.

Пусть уже построены такие обратимые над P матрицы $R_1, R_2, \dots, R_l$, $l<k$, что

$$R_l\dots R_2R_1A(x)=\begin{Vmatrix}1 & & & 0 & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & 0 & \dots & 0\\ & & 0 & & & \\ 0 & & \vdots & & B_l(x) & \\ & & 0 & & & \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}a_{11}(x) & \dots & a_{1n}(x)\\ \dots & \dots & \dots\\ a_{n-l1}(x) & \dots & a_{n-ln}(x)\\ a'_{n-l+11}(x) & \dots & a'_{n-l+1n}(x)\\ \dots & \dots & \dots\\ a'_{n1}(x) & \dots & a'_{nn}(x)\end{Vmatrix}, \tag{8}$$

где коэффициент при старшей степени матрицы $B_l(x)$ обратим и все субдетерминанты l-го порядка, составленные из элементов последних строк второй матрицы соотношения (8), не обращаются в нуль ни одним из выделенных k корней.

На основании леммы 2 и рассуждений, использованных при доказательстве существования матриц R_1 и R_2, заключаем, что существует такая, обратимая над P матрица R_{l+1}, что

$$R_{l+1}R_l\dots R_2R_1A(x)=\begin{Vmatrix}1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & 1 & & & \\ & & x-\alpha_{l+1} & s_2 & \dots & s_{l+1}\\ & 0 & 0 & & & \\ & & \vdots & & B_l(x) & \\ & & 0 & & & \end{Vmatrix}A_{l+1}(x).$$

Продолжая так шаг за шагом, получаем требуемое разложение, что и требовалось доказать.

Определение 2. Корень α уравнения $\det A(x) = 0$ будем называть корнем $n - 1$-го ранга, если ранг $A(\alpha)$ равен $n - 1$. Множество (с учетом кратности) всех корней ранга $n - 1$ обозначим через $S^{(n-1)}$.

Лемма 3. *Если существует обратимая над P матрица R такая, что*

$$RA(x) = \left\| \begin{matrix} E & 0 \\ 0 & F(x) \end{matrix} \right\| C(x), \tag{9}$$

где $F(x) = F_0 x + F_1$, $\det F_0 \neq 0$*—матрица порядка* $k \leqslant n$, E *— единичная матрица порядка* $n - k$, *причем* $K_{F(x)} \cap K_{C(x)} = \varnothing$ *, *то ранг матрицы, соответствующей множеству всех корней уравнения* $\det F(x) = 0$ (*т. е. некоторому подмножеству множества* $K_{A(x)}$), *равен* k.

Доказательство. Пусть

$$\det F(x) = (x - \alpha_1)^{k_1} (x - \alpha_2)^{k_2} \ldots (x - \alpha_i)^{k_i}, \quad k_1 + k_2 + \cdots + k_i = k.$$

Очевидно,

$$\operatorname{rang} M_{A_*(x)} [\alpha_1^{(k_1)}, \alpha_2^{(k_2)}, \ldots, \alpha_i^{(k_i)}] = \operatorname{rang} M_{A_*(x)R_*} [\alpha_1^{(k_1)}, \alpha_2^{(k_2)}, \ldots, \alpha_i^{(k_i)}],$$

где $A_*(x) R_*$ — взаимная матрица матрицы $RA(x)$.

На основании выражения (9)

$$A_*(x) R_* = C_*(x) \left\| \begin{matrix} E \det F(x) & 0 \\ 0 & F_*(x) \end{matrix} \right\|, \tag{10}$$

где $F_*(x)$ — взаимная матрица матрицы $E(x)$. Учитывая формулу (10) и предыдущее замечание, видим, что

$$\operatorname{rang} M_{A_*(x)} [\alpha_1^{(k_1)}, \ldots, \alpha_i^{(k_i)}] \leqslant k.$$

Если бы $\operatorname{rang} M_{A_*(x)} [\alpha_1^{(k_1)}, \ldots, \alpha_i^{(k_i)}] < k$, то это означало бы, что существует такая обратимая над P матрица Q, что матрица $A_*(x) R_* Q$ имела бы число столбцов, делящихся на многочлен $(x - \alpha_1)^{k_1} \ldots (x - \alpha_i)^{k_i}$, больше $n - k$. Но это невозможно, так как, умножая соотношение (10) справа на Q и слева на $C(x)$ и учитывая, что $K_{F(x)} \cap K_{C(x)} = \varnothing$, мы убедились бы в существовании такой обратимой над P матрицы Q_k порядка k, что $F_*(x) Q_k$ содержит столбец, все элементы которого делятся на $\det F(x)$, что противоречит условию ($\det F_0 \neq 0$) леммы.

