ЛИТЕРАТУРА

1. Подстригач Я. С., Коляно Ю. М. Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках. «Наукова думка», К., 1972.
2. Диткин В. А., Прудников А. П. Справочник по операционному исчислению. «Высшая школа», М., 1965.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию в декабре 1973 г.

УСЛОВИЯ НЕИДЕАЛЬНОГО КОНТАКТА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОБОБЩЕННЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ТЕМПЕРАТУРНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ РАЗНОРОДНЫХ ТЕЛ

Ю. М. Коляно, Е. П. Хомякевич

Пусть два тела соединены между собой тонким промежуточным слоем. Тепловые характеристики соединяющихся тел и слоя различны. Теплообмен с окружающей средой осуществляется по закону Ньютона, а между телами и слоем осуществляется идеальный тепловой контакт.

В этом случае для определения температурного поля в системе имеем уравнения теплопроводности [2]

$$\lambda_i \Delta t_i = c_i l_i \frac{\partial t_i}{\partial \tau} - l_i w_i, \quad i = 0,\ 1,\ 2, \tag{1}$$

обобщенные условия идеального теплового контакта

$$t_0 = t_1,\ \frac{\lambda_0}{\tau_r^{(0)}} \int_0^\tau e^{\frac{\zeta-\tau}{\tau_r^{(0)}}} \frac{\partial t_0}{\partial n_1} d\zeta = \frac{\lambda_1}{\tau_r^{(1)}} \int_0^\tau e^{\frac{\zeta-\tau}{\tau_r^{(1)}}} \frac{t_1}{\partial n_1} d\zeta \text{ на } S_1,$$

$$t_0 = t_2,\ \frac{\lambda_0}{\tau_r^{(0)}} \int_0^\tau e^{\frac{\zeta-\tau}{\tau_r^{(0)}}} \frac{\partial t_0}{\partial n_2} d\zeta = \frac{\lambda_2}{\tau_r^{(2)}} \int_0^\tau e^{\frac{\zeta-\tau}{\tau_r^{(2)}}} \frac{\partial t_2}{\partial n_2} d\zeta \text{ на } S_2, \tag{2}$$

обобщенные граничные условия на поверхности S_i'

$$\frac{\partial t_i}{\partial n_i'} + \frac{\alpha_i}{\lambda_i} l_i (t_i - t_c) = 0 \tag{3}$$

и начальные условия

$$t_i|_{\tau=0} = t_0^{(0)}, \quad \dot{t}_i|_{\tau=0} = 0. \tag{4}$$

Здесь t_i — температуры промежуточного слоя, первого и второго тел; λ_i, c_i — соответственно их теплопроводности и теплоемкости; α_i — коэффициенты теплоотдачи с поверхностей S_i' (наружные части поверхностей, ограничивающих промежуточный слой, первое и второе тела); $\bar{n}_1 = -\bar{n}_2 = \bar{n}$, $\bar{n}$ — нормаль к поверхности S_0, $\bar{n}_1$ — нормаль к поверхности S_1, $\bar{n}_2$ — нормаль к поверхности S_2; S_0 — серединная поверхность промежуточного слоя, S_1, S_2 — поверхности контакта первого и второго тел со слоем; w_i — плотность источников тепла; $l_i = 1 + \tau_r^{(i)} \frac{\partial}{\partial \tau}$; $\tau_2^{(i)}$ — время релаксации теплового потока q_i.

Перепишем уравнение теплопроводности для слоя, отнесенного к смешанной системе координат (α, β, γ), в виде

$$\frac{\partial^2 t_0}{\partial \gamma^2} + p^2 t_0 = -\frac{l_0 w_0}{\lambda_0}, \tag{5}$$

где

$$p^2 = \Delta - \frac{c_0}{\lambda_0} l_0 \frac{\partial}{\partial \tau}, \quad \Delta = \frac{1}{AB}\left[\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{B}{A}\frac{\partial}{\partial \alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{A}{B}\frac{\partial}{\partial \beta}\right)\right].$$

Температура слоя удовлетворяет соотношениям (2) и условиям

$$\frac{\partial t_0}{\partial n_0'} + \frac{\alpha_0}{\lambda_0} l_0 (t_0 - t_c) = 0 \text{ на } S_0', \tag{6}$$

$$t_0 = t_0^{(0)}, \quad \dot{t}_0 = 0 \text{ при } \tau = 0, \tag{7}$$

где t_c — температура среды, омывающей поверхность S_0'; $\overline{n}_0'$ — нормаль к этой поверхности; A, B — коэффициенты первой квадратичной формы поверхности S_0.

