34. Семерак Ф. В.— Автореферат канд. дис., Львов, 1973.
35. Семерак Ф. В.— В кн.: Математические методы и физико-механические поля, 1. «Наукова думка», К., 1975.
36. Скородинский В. А.— В кн.: Некоторые вопросы прикладной математики, 5. Изд. Ин-та математики АН УССР, К., 1971.
37. Скородинський В. А.— У кн.: Лiсова, паперова i деревообробна промисловiсть, 8. «Будiвельник», К., 1971.
38. Скородинский В. А.— Автореферат канд. дис., Львов, 1972.
39. Хомякевич Е. П.— Тезисы докладов XII Научного совещания по тепловым напряжениям в элементах конструкций, К., 1972.
40. Хомякевич Е. П.— В кн.: Аналитические методы в теории фильтрации и теплопроводности. Изд. Ин-та математики АН УССР, К., 1973.
41. Чебан В. Г., Сучеван В. Г.— В кн.: Прикладная математика и программирование, 5. «Штиинца», Кишинев, 1971.
42. Шачнев В. А. О новых результатах в теории сопряженной термоупругости. Приложение к книге [30].
43. Штер И. М.— ИФЖ, 1972, **23**, 3.
44. Штер И. М.— ИФЖ, 1973, **24**, 4.
45. Штер И. М.— ИФЖ, 1973, **25**, 4.
46. Энгельбрехт Ю. К.— Изв. АН ЭССР. Сер. физ.-мат. наук, 1973, **22**, 2.
47. Achenbach J. D.— J. Mech. Phys. Solids, 1968, **16**, 4.
48. Kaliski S.— Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. Techn, 1965, **13**, 5.
49. Kaliski S.— Proc. of vibr. problems. Polish. Acad. Sci., 1965, **6**, 3.
50. Kaliski S., Nowacki W.—Bull. Acad. Polon. Sci., Serie Sci. Techn., 1969, **17**, 6.
51. Lord H. W., Shulman Y.— J. Mech. Phys. Sol., 1967, **15**, 5.
52. Lord H. W., Lopez A. A.— Acta mechanica, 1970, **10**, 1, 2.
53. Mc. Carthy Matthew F.— Int. J. Eng. Sci., 1972, **10**, 7.
54. Nayfeh Adnan H.— Z. angew. Math. Phys., 1972, **23**, 1.
55. Norwood F. R., Warren W. E.— Ouart. J. Mech. Appl. Math., 1969, **22**, 3.
56. Singh H., Singh A.— Pure Appl. Geophys, 1972, **101**, 9.
57. Tokuoka Tatsuo.— Trans. Jap. Soc. Aeronaut. Space Sci., **16**, 32.
58. Wadhawan M. C.— Pure Appl. Geophys., 1972, **99**, 7.
59. Wadhawan M. C.— Pure Appl. Geophys., 1973, **102**, 1.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию в январе 1974 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В СОБСТВЕННЫХ ПОЛУПРОВОДНИКАХ

Я. И. Бурак, Б. П. Галапац, Р. А. Пеленский

В беспримесных полупроводниковых телах, которые находятся под воздействием силовых нагрузок, температурных и электромагнитных полей, наряду с процессами деформации, теплопроводности, электропроводности и поляризации необходимо учитывать процессы перехода электронов из валентной зоны в зону проводимости, вызывающие изменение концентрации свободных носителей заряда. Количественное описание названных процессов в их взаимосвязи возможно методами термодинамики неравновесных процессов на основе рассмотрения конкретных феноменологических моделей механики сплошной среды. Общие методы построения таких моделей с расширенными физико-механическими свойствами разработаны Л. И. Седовым [5, 6]. Конкретные модели неполяризованного электропроводного тела рассматривались в работах [1, 3, 4].

В настоящей работе рассмотрена простейшая модель деформируемого беспримесного изотропного полупроводника, описывающая у взаимосвязи процессы деформации, теплопроводности, электропроводности, поляризации и перехода электронов из связанного состояния в свободное.

Параметры термодинамического состояния модели. Уравнения состояния. Рассматривается упругий собственный полупроводник, который находится под воздействием внешних силовых нагрузок, температурных и электромагнитных полей. В естественном состоянии полупроводник изотропный, однородный и макроскопически электронейтральный.