Лемма 4. *Если существует обратимая над P матрица R такая, что*

$$RA(x) = \left\| \begin{matrix} E & 0 \\ 0 & F(x) \end{matrix} \right\| C(x), \tag{11}$$

где $F(x) = F_0 x + F_1$, $\det F_0 \neq 0$,— *матрица порядка* k, E — *единичная матрица порядка* $n - k$, *причем* $\det F(x) = (x - \alpha_1)^{k_1} (x - \alpha_2)^{k_2} \ldots (x - \alpha_i)^{k_i}$, $k_1 + \ldots + k_i = k$, *то*

$$\operatorname{rang} M_{A_*(x)} [\alpha_1^{(k_1)}, \ldots, \alpha_i^{(k_i)}] = \operatorname{rang} M_{A_2(x)} [\alpha_1^{(k_1)}, \ldots, \alpha_i^{(k_i)}],$$

где $A_2(x) = A_*(x) (E, Ex)$.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что матрица $F(x)$ имеет вид $F(x) = Ex + F_1$. Учитывая соотношение (11), имеем

$$A_*(x) R_* = C_*(x) \left\| \begin{matrix} E \det F(x) & 0 \\ 0 & F_*(x) \end{matrix} \right\|.$$

---

* $K_{F(x)}, K_{C(x)}$ — множества всех корней уравнений $\det F(x)$, $\det C(x) = 0$ соответственно.

Умножив $A_*(x)R_*$ слева на

$$\begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E^{(k)} \end{Vmatrix} x - \begin{Vmatrix} E^{(n-k)} & 0 \\ 0 & F \end{Vmatrix},$$

$E^{(k)}$ — единичная матрица порядка k, получим

$$A_*(x)R_*\left[\begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E^{(k)} \end{Vmatrix} x - \begin{Vmatrix} E^{(n-k)} & 0 \\ 0 & F \end{Vmatrix}\right] = C_*(x)\det F(x). \qquad (12)$$

Подставляя в тождество (12) корни $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ и беря соответствующее количество производных в случае их кратности, получаем

$$M_{A_*(x)R_*x}[\alpha_1^{(k_1)}, \ldots, \alpha_l^{(k_l)}]\begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E^{(k)} \end{Vmatrix} - M_{A_*(x)R_*}[\alpha_1^{(k_1)}, \ldots, \alpha_l^{(k_l)}]\begin{Vmatrix} E^{(n-k)} & 0 \\ 0 & F \end{Vmatrix} = 0.$$

Учитывая строение матриц $M_{A_*(x)R_*}[\alpha_1^{(k_1)}, \ldots, \alpha_l^{(k_l)}]$ и $\begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E^{(k)} \end{Vmatrix}$ заметим, что

$$M_{A_*(x)R_*x}[\alpha_1^{(k_1)}, \ldots, \alpha_l^{(k_l)}]\begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E^{(k)} \end{Vmatrix} = M_{A_*(x)R_*x}[\alpha_1^{(k_1)}, \ldots, \alpha_l^{(k_l)}],$$

т. е. имеет место тождество

$$M_{A_*(x)R_*x}[\alpha_1^{(k_1)}, \ldots, \alpha_l^{(k_l)}] - M_{A_*(x)R_*}[\alpha_1^{(k_1)}, \ldots, \alpha_l^{(k_l)}]\begin{Vmatrix} E^{(n-k)} & 0 \\ 0 & F \end{Vmatrix} = 0.$$

Это значит, что матричное уравнение

$$M_{A_*(x)R_*}[\alpha_1^{(k_1)}, \ldots, \alpha_l^{(k_l)}]X = M_{A_*(x)xR_*}[\alpha_1^{(k_1)}, \ldots, \alpha_l^{(k_l)}],$$

где X — неизвестная квадратная матрица n-го порядка, разрешимо, т. е.