Если усреднить уравнения (5) — (7) в соответствии с интегральными характеристиками температуры [3]

$$T = \frac{1}{2\delta} \int_{-\delta}^{\delta} t_0 d\gamma, \quad T^* = \frac{3}{2\delta^2} \int_{-\delta}^{\delta} \gamma t_0 d\gamma, \tag{8}$$

соответственно получим

$$\Lambda_0 p^2 T + \lambda_0 \left[\left(\frac{\partial t_0}{\partial \gamma} \right)^+ - \left(\frac{\partial t_0}{\partial \gamma} \right)^- \right] = - l_0 W_0,$$

$$\Lambda_0 p^2 T^* + 3\lambda_0 \left[\left(\frac{\partial t_0}{\partial \gamma} \right)^+ + \left(\frac{\partial t_0}{\partial \gamma} \right)^- \right] - \frac{6}{r_0} (t_0^+ - t_0^-) = - l_0 W_0^*, \tag{9}$$

$$\frac{\partial T}{\partial n_0'} + \frac{\alpha_0}{\lambda_0} l_0 (T - T_c) = 0, \quad \frac{\partial T^*}{\partial n_0'} + \frac{\alpha_0}{\lambda_0} l_0 (T^* - T_c^*) = 0 \text{ на } S_0',$$

$$T = t_0^{(0)}, \quad \dot{T} = 0, \quad T^* = 0, \quad \dot{T}^* = 0 \text{ при } \tau = 0, \tag{10}$$

где 2δ — толщина слоя; $\Lambda_0 = 2\lambda_0 \delta$; $r_0 = \frac{2\delta}{\lambda_0}$;

$$\left(\frac{\partial t_0}{\partial \gamma} \right)^{\pm} = \left(\frac{\partial t_0}{\partial \gamma} \right)_{\gamma = \pm \delta}; \quad t_0^{\pm} = t_0 |_{\gamma = \pm \delta}; \quad W_0 = \int_{-\delta}^{\delta} w_0 d\gamma,$$

$$W^* = \frac{3}{\delta} \int_{-\delta}^{\delta} \gamma w_0 d\gamma —$$

отнесенная к единице площади срединной плоскости слоя плотность источников тепла и плотность «моментов» источников тепла;

$$T_c = \frac{1}{2\delta} \int_{-\delta}^{\delta} t_c d\gamma, \quad T_c^* = \frac{3}{2\delta^2} \int_{-\delta}^{\delta} \gamma t_c d\gamma.$$

Используя операторный метод, общее решение уравнения (5) записываем в виде

$$t_0 = \frac{\cos p\gamma}{2 \cos p\delta} \left[t_0^+ + t_0^- - \frac{l_0 (Q_0^+ + Q_0^-)}{\lambda_0 p^2} \right] +$$

$$+ \frac{\sin p\gamma}{2 \sin p\delta} \left[t_0^+ - t_0^- - \frac{l_0 (Q_0^+ - Q_0^-)}{\lambda_0 p^2} \right] + \frac{l_0 Q_0}{\lambda_0 p^2}, \tag{11}$$

где

$$Q_0^{\pm} = Q_0 |_{\gamma = \pm \delta}, \quad Q_0 = p \int_0^{\gamma} \sin p (\zeta - \gamma) w_0 d\zeta.$$

Учитывая формулы (8) и (11), находим

$$T = \frac{\operatorname{tg} p\delta}{2p\delta} \left[t_0^+ + t_0^- - \frac{l_0 (Q_0^+ + Q_0^-)}{\lambda_0 p^2} \right] + \frac{l_0 q_0}{\lambda_0 p^2},$$

$$T^* = \frac{3}{2} \frac{1 - p\delta \operatorname{ctg} p\delta}{p^2 \delta^2} \left[t_0^+ - t_0^- - \frac{l_0 (Q_0^+ - Q_0^-)}{\lambda_0 p^2} \right] + \frac{l_0 q_0^*}{\lambda_0 p^2}, \tag{12}$$

где

$$q_0 = \frac{1}{2\delta}\int\limits_{-\delta}^{\delta} Q_0 d\gamma, \quad q_0^* = \frac{3}{2\delta^2}\int\limits_{-\delta}^{\delta}\gamma Q_0 d\gamma.$$