Принимается, что электрическая система физически бесконечно малого элемента полупроводника состоит из положительно заряженной решетки, в которой сосредоточена вся масса, связанных и свободных электронов. Под влиянием внешних воздействий в полупроводнике, наряду с процессами деформации, теплопроводности и электропроводности рассматриваются процессы перехода связанных электронов в свободные (диссоциации) и поляризации. Намагниченностью в системе координат, связанной с центром масс элемента тела, пренебрегаем.

В качестве параметров локального термодинамического состояния, соответствующих процессам деформации, теплопроводности и поляризации, примем тензор напряжений $\hat{\sigma}$ — тензор деформации $\hat{e}$; температуру T — удельную энтропию S; вектор напряженности электрического поля $\vec{E}'$ — поляризацию $\vec{P}'$. Отметим, что $\vec{E}'$, $\vec{P}'$ измеряются относительно центра масс рассматриваемого физически бесконечно малого элемента тела, движущегося со скоростью $\vec{v}$.

При выборе параметров, необходимых для описания процессов диссоциации и электропроводности, будем исходить из представлений о механизме образования свободных зарядов полупроводника. При температурах, близких к абсолютному нулю, практически все электроны необхолимо рассматривать как связанные с ядрами. Для перевода валентных электронов в электроны проводимости необходимо сообщить им определенную энергию [2]. Энергию, необходимую для перевода единицы заряда из связанного состояния в свободное, будем называть потенциалом диссоциации. Величина потенциала диссоциации зависит от структуры полупроводника и изменяется с изменением других параметров термодинамического состояния, в частности, с деформацией, температурой и т. д.

В связи с тем, что величина локального заряда электронов, перешедших в свободное состояние в единице массы полупроводника, определяется соответствующим приращением потенциала диссоциации, естественно за параметры термодинамического состояния, характеризующие процесс диссоциации, принять приращение потенциала диссоциации f и заряд N^- электронов, перешедших в свободное состояние в единице массы.

Появляющийся вследствие диссоциации заряд электронов N^- равен по величине и обратный по знаку заряду образовавшихся дырок N^+. Под воздействием внешних силовых, температурных и электромагнитных полей имеет место направленное перераспределение свободных электронов и дырок. В дальнейшем будем пренебрегать влиянием неоднородности полей деформации и температуры на перераспределение дырок. При этом за параметры состояния, соответствующие процессу электропроводности, примем, согласно работе [4], электрический потенциал Φ и электрический заряд ω единицы массы.

Таким образом, собственный полупроводник можно рассматривать как термодинамическую систему, локальное состояние которой характеризуется параметрами: $\hat{\sigma} = \{\sigma_{ij}\}$, $\hat{e} = \{e_{ij}\}$, S, T, Φ, ω, f, N^-, $\vec{E}'$, $\vec{P}'$. За начальное состояние такой системы примем естественное ее состояние ($\sigma_{ij} = 0$, $e_{ij} = 0$, $T = T_0$, $S = S_0$, $\Phi = \Phi_0$, $\omega = 0$, $f = 0$, $N^- = N_0^-$, $\vec{E}' = 0$, $\vec{P}' = 0$) и в дальнейшем ограничимся малыми отклонениями от начального состояния.

Термодинамическое состояние физически бесконечно малого элемента будем определять внутренней энергией U (S, e_{ij}, ω, N^-, P_i') единицы массы тела, приращение которой дается соотношением Гиббса

$$dU = TdS + \frac{1}{\rho}\sigma_{ij}de_{ij} + \Phi d\omega + fdN^- + E_i'dP_i', \qquad (1)$$

где ρ — плотность тела. Соотношение (1), записанное относительно удельной свободной энергии $F = U - TS - \omega\Phi - N^- f$, примет вид

$$dF = -SdT + \frac{1}{\rho}\sigma_{ij}de_{ij} - \omega d\Phi - N^- df + E_i' dP_i'. \quad (2)$$

Раскладывая функцию F в ряд в окрестности начального состояния и ограничиваясь квадратичным приближением относительно приращений, получаем

$$F = F_0 - S_0 t - \frac{c}{2T_0}t^2 + \frac{1}{2\rho}\left(K - \frac{2}{3}G\right)e^2 - \frac{C}{2}\varphi^2 - N_0^- f - \frac{b}{2}f^2 -$$
$$- \frac{\alpha K}{\rho}te + \gamma C t\varphi + bltf - \frac{\beta K}{\rho}e\varphi - \frac{\delta K}{\rho}ef -$$
$$- \frac{m}{\rho}\varphi f + \frac{G}{\rho}e_{\alpha\beta}e_{\alpha\beta} + \frac{\rho}{2a\varepsilon_0}P_\alpha' P_\alpha', \quad (3)$$

