Выражения (13) — (15) и (24) представляют собой искомые условия неидеального контакта для определения обобщенных динамических температурных напряжений разнородных тел.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боли Б., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений. «Мир», М., 1964.
2. Коляно Ю. М. Основы теории и расчет нестационарных температурных полей и напряжений в анизотропных и изотропных пластинках с теплообменом. Автореф. докт. дис. К., 1972.
3. Подстригач Я. С.— ИФЖ, 1963, **6**, 10.
4. Подстригач Я. С., Шевчук П. Р.— Прикладная механика, 1967, **3**, 6.
5. Підстригач Я. С., Ярема С. Я. Температурні напруження в оболонках. Вид-во АН УРСР, К., 1961.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР,
Львовский лесотехнический институт

Поступила в редколлегию в декабре 1973 г.

О РЕШЕНИИ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ОБОБЩЕННОЙ ТЕРМОВЯЗКОУПРУГОСТИ ДЛЯ ПРОСТРАНСТВА

Р. Н. Швец, М. Я. Кравчук

Приведем общее представление решений взаимосвязанной системы уравнений обобщенной термовязкоупругости, с помощью которого найдены сингулярные решения динамической задачи для бесконечного пространства.

Основные уравнения и общее представление их решений. При исследовании напряженно-деформированного состояния вязкоупругой среды будем исходить из обобщенной динамической теории термовязкоупругости, которая учитывает конечную скорость распространения тепла. В этом случае система интегро-дифференциальных уравнений, описывающая движение вязкоупругой среды под действием заданных массовых сил $\vec{F}$ и источников тепла Q определенной плотности с учетом термомеханического эффекта, имеет вид [1, 2, 7]

$$\mu^*\Delta\vec{u} + \left(K^* + \frac{1}{3}\mu^*\right)\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{u} - K^*\alpha_t\operatorname{grad}t = \rho\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial\tau^2} - \vec{F}; \quad (1)$$

$$\Delta t - \frac{1}{\varkappa}\frac{\partial t}{\partial\tau} - \frac{1}{c_t}\frac{\partial^2 t}{\partial\tau^2} = \frac{\alpha_t T_0 K^*}{c_e}\left(\frac{1}{\varkappa}\frac{\partial}{\partial\tau} - \frac{1}{c_t}\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right)\operatorname{div}\vec{u} - Q,$$

где $\vec{u}$ — вектор перемещений; T_0 — абсолютная температура; t — ее приращения; τ — время; $\varkappa$, α_t — коэффициенты температуропроводности и объемного температурного расширения; ρ — плотность среды; c_e — теплоемкость единицы объема; Δ — оператор Лапласа; K^* и μ^* — интегро-дифференциальные аналоги модуля объемного расширения и модуля сдвига; $c_t = \sqrt{\frac{\lambda}{c_e\tau_0}}$ — скорость распространения тепла; τ_0 — время релаксации теплового потока; λ — коэффициент теплопроводности.

Общее решение линейной системы уравнений (1) представим в виде

$$\vec{u} = \left(M^*\Delta - \rho\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right)\vec{\Phi} - N^*\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{\Phi} - \alpha_t K^*\operatorname{grad}\Psi,$$
$$t = \left(M^*\Delta - \rho\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right)\Psi; \quad (2)$$

при этом вектор-функция $\vec{\Phi}$ и скалярная функция Ψ должны удовлетворять уравнениям

$$\left(\mu^*\Delta - \rho\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right)\left(M^*\Delta - \rho\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right)\vec{\Phi} = -\vec{F}, \quad (3)$$

$$\left[\left(M^*\Delta - \rho\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right)(\Delta - D) - \gamma_0^*\alpha_t K^* D\Delta\right]\Psi =$$

$$= \gamma_0^* D \operatorname{div}\left(\mu^*\Delta - \rho\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right)\vec{\Phi} - Q, \tag{4}$$