Подставляя формулы (12) в (9) и (10), учитывая условия (2) и переходя в полученных соотношениях к пределу при $\delta \to 0$, сохраняя при этом постоянными величины Λ_0, C_0, r_0, W_0 и W_0^*, получаем следующие обобщенные условия неидеального теплового контакта тел, соединенных тонким промежуточным слоем:

$$\Lambda_0\Delta(t_1+t_2) + 2\tau_r^{(0)}\left(\frac{\lambda_1}{\tau_r^{(1)}}\frac{\partial t_1}{\partial n_1} + \frac{\lambda_2}{\tau_r^{(2)}}\frac{\partial t_2}{\partial n_2}\right) +$$

$$+ 2\left(1-\frac{\tau_r^{(0)}}{\tau_r^{(1)}}\right)\frac{\lambda_1}{\tau_r^{(1)}}\int\limits_0^{\tau} e^{\frac{\zeta-\tau}{\tau_r^{(1)}}}\frac{\partial t_1}{\partial n_1}d\zeta + 2\left(1-\frac{\tau_r^{(0)}}{\tau_r^{(2)}}\right)\frac{\lambda_2}{\tau_r^{(2)}}\times$$

$$\times\int\limits_0^{\tau} e^{\frac{\zeta-\tau}{\tau_r^{(2)}}}\frac{\partial t_2}{\partial n_2}d\zeta = C_0 l_0\frac{\partial(t_1+t_2)}{\partial\tau} - 2l_0W_0,$$

$$\Lambda_0\Delta(t_1-t_2) + 6\tau_r^{(0)}\left(\frac{\lambda_1}{\tau_r^{(1)}}\frac{\partial t_1}{\partial n_1} - \frac{\lambda_2}{\tau_r^{(2)}}\frac{\partial t_2}{\partial n_2}\right) +$$

$$+ 6\left(1-\frac{\tau_r^{(0)}}{\tau_r^{(1)}}\right)\frac{\lambda_1}{\tau_r^{(1)}}\int\limits_0^{\tau} e^{\frac{\zeta-\tau}{\tau_r^{(1)}}}\frac{\partial t_1}{\partial n_1}d\zeta - 6\left(1-\frac{\tau_r^{(0)}}{\tau_r^{(2)}}\right)\frac{\lambda_2}{\tau_r^{(2)}}\int\limits_0^{\tau} e^{\frac{\zeta-\tau}{\tau_r^{(2)}}}\frac{\partial t_2}{\partial n_2}d\zeta -$$

$$-\frac{12}{r_0}(t_1-t_2) = C_0 l_0\frac{\partial(t_1-t_2)}{\partial\tau} - 2l_0W_0^* \text{ на } S_0; \tag{13}$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\partial(t_1+t_2)}{\partial n_0'} + \frac{\alpha_0}{\lambda_0}l_0\left(\frac{t_1+t_2}{2} - T_c\right) = 0,\\ &\frac{1}{2}\frac{\partial(t_1-t_2)}{\partial n_0'} + \frac{\alpha_0}{\lambda_0}l_0\left(\frac{t_1-t_2}{2} - T_c^*\right) = 0\end{aligned}\right\} \text{ на } L_0; \tag{14}$$

$$\frac{t_1+t_2}{2} = t_0^{(0)}, \quad \frac{\dot t_1+\dot t_2}{2} = 0, \quad \frac{t_1-t_2}{2} = 0, \quad \frac{\dot t_1-\dot t_2}{2} = 0 \quad \text{при } \tau = 0 \text{ на } S_0. \tag{15}$$

Рассмотрим частные случаи условий (13).

1. Пусть $\tau_r^{(0)} \to 0$, $\tau_r^{(1)} \neq 0$, $\tau_r^{(2)} \neq 0$. В этом случае получаем формулы:

$$\Lambda_0\Delta(t_1+t_2) + \frac{2\lambda_1}{\tau_r^{(1)}}\int\limits_0^{\tau} e^{\frac{\zeta-\tau}{\tau_r^{(1)}}}\frac{\partial t_1}{\partial n_1}d\zeta + \frac{2\lambda_2}{\tau_r^{(2)}}\int\limits_0^{\tau} e^{\frac{\zeta-\tau}{\tau_r^{(2)}}}\frac{\partial t_2}{\partial n_2}d\zeta =$$