$$\operatorname{rang} M_{A_*(x)R_*}[\alpha_1^{(k_1)}, \ldots, \alpha_l^{(k_l)}] =$$
$$= \operatorname{rang}\| M_{A_*(x)R_*}[\alpha_1^{(k_1)}, \ldots, \alpha_l^{(k_l)}], \quad M_{A_*(x)R_*x}[\alpha_1^{(k_1)}, \ldots, \alpha_l^{(k_l)}]\|. \qquad (13)$$

Так как R_* — обратимая матрица, то

$$\operatorname{rang} M_{A_*(x)R_*}[\alpha_1^{(k_1)}, \ldots, \alpha_l^{(k_l)}] = \operatorname{rang} M_{A_*(x)}[\alpha_1^{(k_1)}, \ldots, \alpha_l^{(k_l)}]$$

и

$$\operatorname{rang}\| M_{A_*(x)R}[\alpha_1^{(k_1)}, \ldots, \alpha_l^{(k_l)}], \quad M_{A_*(x)R_*x}[\alpha_1^{(k_1)}, \ldots, \alpha_l^{(k_l)}]\| =$$
$$= \operatorname{rang}\| M_{A_*(x)}[\alpha_1^{(k_1)}, \ldots, \alpha_l^{(k_l)}], \quad M_{A_*(x)x}[\alpha_1^{(k_1)}, \ldots, \alpha_l^{(k_l)}]\|.$$

Откуда, учитывая соотношение (13), видно, что лемма 4 доказана.

Лемма 5. *Пусть задана пара матриц*

$$Q(k) = \begin{Vmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ \vdots \\ B_k \end{Vmatrix}, \quad Q^*(k) = \begin{Vmatrix} B_1 & sB_1 \\ B_2 & sB_2 + B_1 \\ B_3 & sB_3 + 2B_2 \\ \ldots & \ldots \\ B_k & sB_k + (k-1)B_{k-1} \end{Vmatrix}, \qquad (14)$$

где B_i ($i = 1, 2, \ldots, k$)— произвольные матрицы порядка n над P, причем $\operatorname{rang} B_1 = 1$. *Если* $\operatorname{rang} Q(k) = \operatorname{rang} Q^*(k)$, $k \leqslant n$, *то* $\operatorname{rang} Q(k) \geqslant k$.

Доказательство. Умножив вторую матрицу из соотношений (14) слева на $R_1 = \begin{Vmatrix} E & -sE \\ 0 & E \end{Vmatrix}$, E — единичная матрица n-го порядка, получим матрицу

$$Q^*(x)R_1 = \begin{Vmatrix} B_1 & 0 \\ B_2 & B_1 \\ B_3 & 2B_2 \\ \ldots & \ldots \\ B_k & (k-1)B_{k-1} \end{Vmatrix}. \qquad (15)$$

Очевидно,

$$\operatorname{rang} Q(k) = \operatorname{rang} Q^*(k) R_1. \tag{16}$$

Предположим, что при $k - 1$ лемма справедлива (при $k = 1$ лемма справедлива). Тогда из соотношения (16) на основании теоремы Кронекера — Капелли следует, что

$$\operatorname{rang} \begin{Vmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ \vdots \\ B_{k-1} \end{Vmatrix} = \operatorname{rang} \begin{Vmatrix} B_1 & 0 & \\ B_2 & B_1 & \\ B_3 & B_2 & \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ B_{k-1} & (k-2) & B_{k-1} \end{Vmatrix}.$$

В силу нашего предположения

$$\operatorname{rang} \begin{Vmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ \vdots \\ B_{k-1} \end{Vmatrix} \geqslant k - 1. \tag{17}$$

Так как

$$\operatorname{rang} \begin{Vmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_{k-1} \end{Vmatrix} = \operatorname{rang} \begin{Vmatrix} B_1 \\ 2B_2 \\ \vdots \\ (k-1) B_{k-1} \end{Vmatrix},$$

то на основании матрицы (15) и соотношения (17) заключаем ($\operatorname{rang} B_1 = 1$), что $\operatorname{rang} Q^*(k) R = k$. Учитывая равенство (16), видим, что лемма 5 доказана.