где операторы выражаются формулами

$$M^* = K^* + \frac{4}{3}\mu^*;\quad N^* = K^* + \frac{1}{3}\mu^*;\quad D = \frac{1}{\varkappa}\frac{\partial}{\partial\tau} + \frac{1}{c_t^2}\frac{\partial^2}{\partial\tau^2};$$

$$\gamma_0^* = \frac{\alpha_t T_0 K^*}{c_e}. \tag{5}$$

Учитывая, что решение уравнения (3) можно представить в виде суммы

$$\vec{\Phi} = \vec{\Phi}_0 + \vec{\Phi}_1 + \vec{\Phi}_2, \tag{6}$$

где $\vec{\Phi}_0$ — частное его решение, а функции $\vec{\Phi}_1$ и $\vec{\Phi}_2$ — общие решения уравнений

$$\left(M^*\Delta - \rho\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right)\vec{\Phi}_1 = 0,\quad \left(\mu^*\Delta - \rho\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right)\vec{\Phi}_2 = 0, \tag{7}$$

уравнения (2) — (4) можно преобразовать к более простому виду. Полагая

$$K^*\Psi = K^*\mathrm{X} + \frac{1}{\alpha_t}\frac{N^*}{K^*}\operatorname{div}\vec{\Phi}_1 \tag{8}$$

и подставляя это выражение в уравнение (4) с учетом формул (6) и (7), получаем уравнение для определения неизвестной функции X:

$$\left[\left(M^*\Delta - \rho\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right)(\Delta - D) - \alpha_t\gamma_0^* K^* D\Delta\right]\mathrm{X} = \gamma_0^* D\operatorname{div}\left(\mu^*\Delta - \rho\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right)\vec{\Phi}_0 = Q. \tag{9}$$

Таким образом, общее представление решения системы (1) можно записать в виде

$$\vec{u} = \left(M^*\Delta - \rho\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right)(\vec{\Phi}_0 + \vec{\Phi}_2) - N^*\operatorname{grad}\operatorname{div}(\vec{\Phi}_0 + \vec{\Phi}_2) + \alpha_t K^*\operatorname{grad}\mathrm{X},$$

$$t = \left(M^*\Delta - \rho\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right)\mathrm{X}. \tag{10}$$

Здесь $\vec{\Phi}_0$ — какое-либо частное решение уравнения (3), а $\vec{\Phi}_2$ и X — общее решение второго уравнения (7) и уравнения (9) соответственно.

В случае, когда силы инерции в уравнениях (1) отсутствуют ($\rho = 0$), то в связи с возникновением линейной зависимости решений $\vec{\Phi}_1$ и $\vec{\Phi}_2$ необходимо при решении задачи пользоваться уравнениями (2) — (4), которые при $\rho = 0$ значительно упрощаются. При $K^* = K$, $\mu^* = \mu$, где K и μ — модули упругости, и $c_t = \infty$ соотношения (2) — (10) совпадают с формулами работы [3]. Полагая в уравнениях (4) и (9) $c_t = \infty$, получаем представление решений уравнений термовязкоупругости для случая, когда обобщенное уравнение теплопроводности параболического типа.

Сингулярные решения для пространства. Определим теперь установившееся напряженно-деформированное состояние в бесконечной вязкоупругой среде, вызванное действием в нем сосредоточенных периодических во времени силовых факторов (сосредоточенной силы, момента, центра расширения и т. д.) Силовые факторы, сосредоточенные в точке, будем рассматривать как предельный случай объемных сил [4], действующих в неограниченно малой окрестности этой точки.

Пусть в точке A (l_1, l_2, l_3) приложена сосредоточенная периодическая во времени сила $\vec{P}e^{i(\omega\tau-\varepsilon)}$, которую можно рассматривать как массовую силу

$$\vec{F} = \vec{P}e^{i(\omega\tau-\theta)}\delta(\vec{r} - \vec{l}), \tag{11}$$

где $\delta(\vec{r}-\vec{l})=\delta(x-l_1,\quad y-l_2,\quad z-l_3)$ — функция Дирака, $\vec{r}=\vec{k}_1x+\vec{k}_2y+\vec{k}_3z$, $\vec{l}=\vec{k}_1l_1+\vec{k}_2l_2+\vec{k}_3l_3$, $\vec{P}=\{p_1,p_2,p_3\}$.

Разлагая функцию $\vec{F}$ в ряд в окрестности начала координат, для $\frac{l}{r}\ll 1$ получаем

$$\vec{F}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\vec{P}}{n!}(-1)^n e^{i(\omega\tau-\theta)}(\vec{l}\cdot\vec{\nabla})^n\delta(\vec{r}), \tag{12}$$

где $\vec{\nabla}$ — оператор Гамильтона. Каждое слагаемое в правой части ряда (12) представляет собой плотность объемных сил, отвечающих различным видам сосредоточенных силовых воздействий [4, 6].