$$= C_0\frac{\partial(t_1+t_2)}{\partial\tau} - 2W_0,$$

$$\Lambda_0\Delta(t_1-t_2) + \frac{6\lambda_1}{\tau_r^{(1)}}\int\limits_0^{\tau} e^{\frac{\zeta-\tau}{\tau_r^{(1)}}}\frac{\partial t_1}{\partial n_1}d\zeta - \frac{12}{r_0}(t_1-t_2) -$$

$$-6\frac{\lambda_2}{\tau_r^{(2)}}\int\limits_0^{\tau} e^{\frac{\zeta-\tau}{\tau_r^{(2)}}}\frac{\partial t_2}{\partial n_2}d\zeta = C_0\frac{\partial(t_1-t_2)}{\partial\tau} - 2W_0^* \text{ на } S_0. \tag{16}$$

2. Если $\tau_r^{(0)} \to 0$, $\tau_r^{(1)} \to 0$, $\tau_r^{(2)} \neq 0$, то

$$\Lambda_0\Delta(t_1+t_2) + 2\lambda_1\frac{\partial t_1}{\partial n_1} + 2\frac{\lambda_2}{\tau_r^{(2)}}\int\limits_0^{\tau} e^{\frac{\zeta-\tau}{\tau_r^{(2)}}}\frac{\partial t_2}{\partial n_2}d\zeta = C_0\frac{\partial(t_1+t_2)}{\partial\tau} - 2W_0, \tag{17}$$

$$\Lambda_0\Delta(t_1-t_2)-6\lambda_1\frac{\partial t_1}{\partial n_1}-6\frac{\lambda_2}{\tau_r^{(2)}}\int\limits_0^\tau e^{\frac{\zeta-\tau}{\tau_r^{(2)}}}\frac{\partial t_2}{\partial n_2}d\zeta-\frac{12}{r_0}(t_1-t_2)=$$
$$=C_0\frac{\partial(t_1-t_2)}{\partial\tau}-2W_0^*\ \text{на}\ S_0.$$

3. Для металлов ($\tau_r^{(0)}=\tau_r^{(1)}=\tau_r^{(2)}=\tau_r$) получаем

$$\Lambda_0\Delta(t_1+t_2)+2\left(\lambda_1\frac{\partial t_1}{\partial n_1}+\lambda_2\frac{\partial t_2}{\partial n_2}\right)=C_0l\frac{\partial(t_1+t_2)}{\partial\tau}-2lW_0,$$

$$\Lambda_0\Delta(t_1-t_2)+6\left(\lambda_1\frac{\partial t_1}{\partial n_1}-\lambda_2\frac{\partial t_2}{\partial n_2}\right)-\frac{12}{r_0}(t_1-t_2)=$$
$$=C_0l\frac{\partial(t_1-t_2)}{\partial\tau}-2lW_0^*\ \text{на}\ S_0. \tag{18}$$

4. Наконец, умножив каждый член условий (14) на r_0 и пренебрегая членами, содержащими произведения $\Lambda_0 r_0$, $C_0 r_0$, получим

$$\tau_r^{(0)}\left(\frac{\lambda_1}{\tau_r^{(1)}}\frac{\partial t_1}{\partial n_1}+\frac{\lambda_2}{\tau_r^{(2)}}\frac{\partial t_2}{\partial n_2}\right)+\left(1-\frac{\tau_r^{(0)}}{\tau_r^{(1)}}\right)\frac{\lambda_1}{\tau_r^{(1)}}\int\limits_0^\tau e^{\frac{\zeta-\tau}{\tau_r^{(1)}}}\frac{\partial t_1}{\partial n_1}d\zeta+$$
$$+\left(1-\frac{\tau_r^{(0)}}{\tau_r^{(2)}}\right)\frac{\lambda_2}{\tau_r^{(2)}}\int\limits_0^\tau e^{\frac{\zeta-\tau}{\tau_r^{(2)}}}\frac{\partial t_2}{\partial n_2}d\zeta=-l_0W_0, \tag{19}$$

