$$\rho_0 T\left(\frac{c}{T_0}\frac{\partial t}{\partial\tau}+\frac{\alpha K}{\rho_0}\frac{\partial e}{\partial\tau}-\gamma C\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}-bl\frac{\partial f}{\partial\tau}\right)=$$
$$=-\operatorname{div}\vec J_Q+\vec j\cdot(\vec E-\operatorname{grad}\Phi+\vec v\times\vec B), \qquad (29)$$

где $\vec u$ — вектор перемещения $\left(\vec v=\frac{\partial\vec u}{\partial\tau}\right)$.

Уравнения (26)—(29) вместе с уравнениями состояния (4), Максвелла (6), феноменологическими соотношениями (25) и условиями сплошности континуума масс

$$\hat e=\operatorname{Def}\vec u \qquad (\operatorname{Jnk}\hat e=0) \qquad (30)$$

составляют замкнутую систему уравнений модели.

Приведенная система уравнений может быть использована, в частности, для описания работы полупроводниковых устройств в динамических режимах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ахиезер А. И., Барьяхтар В. Г., Пелетминский С. В. Спиновые волны. «Наука», М., 1967.
2. Блекмор Д. Статистика электронов в полупроводниках. «Мир», М., 1964.
3. Гроот С., Мазур П. Неравновесная термодинамика. «Мир», М., 1964.
4. Подстригач Я. С., Бурак Я. Й.— Вісн. АН УРСР, 1970, 12.
5. Седов Л. И.— УМН, 1965, 20, 5.
6. Седов Л. И. Механика сплошной среды. «Наука», М., 1970.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию в декабре 1973 г.

ОБ УРАВНЕНИЯХ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ ТОНКОСТЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ

Я. С. Подстригач, Ю. А. Чернуха

В ряде приложений, в частности при определении напряженно-деформированного состояния тонкостенных элементов конструкций, достаточно знать усредненные по толщине пластинки (оболочки) характеристики температурного поля: среднее значение температуры T и температурный аналог изгибающего момента θ. В связи с этим вопросу сведения трехмерной (по пространственным координатам) задачи теплопроводности для тонкостенного элемента к двумерной посвящены многочисленные исследования, начатые в работах [5, 6]. Широко распространенным является метод, основывающийся на предположении о линейном (иногда — полиномиальном) распределении температуры по толщине элемента [2]. В работе [3] уравнения для T и θ были получены операторным методом, не связанным с какими-либо предварительными предположениями о распределении температуры, который в дальнейшем также получил широкое распространение. При этом результаты, полученные авторами различными методами, не совпадают. В настоящей работе проводится сравнительный анализ указанных методов, а также выводятся уточненные уравнения теплопроводности для ортотропных пластинок и формулируются соответствующие краевые условия.

1. Рассмотрим ортотропную пластинку толщины 2δ, нагреваемую внешней средой, теплообмен с которой осуществляется по закону Ньютона. Пусть теплофизические свойства пластинки не зависят от температуры. В этом случае температура $t(x, y, z, \tau)$ пластинки описывается следующим уравнением теплопроводности:

$$\lambda_x\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+\lambda_y\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}+\lambda_z\frac{\partial^2 t}{\partial z^2}-c\frac{\partial t}{\partial\tau}=0 \qquad (1)$$

при граничных условиях на ее поверхностях

$$\lambda_z \frac{\partial t}{\partial z} \pm h_t^{\pm} (t - t_c^{\pm}) |_{z=\pm\delta} = 0; \tag{2}$$

$$n_1 \lambda_x \frac{\partial t}{\partial x} + n_2 \lambda_y \frac{\partial t}{\partial y} + h_s (t - t_s) |_S = 0 \tag{3}$$

и начальном условии

$$t |_{\tau=0} = t_0 (x, y, z). \tag{4}$$

В соотношениях (1) — (4) обозначено: λ_x, λ_y, λ_z и c — коэффициенты теплопроводности и удельная теплоемкость; n_1, n_2 — компоненты вектора внешней нормали к торцевой поверхности S; t_s и $t_c^{\pm}$ — температуры сред, омывающих поверхности пластинки S и $z = \pm\delta$; h_s и $h_t^{\pm}$ — коэффициенты теплообмена с этих поверхностей; x, y, z — декартовы координаты, τ — время; плоскость $z = 0$ совмещена со срединной плоскостью пластинки.