Теорема 2. *Если для матричного многочлена* (2) *существует матрица* R *такая, что*

$$RA(x) = \begin{Vmatrix} E & 0 \\ 0 & F(x) \end{Vmatrix} C(x), \tag{18}$$

где $F(x) = F_0(x) + F_1$, $\det F_0 \neq 0$,— матрица порядка $k \leqslant n$, E — *единичная матрица порядка* $n - k$, *и* $\det F(x) = (x - \alpha_1)^{k_1} \ldots (x - \alpha_i)^{k_i}$ *(*i *— число различных корней), причем* $K_{F(x)} \cap K_{C(x)} \subseteq S^{(n-1)}$, *то*

$$\operatorname{rang} M_{A_*(x)} [\alpha_1^{(k_1)}, \ \ldots, \ \alpha_i^{(k_i)}] = k, \quad k = k_1 + k_2 + \cdots + k_i.$$

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что подматрица $F(x)$ в соотношении (18) имеет квазидиагональный вид:

$$F(x) = \begin{Vmatrix} F_1(x) & & & & 0 \\ & F_2(x) & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ 0 & & & & F_i(x) \end{Vmatrix},$$

где F_j — линейный матричный двучлен порядка k_j:

$$\det F_j(x) = (x - \alpha_j)^{k_j}, \qquad j = 1, 2, \ldots, i, \tag{19}$$

а $A_*(x)R_*$ будет иметь вид

$$A_*(x)R_* = C_*(x)\begin{Vmatrix} E\det F(x) & & & & 0 \\ & F_{1*}(x)\dfrac{\det F(x)}{\det F_1(x)} & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ 0 & & & & F_{i*}(x)\dfrac{\det F(x)}{\det F_i(x)} \end{Vmatrix}.$$

Рассмотрим матрицу $M_{A_*(x)R_*}[\alpha_j^{(k_j)}]$, $j = 1, 2, \ldots, i$. Если α_j не является корнем уравнения $\det C(x) = 0$, то на основании леммы 3

$$\operatorname{rang} M_{A_*(x)R_*}[\alpha_j^{(k_j)}] = k_j.$$

Если α_j есть корень уравнения $\det C(x) = 0$, то на основании условия леммы $\alpha_j \in S^{(n-1)}$, т. е. $\operatorname{rang} A_*(\alpha_j)R_* = 1$. Используя теперь леммы 4 и 5 убеждаемся, что $\operatorname{rang} M_{A_*(x)R_*}[\alpha_j^{(k_j)}] \geqslant k_j$. Так как на основании выражения матрицы $A_*(x)R$ в виде (19) только k_j столбцов в матрице $M_{A_*(x)R_*}[\alpha_j^{(k_j)}]$ отличны от нуля, то $\operatorname{rang} M_{A_*(x)R_*}[\alpha_j^{(k_j)}] = k_j$. Учитывая предыдущее предложение и вид (19) матрицы $A_*(x)R_*$ заключаем, что

$$\operatorname{rang} M_{A_*(x)R_*}[\alpha_1^{(k_1)}, \ldots, \alpha_i^{(k_i)}] = \operatorname{rang} M_{A_*(x)Q}[\alpha_1^{(k_1)}] + \operatorname{rang} M_{A_*(x)R_*}[\alpha_2^{(k_2)}] + \cdots$$
$$\cdots + \operatorname{rang} M_{A^*(x)R_*}[\alpha_i^{(k_i)}] = k_1 + k_2 + \cdots + k_i = k.$$

Так как

$$\operatorname{rang} M_{A_*(x)R_*}[\alpha_1^{(k_1)}, \ldots, \alpha_i^{(k_i)}] = \operatorname{rang} M_{A_*(x)}[\alpha_1^{(k_1)}, \ldots, \alpha_i^{(k_i)}],$$

то этим теорема 2 доказана.

Из теорем 1 и 2 вытекает следующий результат.

Теорема 3. *Для того чтобы для матричного многочлена (2) существовала обратимая над P матрица R такая, что*

$$RA(x) = \begin{Vmatrix} E & 0 \\ 0 & F(x) \end{Vmatrix} C(x), \tag{20}$$

где $F(x) = F_0x + F_1$, $\det F_0 \neq 0$, — матрица порядка $k \leqslant n$, E — единичная матрица порядка $n - k$, и множество корней (с учетом их кратности) уравнения $\det F(x) = 0$ совпадало с выделенным множеством K, причем $K \cap (K_{A(x)} \setminus K) \subseteq S^{(n-1)}$, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы (3) был равен k.