$$\tau_r^{(0)}\left(\frac{\lambda_1}{\tau_r^{(1)}}\frac{\partial t_1}{\partial n_1}-\frac{\lambda_2}{\tau_r^{(2)}}\frac{\partial t_2}{\partial n_2}\right)+\left(1-\frac{\tau_r^{(0)}}{\tau_r^{(1)}}\right)\frac{\lambda_1}{\tau_r^{(1)}}\int\limits_0^\tau e^{\frac{\zeta-\tau}{\tau_r^{(1)}}}\frac{\partial t_1}{\partial n_1}d\zeta-$$
$$-\left(1-\frac{\tau_r^{(0)}}{\tau_r^{(2)}}\right)\frac{\lambda_2}{\tau_r^{(2)}}\int\limits_0^\tau e^{\frac{\zeta-\tau}{\tau_r^{(2)}}}\frac{\partial t_2}{\partial n_2}d\zeta-\frac{2}{r_0}(t_1-t_2)=-\frac{l_0W_0^*}{3}\ \text{на}\ S_0.$$

В классическом случае ($\tau_r^{(0)}=\tau_r^{(1)}=\tau_r^{(2)}=0$) при $w_0=0$ эти условия приведены в монографии [1]. Условия жесткого сцепления на границе слой — тело запишутся так [4]:

$$\left.\begin{aligned}\bar\sigma_\gamma^{(0)}&=\bar\sigma_\gamma^{(1)},\quad \bar U_0=\bar u_1\quad \text{при}\ \gamma=+\delta,\\ \bar\sigma_\gamma^{(0)}&=\bar\sigma_\gamma^{(2)},\quad \bar U_0=\bar u_2\quad \text{при}\ \gamma=-\delta.\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Здесь $\bar\sigma_\gamma$ — вектор напряжений, действующий на поверхности $\gamma=\text{const}$ и имеющий вид

$$\bar\sigma_\gamma=\sigma_{\alpha\gamma}\bar e_1+\sigma_{\beta\gamma}\bar e_2+\sigma_{\gamma\gamma}\bar e_3;$$

$\bar e_1, \bar e_2, \bar e_3$ — орты координатного триедра на поверхности S_0; $\bar U_0$, $\bar u_1$, $\bar u_2$ — векторы перемещений промежуточного слоя, первого и второго тела соответственно.

Уравнения движения элемента оболочки с учетом выражений (20) имеют вид [5]

$$(1+k_1\delta)(1+k_2\delta)\bar\sigma_\gamma^{(1)}-(1-k_1\delta)(1-k_2\delta)\bar\sigma_\gamma^{(2)}-$$
$$-\rho_0\int\limits_{-\delta}^{\delta}(1+k_1\gamma)(1+k_2\gamma)\frac{\partial^2\bar U_0}{\partial\tau^2}d\gamma=-\frac{1}{AB}\left(\frac{\partial B\bar N_1}{\partial\alpha}+\frac{\partial A\bar N_2}{\partial\beta}\right),$$
$$\delta\bar e_n\times\Big[(1+k_1\delta)(1+k_2\delta)\bar\sigma_\gamma^{(1)}+(1-k_1\delta)(1-k_2\delta)\bar\sigma_\gamma^{(2)}-$$
$$-\frac{\rho_0}{\delta}\int\limits_{-\delta}^{\delta}(1+k_1\delta)(1+k_2\delta)\frac{\partial^2\bar U_0}{\partial\tau^2}\gamma d\gamma\Big]=$$
$$=-\frac{1}{AB}\left(\frac{\partial B\bar M_1}{\partial\alpha}+\frac{\partial A\bar M_2}{\partial\beta}+B\bar r_\alpha\times\bar N_1+A\bar r_\beta\times\bar N_2\right), \tag{21}$$

где k_1, k_2 — главные кривизны поверхности S_0; $\bar{r}_\alpha = \frac{\partial \bar{r}}{\partial \alpha}$; $\bar{r}_\beta = \frac{\partial \bar{r}}{\partial \beta}$; $\bar{r}$ — радиус-вектор точки на поверхности S_0; ρ_0 — плотность материала промежуточного слоя.

Компоненты вектора перемещений промежуточного слоя выражаются через компоненты вектора перемещений срединной поверхности по формулам [5]

$$U_0(\alpha, \beta, \gamma) = u_0(\alpha, \beta) - \gamma\vartheta_0, \quad V_0(\alpha, \beta, \gamma) = v_0(\alpha, \beta) - \gamma\vartheta_0^*, \qquad (22)$$
$$W_0(\alpha, \beta, \gamma) = w_0(\alpha, \beta),$$

где

$$\vartheta_0 = \frac{1}{A}\frac{\partial w_0}{\partial \alpha} - k_1 u_0, \quad \vartheta_0^* = \frac{1}{B}\frac{\partial w_0}{\partial \beta} - k_2 v_0; \qquad (23)$$

$\bar{N}_1$, $\bar{M}_1$ и $\bar{N}_2$, $\bar{M}_2$ — векторы усилия и момента, действующие в сечении $\alpha = \text{const}$ и $\beta = \text{const}$ соответственно.