Введем в рассмотрение следующие усредненные по толщине пластинки характеристики температурного поля:

$$T_i = \frac{2i-1}{2\delta^i} \int_{-\delta}^{\delta} t z^{i-1} dz \qquad (i = 1, 2, \ldots, k). \tag{5}$$

В предположении, что температурное поле пластинки представимо в виде

$$t = \sum_{j=1}^{m} a_{j-1} (x, y, \tau) \eta^{j-1} \qquad (z = \eta\delta), \tag{6}$$

получение уравнений на T_i сводится к следующему. Умножая соотношение (1) на z^{i-1} и интегрируя по z в пределах от $-\delta$ до δ, с учетом выражений (6) и (5) получаем

$$p^2 T_i = (1 - 2i) \sum_{j=3}^{m} \frac{1 + (-1)^{i+j}}{2} \frac{(j-1)(j-2)}{i+j-3} a_{j-1}; \tag{7}$$

$$p^2 = \frac{\delta^2}{\lambda_z} \left(\lambda_x \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \lambda_y \frac{\partial^2}{\partial y^2} - c \frac{\partial}{\partial \tau} \right). \tag{8}$$

Внося в формулы (2) и (5) вместо t выражение (6), находим

$$\frac{\lambda_z}{\delta} \sum_{j=2}^{m} (\pm 1)^j (j-1) a_{j-1} \pm h_t^{\pm} \sum_{j=1}^{m} (\pm 1)^{j-1} a_{j-1} = \pm h_t^{\pm} t_c^{\pm}; \tag{9}$$

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{1 + (-1)^{i+j}}{i+j-1} a_{j-1} = \frac{2}{2i-1} T_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, k). \tag{10}$$

При $m = k + 2$ для определения m величин a_{j-1} соотношения (9), (10) дают систему m линейных неоднородных уравнений с отличным от нуля детерминантом, решение которой единственно. Если найденные таким путем величины a_{j-1} подставим в правые части соотношений (7), то получим k дифференциальных уравнений второго порядка для определения k величин T_i ($i = 1, 2, \ldots, k$). К такому же результату приводит и операторный метод. Встречающиеся в литературе несовпадения результатов связаны с тем, что при использовании гипотезы (6) обычно принимают $m = k$ [2]; при этом задача об определении величин a_{j-1} становится переопределенной, а результат зависит от того, какие два из соотношений (9), (10) остаются неиспользованы.

Рассмотрим случай $k = 2$. Полагая $m = 4$ и вводя обозначения

$$T = T_1, \ \theta = T_2; \quad 2\lambda_z \varepsilon_{1,2} = (h_t^+ \pm h_t^-) \delta; \quad 2t_{1,2} = t_c^+ \pm t_c^-, \tag{11}$$

из соотношений (7)—(10) находим

$$\frac{5}{2} \left(1 + \frac{\varepsilon_1}{6}\right) p^2 \theta + \frac{\varepsilon_2}{3} p^2 T - \varepsilon_1 (\theta - t_2) - \varepsilon_2 (T - t_1) - \theta = 0, \tag{12}$$

$$\frac{\varepsilon_2}{15} p^2 \theta + \left(1 + \frac{\varepsilon_1}{3}\right) p^2 T - \varepsilon_2 (\theta - t_2) - \varepsilon_1 (T - t_1) = 0.$$

Система уравнений (12), выведенных в предположении о распределении температуры по толщине пластинки по кубическому закону, имеет такой же порядок и связность, как и система, получаемая с использованием гипотезы о «линейном» распределении температуры [1]. Уравнения (12) при $\lambda_x = \lambda_y = \lambda_z$ совпадают с полученными операторным методом в работе [4] уравнениями (2.117).