Следствие 1. Для того чтобы матричный многочлен (2) можно было представить в виде

$$A(x) = B(x)C(x), \tag{21}$$

где $B(x) = B_0x + B_1$, $\det B_0 \neq 0$ и множество корней (с учетом их кратности) уравнения $\det B(x) = 0$ совпадало бы с выделенным множеством K ($k = n$), причем $K_{B(x)} \cap K_{C(x)} \subseteq S^{(n-1)}$, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы (3) (при $k = n$) был равен n.

Следствие 2. Пусть из множества корней уравнения $\det A(x) = 0$ могут быть выделены n корней (с учетом их кратности), отличных от остальных корней этого уравнения. Для существования в этих предположениях матрицы $B(x) = B_0x + B_1$, $\det B_0 \neq 0$, корни детерминанта которой совпадали бы с выделенными n корнями и которая делила бы матрицу $A(x)$ слева, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы, которая соответствует множеству K ($k = n$) выделенных корней, был равен n.

Без ограничения общности можно считать, что в соотношении (21) $B(x) = Ex - B$, т. е.

$$A(x) = (Ex - B)\,C(x), \tag{22}$$

$$\det(Ex - B) = (x - \alpha_1)^{k_1}(x - \alpha_2)^{k_2}\ldots(x - \alpha_l)^{k_l},\quad k_1 + k_2 + \cdots + k_l = n.$$

Тогда

$$A_*(x) = C_*(x)\,(Ex - B)_*. \tag{23}$$

Умножив соотношение (23) справа на $Ex - B$, получим

$$A_*(x)\,x - A_*(x)\,B = C_*(x)\det(Ex - B). \tag{24}$$

Подставляя в тождество (24) корни $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ и беря соответствующее количество производных в случае их кратности, получаем

$$M_{A_*(x)}[\alpha_1^{(k_1)}, \ldots, \alpha_l^{(k_l)}]\,B = M_{A_*(x)x}[\alpha_1^{(k_1)}, \ldots, \alpha_l^{(k_l)}]. \tag{25}$$

Учитывая соотношение (25) и теорему 1, получаем следующий результат.

Теорема 3'. *Если* $\operatorname{rang} M_{A_*(x)}[\alpha_1^{(k_1)}, \ldots, \alpha_l^{(k_l)}] = n$, *то матрица* B *в соотношении* (22) *может быть найдена как единственное решение матричного уравнения*

$$M_{A_*(x)}[\alpha_1^{(k_1)}, \alpha_2^{(k_2)}, \ldots, \alpha_l^{(k_l)}]\,X = M_{A_*(x)x}[\alpha_1^{(k_1)}, \ldots, \alpha_l^{(k_l)}].$$

На основании обобщенной теоремы Безу (см. [1]) и теорем 1 и 3' получаем следующий результат.

Теорема 4. *Для того чтобы матричное уравнение* (1) *вида*

$$X^sA_0 + X^{s-1}A_1 + \cdots + XA_{s-1} + A_s = 0,$$

где A_i $(i = 0, 1, 2, \ldots, s)$ — *квадратные матрицы над* P, *имело решение с наперед заданным множеством характеристических чисел*

$$K = \{\underbrace{\alpha_1, \ldots, \alpha_1}_{k_1}, \underbrace{\alpha_2, \ldots, \alpha_2}_{k_2}, \ldots, \underbrace{\alpha_l, \ldots, \alpha_l}_{k_l}\},$$

$k_1 + k_2 + \ldots + k_l = n$ *(очевидно,* $K \subseteq K_{A(x)}$; $A(x)$ — *матричный многочлен* (2), *соответствующий матричному уравнению* (1)), *достаточно, чтобы* $\operatorname{rang} M_{A_*(x)}[\alpha_1^{(k_1)}, \ldots, \alpha_l^{(k_l)}]$ *был равен* n. *Это решение единственно и может быть найдено из уравнения*

$$M_{A_*(x)}[\alpha_1^{(k_1)}, \ldots, \alpha_l^{(k_l)}]\,X = M_{A_*(x)x}[\alpha_1^{(k_1)}, \ldots, \alpha_l^{(k_l)}].$$

Учитывая теоремы 3' и 4 легко убедиться в справедливости следующей теоремы.