где F_0 — свободная энергия единицы массы в начальном состоянии; $e = e_{\alpha\alpha}$, $t = T - T_0$, $\varphi = \Phi - \Phi_0$; $c = T_0\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)_{e,\varphi,f}$ — удельная теплоемкость при фиксированных e, φ, f; $\alpha = \left(\frac{\partial e}{\partial t}\right)_{\sigma_{\alpha\alpha},\varphi,f}$ — температурный коэффициент объемного расширения при фиксированных $\sigma_{\alpha\alpha}$, φ, f; $K = \frac{1}{3}\left(\frac{\partial\sigma_{\alpha\alpha}}{\partial e}\right)_{t,\varphi,f}$ — изотермический модуль объемного сжатия; $G = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial e_{ij}}\right)_{i\neq j}$ — модуль сдвига; $C = \left(\frac{\partial\omega}{\partial\varphi}\right)_{t,e,f}$ — изотермическая удельная электроемкость; $\beta = \left(\frac{\partial e}{\partial\varphi}\right)_{\sigma_{\alpha\alpha},t,f}$ — электрострикционный коэффициент объемного расширения; $\gamma = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_{\omega,e,f}$ — температурный коэффициент изменения электрического потенциала; $\delta = \left(\frac{\partial e}{\partial f}\right)_{\sigma_{\alpha\alpha},t,\varphi}$ — диссоциативный коэффициент объемного расширения; $b = \left(\frac{\partial N^-}{\partial f}\right)_{t,e,\varphi}$ — диссоциативная удельная электроемкость; $l = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{N^-,e,\varphi}$ — температурный коэффициент изменения потенциала диссоциации; $m = -\rho C\left(\frac{\partial\varphi}{\partial f}\right)_{\omega,t,e}$ — коэффициент, характеризующий изменение электрического потенциала с потенциалом диссоциации; a — коэффициент, характеризующий поляризуемость тела. Из соотношения (2), используя выражение (3), находим уравнения состояния

$$s = S - S_0 = \frac{c}{T_0}t + \frac{\alpha K}{\rho}e - \gamma C\varphi - blf, \quad (4)$$
$$\sigma_{ij} = \left[\left(K - \frac{2}{3}G\right)e - \alpha Kt - \beta K\varphi - \delta Kf\right]\sigma_{ij} + 2Ge_{ij},$$
$$\omega = C\varphi - \gamma Ct + \frac{\beta K}{\rho}e + \frac{m}{\rho}f,$$
$$n \equiv N^- - N_0^- = b(f - lt) + \frac{\delta K}{\rho}e + \frac{m}{\rho}\varphi,$$
$$E_i' = \frac{\rho}{a\varepsilon_0}P_i'.$$

Уравнения сохранения. Феноменологические соотношения. В случае неоднородного термодинамического состояния соотношения (4) должны быть дополнены уравнениями Максвелла, уравнениями сохранения массы, заряда, количества движения, энергии и феноменологическими уравнениями. Отметим, что уравнение сохранения массы

$$\frac{d\rho}{d\tau} + \rho\,\mathrm{div}\,\vec{v} = 0 \quad (5)$$

в рамках линейной теории ($\rho = \rho_0 (1 - e)$) удовлетворяется тождественно.

Напряженности электрического $\vec{E}$ и магнитного $\vec{H}$ полей в области тела удовлетворяют уравнениям Максвелла

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \frac{\partial\vec{D}}{\partial\tau} + \vec{j} + \rho\omega\vec{v}, \qquad \operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial\tau}, \qquad \operatorname{div}\vec{B} = 0, \qquad \operatorname{div}\vec{D} = \rho\omega. \tag{6}$$

Здесь $\vec{j}$ — плотность тока проводимости; $\vec{D}$, $\vec{B}$ — векторы электрической и магнитной индукции, связанные с векторами поляризации $\vec{P}$ и намагниченности $\vec{M}$ единицы массы вещества соотношениями

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \rho\vec{P}, \qquad \vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \rho\vec{M}), \tag{7}$$