Начальные и граничные условия для T и θ получаются непосредственным интегрированием по толщине пластинки условий (4) и (3):

$$T|_{\tau=0} = \frac{1}{2\delta}\int\limits_{-\delta}^{\delta} t_0 dz, \quad \theta|_{\tau=0} = \frac{3}{2\delta^2}\int\limits_{-\delta}^{\delta} t_0 z dz; \tag{13}$$

$$(l + h_s) T|_S = \frac{h_s}{2\delta}\int\limits_{-\delta}^{\delta} t_s dz, \quad (l + h_s)\theta|_S = \frac{3h_s}{2\delta^2}\int\limits_{-\delta}^{\delta} t_s z dz; \tag{14}$$

$$l = n_1\lambda_x \frac{\partial}{\partial x} + n_2\lambda_y \frac{\partial}{\partial y}. \tag{15}$$

Для получения более точных уравнений для пластинки (оболочки) с использованием гипотезы (6) приходится вводить дополнительные ($i > 2$) характеристики T_i (5) температурного поля. Однако величины T_i ($i > 2$) не входят в уравнения, описывающие напряженно-деформированное состояние пластинки (оболочки). В связи с этим представляется более целесообразным пользоваться операторным методом, который позволяет получать уточненные дифференциальные уравнения непосредственно для T и θ.

2. В соответствии с операторным методом [4] решение уравнения (1) находим в виде

$$t = D(x, y, \tau)\sin p\eta + \dot{G}(x, y, \tau)\cos p\eta. \tag{16}$$

Подставляя в соотношения (5) выражение (16), после интегрирования находим

$$T = p^{-1}\sin p\; G; \qquad \theta = 3p^{-2}(\sin p - p\cos p) D. \tag{17}$$

Исключив из соотношений (16) и (17) величины D и G, получим

$$t = \frac{p\cos p\eta}{\sin p} T + \frac{1}{3}\frac{p^2\sin p\eta}{\sin p - p\cos p}\theta. \tag{18}$$

Если в условия (2) внесем вместо t выражение (18), то получим следующую систему уравнений бесконечно высокого порядка для определения усредненных значений температуры T и θ:

$$\begin{aligned} &[L(p) + \varepsilon_1 P(p)]\theta + \varepsilon_2 R(p) T - \varepsilon_2 t_1 - \varepsilon_1 t_2 = 0,\\ &[p^2 - \varepsilon_1 R(p)] T - \varepsilon_2 P(p)\theta + \varepsilon_1 t_1 + \varepsilon_2 t_2 = 0; \end{aligned} \tag{19}$$

$$L(p) = \frac{1}{3}\frac{p^3}{\operatorname{tg} p - p}; \quad R(p) = p\operatorname{ctg} p; \quad P(p) = \frac{1}{3}\frac{p^2}{1 - p\operatorname{ctg} p}. \tag{20}$$

Если содержащиеся в уравнениях (19) выражения (20) разложим в ряд по степеням δ и затем в этих разложениях отбросим члены порядка δ^{2n+2} и выше, то для T и θ получим два дифференциальных уравнения порядка $2n$. В частности, удерживая в этих разложениях члены до δ^3 включительно, получаем систему (12).