Перейдем теперь к определению перемещений u и температуры t в вязкоупругой среде, обусловленных действием силового фактора, заданного общим членом ряда (12). В этом случае решение уравнений (3) и (4) при $Q=0$ можно представить в виде

$$\vec{\Phi}_n^*=\frac{(-1)^n}{n!}(\vec{l}\cdot\vec{\nabla})^n\vec{\Phi}_0^*,\quad \Psi_n^*=\frac{(-1)^n}{n!}(\vec{l}\cdot\vec{\nabla})^n\Psi_0^*, \tag{13}$$

и функции $\vec{\Phi}_0^*$ и Ψ_0^* получаем в результате решения уравнений

$$\left(M^*\Delta-\rho\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right)\left(\mu^*\Delta-\rho\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right)\vec{\Phi}_0^*=-\vec{P}\delta(\vec{r})e^{i(\omega\tau-\theta)}, \tag{14}$$

$$\left[\left(M^*\Delta-\rho\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right)(\Delta-D)-\alpha_t\gamma_0^*K^*D\Delta\right]\Psi_0^*=\gamma_0^*D\left(\mu^*\Delta-\rho\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right)\operatorname{div}\vec{\Phi}_0^*. \tag{15}$$

Принимая для установившегося режима

$$\vec{\Phi}_0^*=\frac{\vec{P}}{M^*\mu^*}\varphi(x,y,z)e^{i(\omega\tau-\theta)},\quad \Psi_0^*=\frac{\vec{P}\cdot\vec{\nabla}}{(M^*)^2}\psi(x,y,z)e^{i(\omega\tau-\theta)} \tag{16}$$

и подставляя эти выражения в уравнения (14) — (15), находим

$$\begin{gathered}(\Delta+\omega_1^2)(\Delta+\omega_2^2)\varphi=-\delta(\vec{r}),\\ \{\Delta\Delta+[\omega_1^2-(i\omega_0-\omega_t^2)(1+\gamma^*)]\Delta-\omega_1^2(i\omega_0-\omega_t^2)\}\psi=\\ =\gamma_0^*(i\omega_0-\omega_t^2)(\Delta-\omega_2^2)\varphi=0,\end{gathered} \tag{17}$$

где

$$\omega_1^2=\frac{\omega^2\rho}{M^*(\omega)},\quad \omega_2^2=\frac{\rho\omega^2}{\mu^*(\omega)},\quad \omega_0=\frac{\omega}{\varkappa},\quad \omega_t=\frac{\omega}{c_t},\quad \gamma^*=\alpha_t\gamma_0^*\frac{K^*(\omega)}{M^*(\omega)}.$$

Заметим, что ω_0, ω_t — действительные, а ω_1, ω_2 и γ^* — комплексные величины. Учитывая, что в нашем случае можно записать

$$K^*(\omega)=K'(\omega)+iK''(\omega),\quad \mu^*(\omega)=\mu'(\omega)+i\mu''(\omega),$$

величины ω_1, ω_2 и γ^* соответственно можно представить в виде

$$\omega_1^2=\alpha_1-i\beta_1,\quad \omega_2^2=\alpha_2-i\beta_2,\quad \gamma^*=\gamma_1+i\gamma_2. \tag{18}$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{gathered}\alpha_i=\frac{\omega^2}{c_i^2(1+\varepsilon_i^2)},\quad \beta_i=\frac{\omega^2\varepsilon_i}{c_i^2(1+\varepsilon_i^2)}\qquad (i=1,2),\\ \gamma_1=\gamma(1-\varepsilon^2+2\varepsilon_1\varepsilon),\quad \gamma_2=\gamma[2\varepsilon-\varepsilon_1(1-\varepsilon^2)],\\ \gamma=\frac{\alpha_t^2T_0(K')^2}{c_e(1+\varepsilon_1^2)\left(K'+\frac{4}{3}\mu'\right)},\quad \varepsilon_1=\frac{K''+\frac{4}{3}\mu''}{K'+\frac{4}{3}\mu'},\quad \varepsilon_2=\frac{\mu''}{\mu'},\\ \varepsilon=\frac{K''}{K'},\quad c_1^2=\frac{K'+\frac{4}{3}\mu'}{\rho},\quad c_2^2=\frac{\mu'}{\rho},\quad \gamma_0=\frac{\alpha_tT_0K'}{c_e}.\end{gathered} \tag{19}$$