где ε_0, μ_0 — диэлектрическая и магнитная проницаемости вакуума. Векторы $\vec{E}$, $\vec{H}$, $\vec{D}$, $\vec{B}$, $\vec{P}$, $\vec{M}$ связаны с векторами $\vec{E'}$, $\vec{H'}$, $\vec{D'}$, $\vec{B'}$, $\vec{P'}$, $\vec{M'}=0$, измеряемыми наблюдателем, движущимся со скоростью $\vec{v}$ центра масс элемента (в пренебрежении малыми величинами порядка $\varepsilon_0\mu_0\vec{v}^2$ по сравнению с единицей), следующим образом:

$$\vec{E} = \vec{E}' - \vec{v}\times\vec{B}', \quad \vec{H} = \vec{H}' + \vec{v}\times\vec{D}', \quad \vec{D} = \vec{D}' - \varepsilon_0\mu_0\vec{v}\times\vec{H}', \quad \vec{B} = \vec{B}' + \varepsilon_0\mu_0\vec{v}\times\vec{E}', \quad \vec{P} = \vec{P}', \quad \vec{M} = -\vec{v}\times\vec{P}'. \tag{8}$$

Применяя к первому уравнению системы (6) операцию div и используя последнее, получаем уравнение сохранения электрических зарядов:

$$\rho\frac{d\omega}{\partial\tau} + \operatorname{div}\vec{j} = 0. \tag{9}$$

Запишем уравнение сохранения заряда электронов, перешедших в свободное состояние:

$$\rho\frac{dN^-}{d\tau} = q, \tag{10}$$

где q — производство отрицательного заряда в единицу времени в единице объема вследствие перехода электронов из связанного состояния в свободное.

Отметим, что уравнения (9), (10) эквивалентны уравнениям сохранения заряда свободных электронов и заряда дырок единицы объема, приведенным в работе [2].

Умножая первое из уравнений (6) на $\vec{E}$, второе на $\vec{H}$ и вычитая из первого второе, находим уравнение сохранения электромагнитной энергии:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\tau}(\varepsilon_0E^2 + \mu_0H^2) = -\operatorname{div}(\vec{E}\times\vec{H}) - \left(\vec{j} + \rho\omega\vec{v} + \frac{\partial\rho\vec{P}}{\partial\tau}\right)\cdot\vec{E} - \mu_0\vec{H}\cdot\frac{\partial\rho\vec{M}}{\partial\tau}. \tag{11}$$

Закон сохранения импульса для материальной системы в электромагнитном поле запишется [3] так:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}[\rho\vec{v} + \varepsilon_0\mu_0(\vec{E}\times\vec{H})] = -\operatorname{Div}(\rho\vec{v}\vec{v} - \hat{\sigma} - \hat{\sigma}_T) + \rho\vec{X}. \tag{12}$$

Здесь $\rho\vec{v}$ — плотность импульса вещества; $\varepsilon_0\mu_0(\vec{E}\times\vec{H})$ — плотность импульса электромагнитного поля; $\rho\vec{v}\vec{v}$ — конвективная часть потока импульса; $\hat{\sigma}_T$ — электромагнитный тензор натяжений Максвелла в поляризованной среде: $\vec{X}$ — стационарная консервативная сила ($\vec{X} = -\mathrm{grad}\psi$, $\frac{\partial\psi}{\partial\tau} = 0$), действующая на единицу массы вещества. Из формул (7) следует, что

$$\varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial}{\partial\tau}(\vec{E}\times\vec{H}) = \frac{\partial}{\partial\tau}(\vec{D}\times\vec{B}) - \frac{\partial}{\partial\tau}(\rho\vec{P}\times\vec{B}) - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial}{\partial\tau}(\vec{E}\times\rho\vec{M}). \qquad (13)$$

Используя уравнения Максвелла (6), а также тождества

$$(\mathrm{Grad}\,\vec{D})\cdot\vec{E} = \mathrm{Div}\left[\left(\rho\vec{P}\cdot\vec{E} + \frac{\varepsilon_0}{2}E^2\right)\hat{I}\right] - (\mathrm{Grad}\,\vec{E})\cdot\rho\vec{P},$$

$$(\mathrm{Grad}\,\vec{B})\cdot\vec{H} = \mathrm{Div}\left[\left(\mu_0\rho\vec{M}\cdot\vec{H} + \frac{\mu_0}{2}H^2\right)\hat{I}\right] - (\mathrm{Grad}\,\vec{H})\cdot\mu_0\rho\vec{M},$$