Для получения более точных уравнений удержим в разложениях левых частей равенств (19) члены до δ^5 включительно; это приводит к следующей системе:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{525}(1 + \varepsilon_1) p^4\theta + \frac{1}{45}\varepsilon_2 p^4 T + \frac{2}{5}\left(1 + \frac{1}{6}\varepsilon_1\right) p^2\theta + \frac{1}{3}\varepsilon_2 p^2 T - \varepsilon_1(\theta - t_2) -\\ &\qquad - \varepsilon_2(T - t_1) - \theta = 0;\\ &\frac{1}{525}\varepsilon_2 p^4\theta + \frac{1}{45}\varepsilon_1 p^4 T + \frac{1}{15}\varepsilon_2 p^2\theta + \left(1 + \frac{1}{3}\varepsilon_1\right) p^2 T - \varepsilon_2(\theta - t_2) -\\ &\qquad - \varepsilon_1(T - t_1) = 0. \end{aligned} \tag{21}$$

Для решения уравнений (21) краевых условий (13) и (14) недостаточно. Чтобы получить недостающие краевые условия, воспользуемся формулой

$$\frac{1}{\delta^{i+2}}\int_{-\delta}^{\delta} tz^{i+1}dz + \frac{(i+1)\,i}{\delta^i p^2}\int_{-\delta}^{\delta} tz^{i-1}dz = [1-(-1)^i][1+(1+i)\,p^{-2}R(p)]\,T +$$
$$+ [1+(-1)^i]\left[\frac{1}{3} + ip^{-2}P(p)\right]\theta, \qquad (22)$$

которая следует из соотношения (18).

Интегрируя по z равенства (3) и (4) и используя формулу (22) при $i = 1$ и $i = 2$, с точностью, соответствующей выводу уравнений (21), находим

$$p^2T\,|_{\tau=0} = \frac{15}{4\delta^3}\int_{-\delta}^{\delta} t_0(\delta^2 - 3z^2)\,dz; \quad p^2\theta\,|_{\tau=0} = \frac{105}{4\delta^4}\int_{-\delta}^{\delta} t_0(3\delta^2 - 5z^2)\,zdz; \qquad (23)$$

$$\begin{aligned} (l+h_s)\,p^2T|_S &= \frac{15h_s}{4\delta^3}\int_{-\delta}^{\delta} t_s(\delta^2 - 3z^2)\,dz; \\ (l+h_s)\,p^2\theta\,|_S &= \frac{105h_s}{4\delta^4}\int_{-\delta}^{\delta} t_s(3\delta^2 - 5z^2)\,zdz. \end{aligned} \qquad (24)$$

Если краевая задача (21), (13), (14), (23), (24) решена, то с принятой точностью может быть восстановлено (если это требуется) температурное поле пластинки. Действительно, раскладывая в ряд по δ правую часть соотношения (18) и считая при этом $\delta^6 \ll 1$, находим

$$t = \sum_{j=0}^{5} a_j(x, y, \tau)\,\eta^j; \qquad (25)$$

$$a_0 = T + \frac{1}{6}p^2T + \frac{7}{360}p^4T, \quad a_1 = \theta + \frac{1}{10}p^2\theta + \frac{9}{1400}p^4\theta,$$
$$a_2 = -\frac{1}{2}p^2T - \frac{1}{12}p^4T;$$
$$a_3 = -\frac{1}{6}p^2\theta - \frac{1}{60}p^4\theta, \quad a_4 = \frac{1}{24}p^4T, \quad a_5 = \frac{1}{120}p^4\theta. \qquad (26)$$

3. Для выяснения обстоятельств, при которых целесообразно пользоваться уточненными уравнениями (21), введем безразмерные величины

$$a\xi = x, \quad b\zeta = y, \quad c\delta^2\tau_1 = \lambda_z\tau, \qquad (27)$$

где a и b — размеры пластинки. Тогда оператор (8) запишется в виде

$$p^2 = \nabla^2 - \frac{\partial}{\partial\tau_1}; \qquad (28)$$

$$\nabla^2 = \varkappa_x\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \varkappa_y\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}; \quad \varkappa_x = \frac{\lambda_x}{\lambda_z}\left(\frac{\delta}{a}\right)^2; \quad \varkappa_y = \frac{\lambda_y}{\lambda_z}\left(\frac{\delta}{b}\right)^2. \qquad (29)$$

Как следует из соотношений (28) и (29), к уточненным уравнениям следует обращаться, если пластинка не может считаться тонкой (нарушаются неравенства $\delta^2 \ll a^2$, $\delta^2 \ll b^2$), либо если процесс теплопроводности в плоскости пластинки (даже тонкой) происходит быстрее, чем в направлении нормали к ее срединной поверхности ($\lambda_x \gg \lambda_z$, $\lambda_y \gg \lambda_z$).

