Все вычисления проводились при следующих данных: $R = 0{,}3$ *м*,

$$h = 0{,}003 \text{ м}, \quad \lambda^* = 50{,}6 \frac{\text{ккал}}{\text{м} \cdot \text{час} \cdot {}^\circ C}; \quad \alpha^* = 22 \frac{\text{ккал}}{\text{м}^2 \cdot \text{град} \cdot \text{час}},$$

$$\gamma = 7850 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, \quad \nu = 0{,}3, \quad c^* = 0{,}11 \frac{\text{ккал}}{\text{кг} \cdot \text{град}}.$$

На рисунке показано изменение напряженного состояния при движении источника тепла по меридиану пологой сферической оболочки со скоростью 9 *м/час* (*а*) и 15 *м/час* (*б*) (I — $\sigma^+_{\alpha\alpha}$, II — $\sigma^-_{\alpha\alpha}$, III — $\sigma^+_{\beta\beta}$, IV — $\sigma^-_{\beta\beta}$; σ^+, σ^- — напряжения на верхней и нижней частях оболочки соответственно).

Из рисунков видно, что кривые, описывающие изменение $\sigma^+_{\alpha\alpha}$ и $\sigma^-_{\alpha\alpha}$, пересекаются впереди, а $\sigma^+_{\beta\beta}$ и $\sigma^-_{\beta\beta}$ — сзади движущегося источника нагрева. Такое характерное распределение напряжений при определенной жесткости оболочки может привести к деформациям типа вмятин. Наибольшее растягивающее напряжение $\sigma^+_{\alpha\alpha}$ возникает впереди, а $\sigma^-_{\beta\beta}$ — сзади источника тепла. Из сопоставления графиков видно, что место и величина максимумов $\sigma^+_{\alpha\alpha}$ и $\sigma^-_{\beta\beta}$ зависит от скорости движения источника тепла. С увеличением скорости движения от 9 до 15 *м/час* по величине $\sigma^+_{\alpha\alpha}$ и $\sigma^+_{\beta\beta}$ уменьшаются в два раза.

Приведенные иллюстрации показывают, что скорость движения существенно влияет на напряженное состояние оболочки. Этот факт можно использовать для снятия остаточных сварочных напряжений в тонких пологих оболочках.

ЛИТЕРАТУРА

1. Власов В. З. Избранные труды. Т. I. Изд-во АН СССР, М., 1962.
2. Підстригач Я. С., Ярема С. Я. Температурні напруження в оболонках. Вид-во АН УРСР, К., 1961.
3. Швец Р. Н., Павленко В. Д.— ФХММ, 1970, 3.
4. Паркус Г. Неустановившиеся температурные напряжения. Физматгиз, М., 1963.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию в октябре 1973 г.

ТЕМПЕРАТУРНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ПЛАСТИНКАХ С ЗАЩЕМЛЕННЫМ ПОДКРЕПЛЯЮЩИМ ЭЛЕМЕНТОМ

А. Н. Кулик, Л. С. Гульчевский

Пусть тонкая изотропная защемленная по краю $x = 0$ пластинка толщиной 2δ и шириной $2h$ соединена с другой пластинкой такой же толщины (рисунок). Температурные напряжения и перемещения в пластинке «0» определяются по формулам [2]

$$\sigma^0_{xx} = -2G_0\beta^2\Phi_0 + \frac{2G_0}{1-\nu_0}\beta\left(\nu_0\beta^2\chi_0 - \frac{\partial^2\chi_0}{\partial x^2}\right),$$

$$\sigma^0_{yy} = -2G_0\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial x^2} + \frac{2G_0}{1-\nu_0}\beta\left[\beta^2\chi_0 + (2+\nu_0)\frac{\partial^2\chi_0}{\partial x^2}\right], \quad (1)$$

$$\sigma^0_{xy} = 2G_0\beta\frac{\partial\Phi_0}{\partial x} + \frac{2G_0}{1-\nu_0}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2\chi_0}{\partial x^2} - \nu_0\beta^2\chi_0\right),$$

$$u_0 = \frac{\partial\Phi_0}{\partial x} - \frac{1+\nu_0}{1-\nu_0}\beta\frac{\partial\chi_0}{\partial x}, \quad v_0 = \beta\Phi_0 + \frac{2}{1-\nu_0}\frac{\partial^2\chi_0}{\partial x^2} + \beta^2\chi_0, \quad (2)$$

где χ_0 удовлетворяет уравнению

$$\Delta\Delta\chi_0 = 0, \quad (3)$$

а Φ_0 — уравнению

$$\Delta\Phi_0 = (1 + \nu_0)\,\alpha_t^0 T_0; \tag{4}$$

G_0 — модуль сдвига; ν_0 — коэффициент Пуассона; $\frac{\partial}{\partial y} = \beta$.