Раскрывая в равенствах (21) векторные произведения, учитывая равенства (22), (23) и переходя в них к пределу при $\delta \to 0$, сохраняя при этом жесткости на растяжение — сжатие $g_0 = \frac{2\delta E_0}{1 - \nu_0^2}$ и на изгиб $g_0^* = \frac{2}{3} \times \frac{\delta^3 E_0}{1 - \nu_0^2}$, $\rho_0^{(0)} = 2\delta\rho_0$, $\rho_0^* = \frac{2}{3}\rho_0\delta^3$ постоянными, находим термоупругие условия на S_0:

$$\bar{u}_0 = \bar{u}_1 = \bar{u}_2,$$
$$AB(\sigma_{\alpha\gamma}^{(2)} - \sigma_{\alpha\gamma}^{(1)}) = \frac{\partial BN_1}{\partial \alpha} - \frac{\partial B}{\partial \alpha}N_2 + \frac{\partial AS_{12}}{\partial \beta} + \frac{\partial A}{\partial \beta}S_{12} +$$
$$+ k_1\left(\frac{\partial BM_1}{\partial \alpha} - \frac{\partial B}{\partial \alpha}M_2 + 2\frac{\partial AH_{12}}{\partial \beta} + 2\frac{k_2}{k_1}\frac{\partial A}{\partial \beta}H_{12}\right) - AB(\rho_0^{(0)}\ddot{u}_0 + \rho_0^* k_1 \ddot{\vartheta}_0),$$
$$AB(\sigma_{\beta\gamma}^{(2)} - \sigma_{\beta\gamma}^{(1)}) = \frac{\partial AN_2}{\partial \beta} - \frac{\partial A}{\partial \beta}N_1 + \frac{\partial BS_{12}}{\partial \alpha} + \frac{\partial B}{\partial \alpha}S_{12} + k_2\left(\frac{\partial AM_2}{\partial \beta} - \frac{\partial A}{\partial \beta}M_1 +\right.$$
$$\left. + 2\frac{\partial BH_{12}}{\partial \alpha} + 2\frac{k_1}{k_2}\frac{\partial B}{\partial \alpha}H_{12}\right) - AB(\rho_0^{(0)}\ddot{v}_0 + \rho_0^* k_2 \ddot{\vartheta}_0^*), \qquad (24)$$
$$AB(\sigma_{\gamma\gamma}^{(2)} - \sigma_{\gamma\gamma}^{(1)}) = \frac{\partial}{\partial \alpha}\frac{1}{A}\left(\frac{\partial BM_1}{\partial \alpha} - \frac{\partial B}{\partial \alpha}M_2 + \frac{\partial AH_{12}}{\partial \beta} + \frac{\partial A}{\partial \beta}H_{12}\right) +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial \beta}\frac{1}{B}\left(\frac{\partial AM_2}{\partial \beta} - \frac{\partial A}{\partial \beta}M_1 + \frac{\partial BH_{12}}{\partial \alpha} + \frac{\partial B}{\partial \alpha}H_{12}\right) - AB\rho_0^{(0)}\ddot{w}_0 -$$
$$- \rho_0^*\left(\ddot{\vartheta}_0\frac{\partial B}{\partial \alpha} + \ddot{\vartheta}_0^*\frac{\partial A}{\partial \beta}\right) - AB(k_1 N_1 + k_2 N_2),$$

где

$$N_1 = g_0[\varepsilon_1^{(0)} + \nu_0\varepsilon_2^{(0)} - \alpha_t^{(0)}(1 + \nu_0)T], \quad N_2 = g_0[\varepsilon_2^{(0)} + \nu_0\varepsilon_1^{(0)} - \alpha_t^{(0)}(1 + \nu_0)T],$$
$$M_1 = g_0^*\left[\varkappa_1^{(0)} + \nu_0\varkappa_2^{(0)} - \frac{\alpha_t^{(0)}}{\delta}(1 + \nu_0)T^*\right], \qquad (25)$$
$$M_2 = g_0^*\left[\varkappa_2^{(0)} + \nu_0\varkappa_1^{(0)} - \frac{\alpha_t^{(0)}}{\delta}(1 + \nu_0)T^*\right],$$
$$S_{12} = \frac{1 - \nu_0}{2}g_0\varepsilon_{12}^{(0)}, \quad H_{12} = (1 - \nu_0)g_0^*\varkappa_{12}^{(0)},$$