Кроме того, отсутствие малого множителя при втором слагаемом в правой части соотношения (28) ограничивает область применимости простейших уравнений теплопроводности для тонкостенных элементов даже при $\varkappa_x \ll 1$ и $\varkappa_y \ll 1$ рассмотрением процессов, близких (в направлении нормали) к установившимся. С целью расширения указанной области также приходится обращаться к уточненным уравнениям; однако в этом случае формулы, полученные в п. 2, могут быть упрощены. Считая в соотношениях

(21) и (23) $\varkappa_x \ll 1$, $\varkappa_y \ll 1$, получаем

$$\frac{2}{5}\nabla^2\theta - \varepsilon_1(\theta - t_2) - \varepsilon_2(T - t_1) - \theta =$$

$$= \frac{2}{5}\left(1 + \frac{1}{6}\varepsilon_1\right)\frac{\partial\theta}{\partial\tau_1} + \frac{1}{3}\varepsilon_2\frac{\partial T}{\partial\tau_1} - \frac{1+\varepsilon_1}{525}\frac{\partial^2\theta}{\partial\tau_1^2} - \frac{\varepsilon_2}{45}\frac{\partial^2 T}{\partial\tau_1^2},$$

$$\nabla^2 T - \varepsilon_1(T - t_1) - \varepsilon_2(\theta - t_2) = \left(1 + \frac{1}{3}\varepsilon_1\right)\frac{\partial T}{\partial\tau_1} +$$

$$+ \frac{1}{15}\varepsilon_2\frac{\partial\theta}{\partial\tau_1} - \frac{\varepsilon_1}{45}\frac{\partial^2 T}{\partial\tau_1^2} - \frac{\varepsilon_2}{525}\frac{\partial^2\theta}{\partial\tau_1^2}; \tag{30}$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial\tau_1}\right|_{\tau_1=0} = \frac{15}{4\delta^3}\int_{-\delta}^{\delta} t_0(3z^2 - \delta^2)\,dz, \tag{31}$$

$$\left.\frac{\partial\theta}{\partial\tau_1}\right|_{\tau_1=0} = \frac{105}{4\delta^4}\int_{-\delta}^{\delta} t_0(5z^2 - 3\delta^2)\,z\,dz.$$

Если найдена система решений уравнений (30), удовлетворяющих граничным условиям (24) и начальным условиям (23) и (31), то температурное поле пластинки может быть восстановлено (с соответствующей точностью) в виде (25); при этом формулы (26) принимают вид

$$a_0 = T + \frac{1}{6}\nabla^2 T - \frac{1}{6}\frac{\partial T}{\partial\tau_1} + \frac{7}{360}\frac{\partial^2 T}{\partial\tau_1^2}, \quad a_3 = -\frac{1}{6}\nabla^2\theta +$$

$$+ \frac{1}{6}\frac{\partial\theta}{\partial\tau_1} - \frac{1}{60}\frac{\partial^2\theta}{\partial\tau_1^2},$$

$$a_1 = \theta + \frac{1}{10}\nabla^2\theta - \frac{1}{10}\frac{\partial\theta}{\partial\tau_1} + \frac{9}{1400}\frac{\partial^2\theta}{\partial\tau_1^2}, \quad a_4 = \frac{1}{24}\frac{\partial^2 T}{\partial\tau_1^2},$$

$$a_2 = -\frac{1}{2}\nabla^2 T + \frac{1}{2}\frac{\partial T}{\partial\tau_1} - \frac{1}{12}\frac{\partial^2 T}{\partial\tau_1^2}, \quad a_5 = \frac{1}{120}\frac{\partial^2\theta}{\partial\tau_1^2}.$$

В заключение отметим, что приведенные рассуждения полностью переносятся на случай тонкостенных оболочек.