находим

$$\frac{\partial}{\partial\tau}(\vec{D}\times\vec{B}) = \mathrm{Div}\left[\vec{D}\vec{E} + \vec{B}\vec{H} - \left(\frac{\varepsilon_0}{2}E^2 + \frac{\mu_0}{2}H^2\right)\hat{I}\right] -$$

$$- (\mathrm{Grad}\,\vec{E})\cdot\rho\vec{P} - (\mathrm{Grad}\,\vec{H})\cdot\mu_0\rho\vec{M} - \rho\omega\vec{E} - (\vec{j} + \rho\omega\vec{v})\times\vec{B}. \qquad (14)$$

Используя определение субстанциональной производной и уравнение (5), получаем

$$\frac{\partial\rho\vec{P}}{\partial\tau} = \rho\frac{d\vec{P}}{d\tau} - \mathrm{Div}(\vec{v}\rho\vec{P}), \qquad \frac{\partial\rho\vec{M}}{\partial\tau} = \rho\frac{d\vec{M}}{d\tau} - \mathrm{Div}(\vec{v}\rho\vec{M}),$$

$$\frac{\partial\vec{B}}{\partial\tau} = \frac{d\vec{B}}{d\tau} - \vec{v}\cdot\mathrm{Grad}\,\vec{B}, \qquad \frac{\partial\vec{E}}{\partial\tau} = \frac{d\vec{E}}{d\tau} - \vec{v}\cdot\mathrm{Grad}\,\vec{E}.$$

При этом

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial\tau}(\rho\vec{P}\times\vec{B}) = \rho\frac{d}{d\tau}[\vec{P}\times\vec{B}] - \mathrm{Div}\{\vec{v}[\rho\vec{P}\times\vec{B}]\}, \\ &\frac{\partial}{\partial\tau}(\rho\vec{M}\times\vec{E}) = \rho\frac{d}{d\tau}[\vec{M}\times\vec{E}] - \mathrm{Div}\{\vec{v}[\rho\vec{M}\times\vec{E}]\} \end{aligned} \qquad (15)$$

и соотношение (13) запишется так:

$$\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial}{\partial\tau}[\vec{E}\times\vec{H}] = \mathrm{Div}\,\hat{\sigma}_T - \rho\omega\vec{E} - (\vec{j} + \rho\omega\vec{v})\times\vec{B} - (\mathrm{Grad}\,\vec{E})\cdot\rho\vec{P} -$$

$$- (\mathrm{Grad}\,\vec{H})\cdot\mu_0\rho\vec{M} - \rho\frac{d}{d\tau}[\vec{P}\times\vec{B}] + \varepsilon_0\mu_0\rho\frac{d}{d\tau}[\vec{M}\times\vec{E}]. \qquad (16)$$

Подставляя выражение (16) в соотношение (12), получаем уравнение движения

$$\rho\frac{d\vec{v}}{d\tau} = \mathrm{Div}\,\hat{\sigma} + \vec{F}_v + \rho\vec{X}, \qquad (17)$$

где

$$\vec{F}_v = \rho\omega\vec{E} + (\vec{j} + \rho\omega\vec{v})\times\vec{B} + (\mathrm{Grad}\,\vec{E})\cdot\rho\vec{P} +$$

$$+ (\mathrm{Grad}\,\vec{H})\cdot\mu_0\rho\vec{M} + \rho\frac{d}{d\tau}[\vec{P}\times\vec{B}] - \varepsilon_0\mu_0\rho\frac{d}{d\tau}[\vec{M}\times\vec{E}]$$

— пондеромоторная сила на единицу объема.

Из закона сохранения энергии следует, что

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau} = -\,\mathrm{div}\,\vec{J}_\varepsilon, \qquad (18)$$

где плотность полной энергии ε состоит из плотностей внутренней ρU, кинетической $\rho\frac{v^2}{2}$, потенциальной $\rho\psi$ энергий, плотности энергии электромагнитного поля $\frac{1}{2}(\varepsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2)$ и плотности энергии диссоциации ρfN^-, т. е.

$$\varepsilon = \rho\left(U + \frac{v^2}{2} + fN^- + \psi\right) + \frac{1}{2}(\varepsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2);$$