Будем искать решения уравнений (17) исчезающими на бесконечности. Применяя к ним преобразование Фурье по координатам x, y, z, получаем

$$\tilde{\varphi} = -\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{(R^2-\omega_1^2)(R^2-\omega_2^2)} \qquad (R^2 = \xi^2+\eta^2+\zeta^2), \tag{20}$$

$$\tilde{\psi} = \frac{\gamma_0 (i\omega_0 - \omega_t^2)(1+i\varepsilon)}{(2\pi)^{3/2}(R^2-\omega_1^2)\{R^4 - [\omega_1^2 - (i\omega_0-\omega_t^2)(1+\gamma^*)]R^2 - \omega_1^2(i\omega_0-\omega_t^2)\}},$$

откуда после обратного преобразования с учетом (18) находим

$$\varphi = -\frac{e^{i(\omega\tau-\theta)}}{4\pi r r_0}[e^{-(b_1+ia_1)r-i\theta_0} - e^{-(b_2+ia_2)r-i\theta_0}],$$

$$\psi = \frac{\gamma_0(1+i\varepsilon)(i\omega_0-\omega_t^2)}{4\pi r}\left[\frac{1}{r_1 r_2}e^{-rb_1-i(a_1 r+\theta_1+\theta_2)} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{r_1 r_3}e^{-b_3 r - i(a_3 r+\theta_1+\theta_3)} - \frac{1}{r_2 r_3}e^{-b_4 r - i(a_4+\theta_2+\theta_3)}\right]. \tag{21}$$

Здесь

$$\alpha_1 - a_2 - i(\beta_1-\beta_2) = r_0 e^{i\theta_0}, \quad \alpha_3-\alpha_1 - i(\beta_3-\beta_1) = r_1 e^{i\theta_1},$$

$$\alpha_4-\alpha_1-i(\beta_4-\beta_1) = r_2 e^{i\theta_2}, \quad \alpha_3-\alpha_4-i(\beta_3-\beta_4) = r_3 e^{i\theta_3},$$

$$2\alpha_{3,4} = \alpha_0 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\alpha_0^2-\beta_0^2+4\Omega_1+\sqrt{[\alpha_0^2+\beta_0^2+4\Omega_1]^2+[2\alpha_0\beta_0-4\Omega_2]^2}},$$

$$2\beta_{3,4} = \beta_0 \mp \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\beta_0^2-\alpha_0^2-4\Omega_1+\sqrt{[\alpha_0^2-\beta_0^2+4\Omega_1]^2+[2\alpha_1\beta_0-4\Omega_2]^2}}, \tag{22}$$

$$\alpha_0 = \alpha_1+\omega_t^2(1+\gamma_1)+\omega_0\gamma_2, \quad \beta_0 = \beta_1+\omega_0(1+\gamma_1)-\omega_t^2\gamma_2,$$

$$\Omega_1 = \beta_1\omega_0 - \alpha_1\omega_t^2, \quad \Omega_2 = \alpha_1\omega_0 - \beta_1\omega_t^2,$$

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\alpha_k+\sqrt{\alpha_k^2+\beta_k^2}}, \quad b_k = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{-\alpha_k+\sqrt{\alpha_k^2+\beta_k^2}}.$$

На основании формул (21), (16), (13) и (2) с учетом (19) для перемещения $\vec{u}_n$ и температуры t_n получим выражения

$$\vec{u}_n = \frac{e^{i\omega\tau}}{4\pi\mu^*}\frac{(-1)^n}{n!}(\vec{l}\cdot\vec{\nabla})^n\left\{\frac{\vec{P}}{r}e^{-(b_2+ia_2)r} + \frac{1}{\omega_2^2}\operatorname{grad}(\vec{P}\cdot\vec{\nabla})\frac{1}{r}\left[e^{-(b_2+ia_2)r} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{e^{-i\theta_3}}{r_3}(r_2 e^{-(b_3+ia_3)r+i\theta_2} - r_1 e^{-(b_4+ia_4)r+i\theta_1})\right]\right\}; \tag{23}$$

$$t_n = \frac{\gamma_0^*(i\omega_0-\omega_t^2)}{4\pi r_3 M^*}\frac{(-1)^n}{n!}(\vec{l}\cdot\vec{\nabla})^n(\vec{P}\cdot\vec{\nabla})[e^{-(b_4+ia_4)r} - e^{-(b_3+ia_3)r}]\frac{e^{i(\omega\tau-\theta-\theta_3)}}{r}.$$