Решения уравнений (3), (4) имеют вид

$$\chi_0 = (A_0 + B_0 x)\cos\beta x + (C_0 + D_0 x)\sin\beta x, \tag{5}$$

$$\Phi_0 = \frac{(1+\nu_0)\,\alpha_t^0}{\beta}\int\limits_0^x T_0 \sin\beta(x - \xi)\,d\xi. \tag{6}$$

Постоянные интегрирования A_0, B_0, C_0, D_0 находим из условий

$$u_0|_{x=0} = 0, \quad v_0|_{x=0} = 0, \quad u_0 = u, \quad v_0 = v \text{ при } x = 2h \tag{7}$$

в виде

$$A_0 = -4(1-\nu_0)\frac{\left(2\beta h\cos 2\beta h + \frac{3-\nu_0}{1+\nu_0}\sin 2\beta h\right)b + 2\beta h\sin 2\beta h\cdot d}{4(1+\nu_0)^2\beta^4 h^2 - (3-\nu_0)^2\beta^2\sin^2 2\beta h},$$

$$B_0 = (1-\nu_0)\frac{(1+\nu_0)\beta h\sin 2\beta h\cdot b + [(3-\nu_0)\sin 2\beta h - 2\beta h(1+\nu_0)\cos 2\beta h]\,d}{4(1+\nu_0)^2\beta^3 h^2 - (3-\nu_0)^2\beta\sin^2 2\beta h},$$

$$C_0 = -\frac{B_0}{\beta}, \quad D_0 = \frac{1+\nu_0}{4}\beta A_0,$$

где u, v — компоненты перемещения точек пластинки

$$b = u|_{x=2h} - (1+\nu_0)\,\alpha_t^0\int\limits_0^{2h} T_0\cos\beta(2h-\xi)\,d\xi,$$

$$d = v|_{x=2h} - (1+\nu_0)\,\alpha_t^0\int\limits_0^{2h} T_0\sin\beta(2h-\xi)\,d\xi.$$

Температура T_0 удовлетворяет уравнению теплопроводности [1]

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + p_0^2\right)T_0 = -Q, \tag{8}$$

где

$$p_0^2 = \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \varkappa_0^2 - \frac{1}{a_0}\frac{\partial}{\partial\tau}; \quad \varkappa_0^2 = \frac{\alpha_0}{\lambda_0\delta}; \quad Q = \frac{w_0}{2\lambda_0\delta};$$

α_0 — коэффициент теплоотдачи с боковых $z = \pm\,\delta$ поверхностей; λ_0 — коэффициент теплопроводности; a_0 — коэффициент температуропроводности пластинки «0».

Общее решение уравнения (8) имеет вид

$$T_0 = A_1\cos p_0 x + B_1\sin p_0 x + \frac{1}{p_0}\int\limits_0^x Q\sin p_0(\xi - x)\,d\xi. \tag{9}$$

Используя краевые условия

$$\left.\frac{\partial T_0}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad T_0 = T \text{ при } x = 2h, \tag{10}$$

находим такие выражения постоянных интегрирования:

$$A_1 = \frac{T - \frac{1}{p_0}\int\limits_0^{2h} Q\sin p_0(\xi - 2h)\,d\xi}{\cos 2p_0 h}, \quad B_1 = 0.$$

Используя остальные условия идеального термоупругого контакта

$$\lambda_0\frac{\partial T_0}{\partial x} = \lambda\frac{\partial T}{\partial x}, \quad \sigma_{xx}^0 = \sigma_{xx}, \ \sigma_{xy}^0 = \sigma_{xy} \quad \text{при} \quad x = 2h, \tag{11}$$

получаем следующие граничные условия на подкрепленном крае пластинки:

$$-\lambda_0 \frac{p_0 \sin 2p_0h \cdot T + \int\limits_0^{2h} Q \cos p_0\xi d\xi}{\cos 2p_0h} = \lambda \frac{\partial T}{\partial x},$$

$$\sigma_{xx} = 2G_0(1+\nu_0)\alpha_t^0\beta \int\limits_0^{2h} \sin\beta(2h-\xi)\cdot T_0 d\xi + \frac{2G_0(1+\nu_0)}{1-\nu_0}\beta^2\left[\left(\frac{\beta}{2}\cos 2\beta h + \right.\right.$$

$$\left.+\frac{1+\nu_0}{2}\beta^2 h \sin 2\beta h\right) A_0 + \left.\left(2\beta h \cos 2\beta h + \frac{1-\nu_0}{1+\nu_0}\sin 2\beta h\right) B_0\right],$$