полный поток энергии $\vec{J}_\varepsilon$ состоит из конвективной части $\rho\left(U+\frac{v^2}{2}+fN^-+\right.$ $\left.+\psi\right)\vec{v}$, потока тепла $\vec{J}_Q$, потока электромагнитной энергии $\vec{E}\times\vec{H}$, потока энергии $(-\hat{\sigma}\cdot\vec{v})$, обусловленного механической работой, совершенной системой, потока энергии $\Phi\vec{j}$, обусловленного диффузией электрических зарядов в поле электрического потенциала и потока энергии $[-(\vec{E}\cdot\rho\vec{P}')\vec{v}]$, возникающего вследствие движения поляризованного элемента в поле вектора $\vec{E}$, а именно:

$$\vec{J}_\varepsilon=\rho\left(U+\frac{v^2}{2}+fN^-+\psi\right)\vec{v}+\vec{J}_Q+\vec{E}\times\vec{H}-\hat{\sigma}\cdot\vec{v}+\Phi\vec{j}-(\vec{E}\cdot\rho\vec{P}')\vec{v}.$$

Используя уравнение сохранения потенциальной энергии

$$\frac{\partial\rho\psi}{\partial\tau}=-\operatorname{div}(\rho\psi\vec{v})-\rho\vec{v}\cdot\vec{X},$$

которое получается из уравнения (5) умножением на ψ, уравнение баланса энергии диссоциации $\frac{\partial\rho fN^-}{\partial\tau}=-\operatorname{div}(\rho fN^-\vec{v})-fq$ и уравнение (11), приводим соотношение (18) к виду

$$\rho\frac{d}{d\tau}\left(U+\frac{v^2}{2}\right)=-\operatorname{div}[\vec{J}_Q-\hat{\sigma}\cdot\vec{v}+\Phi\vec{j}-(\vec{E}\cdot\rho\vec{P}')\vec{v}]+$$
$$+\left(\vec{j}+\rho\omega\vec{v}+\frac{\partial\rho\vec{P}}{\partial\tau}\right)\cdot\vec{E}+\rho\vec{v}\cdot\vec{X}+fq+\mu_0\vec{H}\cdot\frac{\partial\rho\vec{M}}{\partial\tau}. \tag{19}$$

Учитывая уравнение сохранения плотности кинетической энергии

$$\rho\frac{d}{d\tau}\left(\frac{v^2}{2}\right)=\vec{v}\cdot\operatorname{Div}\hat{\sigma}+\vec{v}\cdot\vec{F}_v+\rho\vec{v}\cdot\vec{X}, \tag{20}$$

которое следует из уравнения движения (17), из соотношения (19) находим

$$\rho\frac{dU}{d\tau}=-\operatorname{div}[\vec{J}_Q+\Phi\vec{j}-(\vec{E}\cdot\rho\vec{P}')\vec{v}]+\sigma_{ij}\frac{de_{ij}}{d\tau}+$$
$$+\left(\vec{j}+\rho\omega\vec{v}+\frac{\partial\rho\vec{P}}{\partial\tau}\right)\cdot\vec{E}-\vec{v}\cdot\vec{F}_v+fq+\mu_0\vec{H}\cdot\frac{\partial\rho\vec{M}}{\partial\tau}. \tag{21}$$

Подставляя соотношения (9), (10), (21) в уравнение (1) для скорости изменения удельной внутренней энергии

$$\rho\frac{dU}{d\tau}=\rho T\frac{dS}{d\tau}+\sigma_{ij}\frac{de_{ij}}{d\tau}+\rho\Phi\frac{d\omega}{d\tau}+\rho f\frac{dN^-}{d\tau}+\rho E_i'\frac{dP_i'}{d\tau},$$

получаем уравнение баланса энтропии

$$\rho T\frac{dS}{d\tau}=-\operatorname{div}\vec{J}_Q+\vec{j}\cdot(\vec{E}-\operatorname{grad}\Phi+\vec{v}\times\vec{B})+\rho\frac{d\vec{P}}{d\tau}\cdot\vec{E}-$$
$$-[(\operatorname{Grad}\vec{H})\cdot\mu_0\rho\vec{M}]\cdot\vec{v}-\rho\vec{v}\cdot\frac{d}{d\tau}[\vec{P}\times\vec{B}]+\rho\varepsilon_0\mu_0\vec{v}\cdot\frac{d}{d\tau}[\vec{M}\times\vec{E}]-$$
$$-\rho\vec{E}'\cdot\frac{d\vec{P}'}{d\tau}-\mu_0\vec{H}\cdot\left[\operatorname{Div}\left(\vec{v}\rho\vec{M}\right)-\rho\frac{d\vec{M}}{d\tau}\right]. \tag{22}$$