4. Обычно при выводе уравнений теплопроводности для оболочек исходят из уравнения трехмерной задачи, упрощенного за счет предположения о малости отношений толщины к радиусам кривизн [1 — 4]. Поэтому представляется целесообразным получить указанные уравнения с учетом высших степеней этих отношений.

Рассмотрим тонкую ортотропную оболочку, отнесенную к триортогональной системе координатных линий (α, β, γ), являющихся соответственно линиями главных кривизн срединной поверхности и нормалью к ней. Пусть A, B — коэффициенты Ляме срединной поверхности, k_1, k_2 — кривизны координатных линий, w — плотность тепловых источников. В качестве исходного примем следующее уравнение трехмерной задачи:

$$\frac{1}{AB}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\lambda_\alpha B}{A}\,\frac{1+k_2\gamma}{1+k_1\gamma}\,\frac{\partial t}{\partial\alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\lambda_\beta A}{B}\,\frac{1+k_1\gamma}{1+k_2\gamma}\,\frac{\partial t}{\partial\beta}\right)\right] -$$

$$- \frac{\partial}{\partial\gamma}\left[\lambda_\gamma(1+k_1\gamma)(1+k_2\gamma)\frac{\partial t}{\partial\gamma}\right] + w = c(1+k_1\gamma)(1+k_2\gamma)\frac{\partial t}{\partial\tau}. \tag{32}$$

Предположим, что температура распределяется по толщине оболочки по кубическому закону. Подставив выражение (6) при $m = 4$ в уравнение (32) и проинтегрировав его дважды, как указано в п. 1, получим два уравнения. Присоединим к ним соотношения (9) и два соотношения (10). Исключив из этих шести соотношений четыре величины a_0, a_1, a_2, a_3, с использованием обозначений (11) придем к следующей системе уравнений для T и θ:

$$\left(1+\frac{1}{2}\varepsilon_1\right)\left[\left(\nabla_1 - C\frac{\partial}{\partial\tau}\right)\theta + W_2\right] - \left[\nabla_2 + (\varkappa_1+\varkappa_2)C\frac{\partial}{\partial\tau}\right]T =$$

$$= \frac{5}{2r}\left\{\left[(1+\varkappa_1\varkappa_2)\varepsilon_1 + \frac{4}{5}(\varkappa_1+\varkappa_2)\varepsilon_2 + \frac{1}{3}(\varepsilon_1^2-\varepsilon_2^2)\right](\theta - t_2) + \right.$$

$$+\left[(1+\varkappa_1\varkappa_2)\varepsilon_2 + \frac{2}{15}(\varkappa_1+\varkappa_2)(6\varepsilon_1+\varepsilon_1^2-\varepsilon_2^2)\right](T-t_1) +$$

$$\left.+\left[1+\frac{1}{3}\varepsilon_1 + \frac{1}{15}(9+2\varepsilon_1)\varkappa_1\varkappa_2 - \frac{2}{15}(\varkappa_1+\varkappa_2)\varepsilon_2\right]\theta\right\}; \qquad (33)$$

$$\left(1+\frac{1}{2}\varepsilon_1\right)\left[\left(\nabla_1 - C\frac{\partial}{\partial\tau}\right)T + W_1\right] - \frac{1}{3}\left[\nabla_2 + (\varkappa_1+\varkappa_2)C\frac{\partial}{\partial\tau}\right]\theta =$$