$$\sigma_{xy} = 2G_0(1+\nu_0)\alpha_t^0\beta \int\limits_0^{2h} \cos\beta(2h-\xi)\cdot T_0 d\xi + \frac{2G_0(1+\nu_0)}{1-\nu_0}\beta^2\left[\left(\frac{1-\nu_0}{4}\beta\sin 2\beta h - \right.\right.$$

$$\left.-\frac{1+\nu_0}{2}\beta^2 h\cos 2\beta h\right) A_0 + \left.\left(2\beta h \sin 2\beta h - \frac{2}{1+\nu_0}\cos 2\beta h\right) B_0\right] \text{ при } x = 2h. \quad (12)$$

Разложив фигурирующие в выражениях (12) операторы в ряды и переходя к пределу при $h \to 0$, оставляя при этом постоянными $\Lambda_0 = \lambda_0 F$, $C_0^* = c_v^0 F$, F, $g_0 = E_0 F$, $g_0^* = E_0 I$, получаем при $x = 2h$ граничные условия для определения температурного поля и вызываемых им температурных напряжений в пластинке с подкрепленным тонким стержнем краем:

$$\Lambda \frac{\partial T}{\partial x} + \Lambda_0 \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - A^0 T - C_0^* \frac{\partial T}{\partial \tau} = -\int\limits_0^{2h} w_0 d\xi, \quad (13)$$

$$\sigma_{xx}F - \frac{2G_0^*}{1-\nu_0}u + \frac{1-3\nu_0}{4(1-\nu_0^2)} g_0 \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{(3-\nu_0)(1+\nu_0)}{8(1-\nu_0)^2} g_0^* \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} +$$

$$+ \frac{\alpha_t^0}{1-\nu_0} g_0 T + \frac{5-3\nu_0}{(1-\nu_0)^2}\alpha_t^0 g_0^* \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0, \quad (14)$$

$$\sigma_{xy}F - G_0^* v - \frac{1-3\nu_0}{4(1-\nu_0^2)} g_0 \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{(3-\nu_0)(1+\nu_0)}{8(1-\nu_0)^2} g_0^* \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = 0,$$

где

$$\Lambda = 2\lambda\delta, \quad A^0 = 4\alpha_0 h, \quad F = 4h\delta, \quad I = \frac{4}{3}\delta h^3, \quad G_0^* = 2G_0\delta.$$

Рассмотрим тонкую полубесконечную пластинку с защемленным подкрепленным краем. По краю $x = 0$ движется с постоянной скоростью V линейный источник тепла плотностью $W = \frac{q}{2\delta}\,\delta(x,\ y - V\tau)$, где $\delta(\xi)$ — дельта-функция Дирака. Боковые поверхности $z = \pm\delta$ пластинки теплоизолированы. Определим возникающее при этом квазистационарное поле и вызываемые им температурные напряжения на контуре спая стержня и пластинки.

Уравнение теплопроводности в подвижной системе координат $x_1 = x$ и $y_1 = y - V\tau$ запишется в виде [1]

$$\Delta T + 2\omega \frac{\partial T}{\partial y_1} = 0, \quad x > 0, \quad (15)$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_1^2}$ — оператор Лапласа, $\omega = \frac{V}{2a}$. Граничное условие на бесконечности и условие (13) в подвижной системе координат выразятся так:

$$T_{|x,|y_1|\to\infty} = 0, \quad \Lambda \frac{\partial T}{\partial x} + \Lambda_0 \frac{\partial^2 T}{\partial y_1^2} - A^0 T + 2a\omega C_0^* \frac{\partial T}{\partial y_1} = -\frac{q}{2}\delta(y_1)$$

$$\text{при } x = 2h. \quad (16)$$

Применяя к выражениям (15), (16) интегральное преобразование Фурье по y_1 и переходя к оригиналу, получаем температурное поле в пластинке:

$$T = \frac{q}{2\pi}\int_0^\infty \frac{e^{\varkappa_+(2h-x)}}{\alpha_1^2+\beta_1^2}\{\alpha_1\cos[y_1\eta - \varkappa_-(2h-x)] - \beta_1\sin[y_1\eta - \\ - \varkappa_-(2h-x)]\}\,d\eta, \quad (17)$$

где $\alpha_1 = \Lambda\varkappa_+ + \Lambda_0\eta^2 + A^0$, $\beta_1 = \Lambda\varkappa_- + 2a\omega C_0^*\eta$, $\varkappa_\pm = \sqrt{\frac{\sqrt{\eta^4+4\omega^2\eta^2}\pm\eta^2}{2}}$.