Учитывая формулы (8) и соотношения $\vec{P}'=\frac{a\varepsilon_0}{\rho}\vec{E}'$, $\vec{B}'=\mu_0\vec{H}'$, которые имеют место в системе координат, связанной с центром масс элемента, нетрудно показать, что в пренебрежении малыми членами порядка $\varepsilon_0\mu_0v^2$ справедливо соотношение

$$\rho\frac{d\vec{P}}{d\tau}\cdot\vec{E}-\vec{v}\cdot[(\operatorname{Grad}\vec{H})\cdot\mu_0\rho\vec{M}]-\rho\vec{v}\cdot\frac{d}{d\tau}[\vec{P}\times\vec{B}]+$$
$$+\varepsilon_0\mu_0\rho\vec{v}\cdot\frac{d}{d\tau}[\vec{M}\times\vec{E}]-\mu_0\vec{H}\cdot\left[\operatorname{Div}\left(\vec{v}\rho\vec{M}\right)-\rho\frac{d\vec{M}}{d\tau}\right]\equiv\rho\vec{E}'\cdot\frac{d\vec{P}'}{d\tau}.$$

При этом уравнение (22) запишется в виде

$$\rho \frac{dS}{d\tau} = -\operatorname{div} \vec{J}_S + \frac{1}{T} (\vec{J}_Q \cdot \vec{X}_Q + \vec{j} \cdot \vec{X}_j), \tag{23}$$

где $\vec{J}_S = \frac{\vec{J}_Q}{T}$ — поток энтропии; $\vec{X}_Q = -\frac{1}{T} \operatorname{grad} T$, $\vec{X}_j = \vec{E} - \operatorname{grad} \Phi + \vec{v} \times \vec{B}$ — термодинамические силы, сопряженные соответственно потоку тепла $\vec{J}_Q$ и электрическому току $\vec{j}$.

Так как при термодинамическом равновесии потоки и силы равны нулю, то в первом приближении отклонения от равновесия будем описывать линейной зависимостью обобщенных потоков от обобщенных сил. Для изотропного тела, согласно принципу Кюри, имеем

$$\vec{J}_Q = L_{QQ} \vec{X}_Q + L_{Qj} \vec{X}_j,$$

$$\vec{j} = L_{jQ} \vec{X}_Q + L_{jj} \vec{X}_j. \tag{24}$$

Феноменологические коэффициенты $L_{QQ}, L_{Qj}, L_{jQ}, L_{jj}$, являются функциями параметров состояния и, согласно второму закону термодинамики, удовлетворяют условиям $L_{QQ} \geqslant 0$, $L_{QQ} L_{jj} \geqslant \frac{1}{4} (L_{Qj} + L_{jQ})^2$, $L_{jj} \geqslant 0$. Если считать феноменологические коэффициенты независящими от векторов напряженности электромагнитного поля, то вследствие принципа Онзагера $L_{Qj} = L_{jQ}$. Учитывая выражения для термодинамических сил, феноменологические соотношения (24) записываем в виде

$$\vec{J}_Q = -\chi \operatorname{grad} T + \pi \vec{j},$$

$$\vec{j} = \lambda (\vec{E} - \operatorname{grad} \Phi + \vec{v} \times \vec{B}) - \eta \operatorname{grad} T, \tag{25}$$

где $\chi = \frac{L_{QQ}}{T} - \frac{L_{Qj}^2}{T L_{jj}}$ — коэффициент теплопроводности при нулевом электрическом токе; $\lambda = L_{jj}$ — изотермический коэффициент электропроводности; $\pi = \frac{L_{Qj}}{L_{jj}}$, $\eta = \frac{L_{Qj}}{T}$ $(\lambda \pi = \eta T)$ — коэффициенты, описывающие термоэлектрические эффекты.

Дифференциальные уравнения модели. Примем характеристики материала, входящие в уравнения состояния (5), постоянными. Плотность распределения масс ρ заменим некоторой средней плотностью ρ_0. Будем пренебрегать разностью между субстанциональной и локальной производными, а также разностью между векторами электрического и магнитного полей и намагниченности, измеренными в неподвижной системе координат и в системе координат, связанной с центром масс элемента. При этом $\vec{E}' = \vec{E}$, $\vec{H}' = \vec{H}$, $\vec{M}' = \vec{M} = 0$. $\vec{D} = \varepsilon_0 (1 + a) \vec{E}$, $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ и соотношения (9), (10), (17), (23) с учетом уравнений (4), (25) запишутся так:

$$\rho_0 C \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} - \rho_0 \gamma C \frac{\partial t}{\partial \tau} + \beta K \frac{\partial e}{\partial \tau} + m \frac{\partial f}{\partial \tau} + \operatorname{div} \vec{j} = 0, \tag{26}$$

$$\rho_0 b \left(\frac{\partial f}{\partial \tau} - l \frac{\partial t}{\partial \tau} \right) + \delta K \frac{\partial e}{\partial \tau} + m \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = -\frac{\rho_0 \nu^-}{2f} \frac{\partial f}{\partial \tau}, \tag{27}$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial \tau^2} = \operatorname{Div} \hat{\sigma} + \rho_0 \omega \vec{E} + (\vec{j} + \rho_0 \omega \vec{v}) \times \vec{B} +$$

$$+ \rho_0 (\operatorname{Grad} \vec{E}) \cdot \vec{P} + \rho_0 \frac{\partial}{\partial \tau} [\vec{P} \times \vec{B}] + \rho_0 \vec{X}, \tag{28}$$

$$\rho_0 T\left(\frac{c}{T_0}\frac{\partial t}{\partial \tau}+\frac{\alpha K}{\rho_0}\frac{\partial e}{\partial \tau}-\gamma C\frac{\partial \varphi}{\partial \tau}-bl\frac{\partial f}{\partial \tau}\right)=$$
$$=-\operatorname{div}\vec{J}_Q+\vec{j}\cdot(\vec{E}-\operatorname{grad}\Phi+\vec{v}\times\vec{B}), \qquad (29)$$

где $\vec{u}$ — вектор перемещения $\left(\vec{v}=\frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau}\right)$.

Уравнения (26)—(29) вместе с уравнениями состояния (4), Максвелла (6), феноменологическими соотношениями (25) и условиями сплошности континуума масс

$$\hat{e}=\operatorname{Def}\vec{u} \qquad (\operatorname{Jnk}\hat{e}=0) \qquad (30)$$

составляют замкнутую систему уравнений модели.

Приведенная система уравнений может быть использована, в частности, для описания работы полупроводниковых устройств в динамических режимах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ахиезер А. И., Барьяхтар В. Г., Пелетминский С. В. Спиновые волны. «Наука», М., 1967.
2. Блекмор Д. Статистика электронов в полупроводниках. «Мир», М., 1964.
3. Гроот С., Мазур П. Неравновесная термодинамика. «Мир», М., 1964.
4. Подстригач Я. С., Бурак Я. Й.— Вісн. АН УРСР, 1970, 12.
5. Седов Л. И.— УМН, 1965, 20, 5.
6. Седов Л. И. Механика сплошной среды. «Наука», М., 1970.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию в декабре 1973 г.

ОБ УРАВНЕНИЯХ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ ТОНКОСТЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ

Я. С. Подстригач, Ю. А. Чернуха

В ряде приложений, в частности при определении напряженно-деформированного состояния тонкостенных элементов конструкций, достаточно знать усредненные по толщине пластинки (оболочки) характеристики температурного поля: среднее значение температуры T и температурный аналог изгибающего момента θ. В связи с этим вопросу сведения трехмерной (по пространственным координатам) задачи теплопроводности для тонкостенного элемента к двумерной посвящены многочисленные исследования, начатые в работах [5, 6]. Широко распространенным является метод, основывающийся на предположении о линейном (иногда — полиномиальном) распределении температуры по толщине элемента [2]. В работе [3] уравнения для T и θ были получены операторным методом, не связанным с какими-либо предварительными предположениями о распределении температуры, который в дальнейшем также получил широкое распространение. При этом результаты, полученные авторами различными методами, не совпадают. В настоящей работе проводится сравнительный анализ указанных методов, а также выводятся уточненные уравнения теплопроводности для ортотропных пластинок и формулируются соответствующие краевые условия.

1. Рассмотрим ортотропную пластинку толщины 2δ, нагреваемую внешней средой, теплообмен с которой осуществляется по закону Ньютона. Пусть теплофизические свойства пластинки не зависят от температуры. В этом случае температура $t(x, y, z, \tau)$ пластинки описывается следующим уравнением теплопроводности:

$$\lambda_x\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+\lambda_y\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}+\lambda_z\frac{\partial^2 t}{\partial z^2}-c\frac{\partial t}{\partial \tau}=0 \qquad (1)$$