$$= \frac{1}{r}\left\{\left[(1+\varkappa_1\varkappa_2)\varepsilon_1 + (\varkappa_1+\varkappa_2)\varepsilon_2 + \frac{1}{6}(\varepsilon_1^2-\varepsilon_2^2)\right](T-t_1) + \right.$$

$$+\left[(1+\varkappa_1\varkappa_2)\varepsilon_2 + \frac{1}{3}(\varkappa_1+\varkappa_2)(3\varepsilon_1+\varepsilon_1^2-\varepsilon_2^2)\right](\theta - t_2) -$$

$$\left.-\frac{1}{6}\left[\varepsilon_2 - 2(3+\varepsilon_1)(\varkappa_1+\varkappa_2) + (6+3\varepsilon_1+\varepsilon_2)\varkappa_1\varkappa_2\right]\theta\right\}.$$

Здесь обозначено

$$\nabla_1 = \frac{1}{AB}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\Lambda_\alpha B}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\Lambda_\beta A}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\right)\right];$$

$$\nabla_2 = \frac{1}{AB}\left\{\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[(\varkappa_1-\varkappa_2)\frac{\Lambda_\alpha B}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\right] + \frac{\partial}{\partial\beta}\left[(\varkappa_2-\varkappa_1)\frac{\Lambda_\beta A}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\right]\right\},$$

$$r\lambda_\gamma = \delta, \quad \varkappa_{1,2} = k_{1,2}\delta; \quad C = c\delta; \quad \Lambda_{\alpha,\beta} = \lambda_{\alpha,\beta}\,\delta;$$

$$W_1 = \frac{1}{2}\int_{-\delta}^{\delta} w\,d\gamma; \quad W_2 = \frac{3}{2\delta}\int_{-\delta}^{\delta} w\gamma\,d\gamma.$$

Система уравнений (33) допускает дальнейшее упрощение. При $\delta^3 \ll 1$ получаем

$$\left(\nabla_1 - C\frac{\partial}{\partial\tau}\right)T + W_1 = \frac{1}{r}\left\{\left[\varepsilon_1 + \frac{1}{6}(\varepsilon_1^2-\varepsilon_2^2) + (\varkappa_1+\varkappa_2)\varepsilon_2\right](T-t_1) + \right.$$

$$\left.+[\varepsilon_2 + (\varkappa_1+\varkappa_2)\varepsilon_1]\left(\frac{5}{6}\theta - t_2\right)\right\};$$

$$\left(\nabla_1 - C\frac{\partial}{\partial\tau}\right)\theta + W_2 = \frac{5}{2r}\left\{\left[\varepsilon_2 + \frac{4}{5}(\varkappa_1+\varkappa_2)\varepsilon_1\right](T-t_1) + \right.$$

$$+\left[\varepsilon_1 + \frac{4}{5}(\varkappa_1+\varkappa_2)\varepsilon_2 + \frac{1}{3}(\varepsilon_1^2-\varepsilon_2^2)\right](\theta - t_2) +$$

$$\left.+\left[1+\frac{1}{3}\varepsilon_1 + \frac{1}{5}\varkappa_1\varkappa_2 - \frac{2}{15}(\varkappa_1+\varkappa_2)\varepsilon_2\right]\theta\right\}. \qquad (34)$$

Отметим, что и в упрощенном варианте (34) полученные уравнения содержат гауссовую кривизну.

ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин В. В.— ПММ, 1960, **24**, 2, 361.
2. Коваленко А. Д. Основы термоупругости. «Наукова думка», К., 1970.
3. Підстригач Я. С.— ДАН УРСР. Сер. А, 1958, 5, 505.
4. Підстригач Я. С., Ярема С. Я. Температурні напруження в оболонках. Вид-во АН УРСР, К., 1961.
5. Marguerre K.— Ing. Arch., 1937, 8, 3.
6. Marguerre K.— Z. angew. Math. Mech., 1935, **15**, 6.

Львовский филиал математической
физики Института математики
АН УССР

Поступила в редакцию
в декабре 19[illegible] г.