$\varepsilon_1^{(0)}$, $\varepsilon_2^{(0)}$, $\varepsilon_{12}^{(0)}$, $\varkappa_1^{(0)}$, $\varkappa_2^{(0)}$, $\varkappa_{12}^{(0)}$ — компоненты деформации поверхности S_0, α_t^0 — температурный коэффициент линейного расширения, ν_0 — коэффициент Пуассона, E_0 — модуль Юнга.

Выражения (13) — (15) и (24) представляют собой искомые условия неидеального контакта для определения обобщенных динамических температурных напряжений разнородных тел.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боли Б., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений. «Мир», М., 1964.
2. Коляно Ю. М. Основы теории и расчет нестационарных температурных полей и напряжений в анизотропных и изотропных пластинках с теплообменом. Автореф. докт. дис. К., 1972.
3. Подстригач Я. С.— ИФЖ, 1963, **6**, 10.
4. Подстригач Я. С., Шевчук П. Р.— Прикладная механика, 1967, **3**, 6.
5. Підстригач Я. С., Ярема С. Я. Температурні напруження в оболонках. Вид-во АН УРСР, К., 1961.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР,
Львовский лесотехнический институт

Поступила в редколлегию в декабре 1973 г.

О РЕШЕНИИ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ОБОБЩЕННОЙ ТЕРМОВЯЗКОУПРУГОСТИ ДЛЯ ПРОСТРАНСТВА

Р. Н. Швец, М. Я. Кравчук

Приведем общее представление решений взаимосвязанной системы уравнений обобщенной термовязкоупругости, с помощью которого найдены сингулярные решения динамической задачи для бесконечного пространства.

Основные уравнения и общее представление их решений. При исследовании напряженно-деформированного состояния вязкоупругой среды будем исходить из обобщенной динамической теории термовязкоупругости, которая учитывает конечную скорость распространения тепла. В этом случае система интегро-дифференциальных уравнений, описывающая движение вязкоупругой среды под действием заданных массовых сил $\vec{F}$ и источников тепла Q определенной плотности с учетом термомеханического эффекта, имеет вид [1, 2, 7]

$$\mu^*\Delta\vec{u} + \left(K^* + \frac{1}{3}\mu^*\right)\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{u} - K^*\alpha_t \operatorname{grad} t = \rho\,\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial\tau^2} - \vec{F}; \tag{1}$$

$$\Delta t - \frac{1}{\varkappa}\frac{\partial t}{\partial\tau} - \frac{1}{c_t}\frac{\partial^2 t}{\partial\tau^2} = \frac{\alpha_t T_0 K^*}{c_e}\left(\frac{1}{\varkappa}\frac{\partial}{\partial\tau} - \frac{1}{c_t}\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right)\operatorname{div}\vec{u} - Q,$$

где $\vec{u}$ — вектор перемещений; T_0 — абсолютная температура; t — ее приращения; τ — время; $\varkappa$, α_t — коэффициенты температуропроводности и объемного температурного расширения; ρ — плотность среды; c_e — теплоемкость единицы объема; Δ — оператор Лапласа; K^* и μ^* — интегро-дифференциальные аналоги модуля объемного расширения и модуля сдвига; $c_t = \sqrt{\frac{\lambda}{c_e\tau_0}}$ — скорость распространения тепла; τ_0 — время релаксации теплового потока; λ — коэффициент теплопроводности.

Общее решение линейной системы уравнений (1) представим в виде

$$\vec{u} = \left(M^*\Delta - \rho\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right)\vec{\Phi} - N^*\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{\Phi} - \alpha_t K^*\operatorname{grad}\Psi,$$

$$t = \left(M^*\Delta - \rho\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right)\Psi; \tag{2}$$

при этом вектор-функция $\vec{\Phi}$ и скалярная функция Ψ должны удовлетворять уравнениям

$$\left(\mu^*\Delta - \rho\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right)\left(M^*\Delta - \rho\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right)\vec{\Phi} = -\vec{F}, \tag{3}$$