Для определения вызываемых температурным полем (17) напряжений воспользуемся формулами (1), соотношениями (2) и уравнениями (3) и (4), опуская индекс «0» и заменяя в них y на y_1. Пренебрегая в формулах (14) жесткостью на изгиб g_0^* и заменяя y на y_1, находим

$$\sigma_{xx}F - \frac{2G_0^*}{1-\nu_0}u + \frac{1-3\nu_0}{4(1-\nu_0^2)}g_0\frac{\partial v}{\partial y_1} + \frac{\alpha_t^0}{1-\nu_0}g_0T = 0, \quad (18)$$

$$\sigma_{xy}F - G_0^*v - \frac{1-3\nu_0}{4(1-\nu_0^2)}g_0\frac{\partial u}{\partial y_1} = 0$$

при $x = 2h$.

На бесконечности имеем такие граничные условия:

$$\sigma_{xx|x,|y_1|\to\infty} = 0, \quad \sigma_{xy|x,|y_1|\to\infty} = 0. \quad (19)$$

Применяя к выражениям (1)—(4), в которые внесены указанные выше изменения, и к граничным условиям (18), (19) преобразование Фурье по y_1, решаем полученные уравнения с учетом граничных условий. Подставляя найденные $\bar\chi$ и $\bar\Phi$ в трансформированные формулы (1) (индекс «0» опущен), находим трансформанты компонент напряжений на стыке $x = 2h$ пластинки с подкрепляющим стержнем. Переходя к оригиналам, получаем

$$\sigma_{xx} = \frac{E\alpha_t q\omega}{4\pi\Lambda}\int_0^\infty \frac{1}{\omega^2A(\zeta)^2+B(\zeta)^2}\{[\omega A(\zeta)\varphi(\zeta)+B(\zeta)\psi(\zeta)]\cos\zeta\xi + \\ + [-\omega A(\zeta)\psi(\zeta)+B(\zeta)\varphi(\zeta)]\sin\zeta\xi\}\,d\zeta,$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E\alpha_t q\omega}{4\pi\Lambda}\int_0^\infty \frac{1}{\omega^2A(\zeta)^2+B(\zeta)^2}\{[\omega A(\zeta)\varphi_1(\zeta)+B(\zeta)\psi_1(\zeta)]\cos\zeta\xi + \\ + [-\omega A(\zeta)\psi_1(\zeta)+B(\zeta)\varphi_1(\zeta)]\sin\zeta\xi\}\,d\zeta, \quad (20)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{E\alpha_t q\omega}{4\pi\Lambda}\int_0^\infty \frac{1}{\omega^2A(\zeta)^2+B(\zeta)^2}\{[\omega A(\zeta)\psi_2(\zeta)-B(\zeta)\varphi_2(\zeta)]\cos\zeta\xi + \\ + [\omega A(\zeta)\varphi_2(\zeta)+B(\zeta)\psi_2(\zeta)]\sin\zeta\xi\}\,d\zeta,$$

где

$$A(\zeta) = \varkappa_2 + 2\omega\frac{C_0^*}{C^*}\zeta, \quad B(\zeta) = \omega\varkappa_1 + \frac{1}{\Lambda}(\Lambda_0\omega^2\zeta^2 + A^0), \quad C^* = 2\delta c_v,$$

$$\varphi(\zeta) = \frac{1}{f}(M\zeta^3 + L\varkappa_1\zeta^2 + N\zeta^2 + C\varkappa_1\zeta + H\zeta + D\varkappa_1) - \zeta,$$

$$\psi(\zeta) = \frac{1}{f}(P\zeta^2 - L\varkappa_2\zeta^2 - C\varkappa_2\zeta + S\zeta - D\varkappa_2),$$

$$\varphi_1(\zeta) = \zeta - \frac{1}{f}(M_1\zeta^3 + L_1\varkappa_1\zeta^2 + N\zeta^2 + C\varkappa_1\zeta + H_1\zeta + D_1\varkappa_1),$$

$$\psi_1(\zeta) = -2 - \frac{1}{f}(P_1\zeta^2 - L_1\varkappa_2\zeta^2 - C\varkappa_2\zeta + S_1\zeta - D_1\varkappa_2),$$

$$\varphi_2(\zeta) = -\varkappa_1 + \frac{1}{f}(L\zeta^3 + M\varkappa_1\zeta^2 + N\zeta^2 + C\varkappa_1\zeta + D\zeta + H\varkappa_1),$$