Теорема 5. *Для того чтобы матричное уравнение* (1) *вида*

$$X^sA_0 + X^{s-1}A_1 + \cdots + XA_{s-1} + A_s = 0,$$

где A_i $(i = 0, 1, 2, \ldots, s)$ — *квадратные матрицы над* P, *имело решение с наперед заданным множеством характеристических чисел*

$$K = \{\underbrace{\alpha_1, \ldots, \alpha_1}_{k_1}, \underbrace{\alpha_2, \ldots, \alpha_2}_{k_2}, \ldots, \underbrace{\alpha_l, \ldots, \alpha_l}_{k_l}\},$$

$k_1 + k_2 + \cdots + k_l = n$ *(очевидно,* $K \subseteq K_{A(x)}$; $A(x)$ — *матричный многочлен* (2), *соответствующий матричному уравнению* (1)), *причем* $K \cap \cap (K_{A(x)} \setminus K) \subseteq S^{(n-1)}$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\operatorname{rang} M_{A_*(x)}[\alpha_1^{(k_1)}, \ldots, \alpha_l^{(k_l)}]$$

был равен n. *Это решение единственно и может быть найдено из уравнения*

$$M_{A_*(x)}[\alpha_1^{(k_1)}, \ldots, \alpha_l^{(k_l)}]\,X = M_{A_*(x)x}[\alpha_1^{(k_1)}, \ldots, \alpha_l^{(k_l)}].$$

З а м е ч а н и е. Результаты, сформулированные теоремами 4 и 5, относятся к уравнению

$$X^s A_0 + X^{s-1} A_1 + \cdots + X A_{s-1} + A_s = 0$$

и получены в основном благодаря исследованию свойств левых линейных делителей матричного многочлена $A(x)$. Аналогичные результаты можно получить относительно уравнения вида

$$A_0 X^s + A_1 X^{s-1} + \cdots + A_{s-1} X + A_s = 0. \qquad (26)$$

Для этого нужно исследовать условия выделяемости линейного множителя из матричного многочлена $A(x)$ справа. Изменения, которые нужно сделать в рассуждениях, очевидны. Так, например, вместо матрицы $A_2(x)$, которая вводится леммой 4, следует рассматривать матрицу

$$\left\| \begin{matrix} E \\ Ex \end{matrix} \right\| A_*(x),$$

а вместо матрицы $M_{A_*(x)}[\alpha_1^{(k_1)}, \ldots, \alpha_i^{(k_i)}]$, которая вводится определением 1, следует рассматривать матрицу

$$N_{A_*(x)}[\alpha_1^{(k_1)}, \ldots, \alpha_i^{(k_i)}] =$$

$$= \| A_*(\alpha_1) A_*'(\alpha_1) \ldots A_*^{(k_1-1)}(\alpha_1) A_*(\alpha_2) A_*'(\alpha_2) \ldots A_*^{(k_2-1)}(\alpha_2) \ldots$$

$$\ldots A_*(\alpha_i) A_*'(\alpha_i) \ldots A_*^{(k_i-1)}(\alpha_i) \|,$$

т. е. для получения матрицы, соответствующей некоторому подмножеству выделенных корней, блоки (при подстановке корней) нужно размещать не вертикально, а горизонтально. Еще проще, воспользовавшись операцией транспонирования, свести случай уравнения (26) к предшествующему.

Следствие 3. Если матрица B является решением матричного уравнения (1), причем $K \cap (K_{A(x)} \setminus K) \subseteq S^{(n-1)}$, где K — множество всех характеристик корней (с учетом кратности) матрицы B, то это решение единственно.

Следствие 4. Если уравнение $\det A(x) = 0$ имеет лишь простые корни, то всякое решение уравнения (1) с определенным множеством характеристических чисел единственно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г а н т м а х е р Ф. Р. Теория матриц. Физматгиз, М.— Л., 1954.
2. К а з и м и р с к и й П. С.— УМЖ, 1965, 5, 115.
3. К а з и м и р с к и й П. С.— УМЖ, 1972, 24, 3, 316.
4. К а з и м и р с к и й П. С. — Вісн. Львівського політехнічного ін-ту, 1965, 8.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию в сентябре 1973 г.

ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ И ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ В ВИДЕ ВЕТВЯЩИХСЯ ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ

П. И. Боднарчук, Х. И. Кучминская

Понятие ветвящейся цепной дроби играет по отношению к функциям многих переменных такую же роль, как обыкновенная цепная дробь по отношению к функции одного переменного. Вследствие этого возникает задача аппроксимации функций с многими аргументами ветвящимися цепными дробями.