$$\psi_2(\zeta) = \varkappa_2 - \frac{1}{f}(M\varkappa_2\zeta^2 + C\varkappa_2\zeta - S_2\zeta + H\varkappa_2),$$

$$\zeta = \frac{\eta}{\omega}, \quad \xi = y_1\omega, \quad \varkappa_{1,2} = \sqrt{\frac{\zeta\sqrt{\zeta^2+4} \pm \zeta^2}{2}}, \quad f = a_1\zeta^2 + b_1\zeta + d_1,$$

$$M = \frac{(1+\nu)\,\omega^2}{(1-\nu)^2}\left[4G^2F^2(1+\nu) - \frac{GF\nu(1-3\nu_0)}{1-\nu_0^2}g_0 - \frac{(1-3\nu_0)^2(1-\nu)}{16(1-\nu_0^2)^2}g_0^2\right],$$

$$M_1 = \frac{(1+\nu)\,\omega^2}{(1-\nu)^2}\left[-4G^2F^2(1+\nu) + \frac{GF(1-3\nu_0)(2+\nu)}{1-\nu_0^2}g_0 - \frac{(1-3\nu_0)^2(3+\nu)}{16(1-\nu_0^2)^2}g_0^2\right],$$

$$L = \frac{(1-3\nu_0)(1+\nu)\,\omega^2}{(1-\nu_0^2)(1-\nu)^2}g_0\left[GF - \frac{1-3\nu_0}{8(1-\nu_0^2)}g_0\right],$$

$$L_1 = \frac{(1+\nu)\,\omega^2}{(1-\nu)^2}\left[8G^2F^2(1+\nu) - \frac{GF(1-3\nu_0)(1+2\nu)}{1-\nu_0^2}g_0 + \frac{\nu(1-3\nu_0)^2}{8(1-\nu_0^2)^2}g_0^2\right],$$

$$N = \frac{4G_0^*GF(1+\nu)\,\omega}{(1-\nu)^2}, \quad C = \frac{8G_0^*GF(1+\nu)\,\omega}{(1-\nu_0)(1-\nu)^2}, \quad H = \frac{2G_0^{*2}(1+\nu)}{(1-\nu_0)(1-\nu)},$$

$$H_1 = \frac{2G_0^{*2}(1+\nu)(3+\nu)}{(1-\nu_0)(1-\nu)^2}, \quad D = \frac{4G_0^{*2}(1+\nu)}{(1-\nu_0)(1-\nu)^2}, \quad D_1 = -\frac{4G_0^{*2}(1+\nu)\,\nu}{(1-\nu_0)(1-\nu)^2},$$

$$P = -\frac{\alpha_t^0\omega^2}{\alpha_t(1-\nu_0)(1-\nu)}g_0\left[\frac{4GF(1+\nu)}{1-\nu} + \frac{1-3\nu_0}{2(1-\nu_0^2)}g_0\right],$$

$$P_1 = \frac{\alpha_t^0\omega^2}{\alpha_t(1-\nu_0)(1-\nu)^2}g_0\left[4GF(1+\nu) - \frac{(1-3\nu_0)(3+\nu)}{2(1-\nu_0^2)}g_0\right],$$

$$S = -\frac{4\alpha_t^0G_0^*g_0}{\alpha_t(1-\nu_0)(1-\nu)^2}, \quad S_1 = \frac{4\alpha_t^0G_0^*\nu g_0}{\alpha_t(1-\nu_0)(1-\nu)^2},$$

$$S_2 = -\frac{2\alpha_t^0G_0^*g_0}{\alpha_t(1-\nu_0)(1-\nu)},$$

$$a_1 = \frac{(1+\nu)\,\omega^2}{1-\nu}\left[\frac{4G^2F^2(1+\nu)}{1-\nu} + \frac{GF(1-3\nu_0)}{1-\nu_0^2}g_0 - \frac{(1-3\nu_0)^2(3-\nu)}{16(1-\nu_0^2)^2(1-\nu)}g_0^2\right],$$

$$b_1 = \frac{4G_0^*GF(1+\nu)(3-\nu_0)\,\omega}{(1-\nu_0)(1-\nu)^2}, \quad d_1 = \frac{2G_0^{*2}(1+\nu)(3-\nu)}{(1-\nu_0)(1-\nu)^2}.$$

Выражения (20) дают возможность изучать температурные напряжения на стыке стеклянных дисков, подкрепленных защемленными коваровыми стержнями, при микроплазменной сварке.

ЛИТЕРАТУРА

1. Подстригач Я. С., Коляно Ю. М. Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках. «Наукова думка», К., 1972.
2. Новацкий В. Вопросы термоупругости. Изд-во АН СССР, М., 1962.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию в декабре 1973 г.