При $n=0$ формулы (23) дают решение задачи для сосредоточенной силы $\vec{P}e^{i(\omega\tau-\theta)}$, приложенной в начале координат. Для центра расширения [4] из (23) при $n=1$ находим

$$\vec{u} = -\frac{p}{4\pi M^* r_3}\operatorname{grad}[(\alpha_3-i\beta_3+i\omega_0-\omega_t^2)e^{-(b_3+ia_3)r} -$$

$$-(\alpha_4-i\beta_4+i\omega_0-\omega_t^2)e^{-(b_4+ia_4)r}]\frac{e^{i(\omega\tau-\theta-\theta_3)}}{r};$$

$$t = -\frac{p\gamma_0^*(i\omega_0-\omega_t^2)}{4\pi r_3 M^*}[(\alpha_3-i\beta_3)e^{-(b_3+ia_3)r} - (\alpha_4-i\beta_4)e^{-(b_4+ia_4)}]\frac{e^{i(\omega\tau-\theta-\theta_3)}}{r}. \tag{24}$$

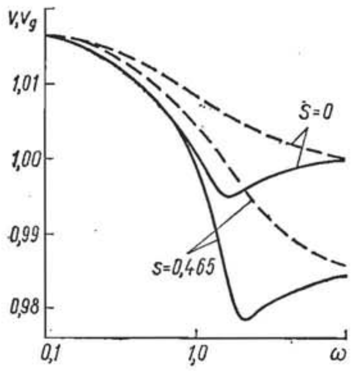
В случае сосредоточенного момента имеем

$$\vec{u} = -\frac{e^{i(\omega\tau-\theta)}}{8\pi\mu^*}(\vec{m}_0\cdot\vec{\nabla})\frac{e^{-(b_2+ia_2)r}}{r}; \quad t = 0, \tag{25}$$

где $\vec{m}_0$ — вектор сосредоточенного момента.

Термоупругое пространство. Полагая в формулах (22) — (25) $\varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$, получаем решения задачи обобщенной термоупругости для бесконечной среды, находящейся под воздействием периодических во времени сосредоточенных силовых факторов.

Результаты анализа формул (24) для термоупругого случая показывают, что слагаемые $e^{-b_3-i(a_3-\omega\tau)}$ и $e^{-b_4-i(a_4-\omega\tau)}$ соответствуют модифицированным упругой и тепловой сферическим волнам, распространяющимся от центра соответственно со скоростями



$$v_1 = \frac{\omega}{a_3}, \quad v_t = \frac{\omega}{a_4}. \tag{26}$$

Амплитуды этих волн затухают с удалением от точки действия центра расширения как $\frac{e^{-b_i r}}{r}$, где $i = 1, 2$.

На рисунке показана зависимость безразмерных упругих фазовой $v = \frac{v_1}{c_1}$ (штриховая кривая) и групповой v_g (сплошная кривая) скоростей от безразмерной частоты $\tilde{\omega} = \frac{\omega}{\omega^*}$, где ω^* — характеристическая частота материала [1, 5]. Подсчеты проводились для алюминия с параметрами $\nu = 0{,}3$, $\tau_0 = 10^{-12}$ *сек*, $s = \frac{c_1}{c_t} = 0{,}465$ и коэффициентом сопряжения $\gamma = 0{,}0356$.

Кривые $s = 0$ соответствуют уравнению теплопроводности параболического типа, а кривые $s = 0{,}465$ — гиперболического. Как видно из рисунка, заметное влияние конечной скорости тепла на волновые процессы в твердом теле сказывается для безразмерных частот $\tilde{\omega} > 1$. Причем влияние ускорения $\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\operatorname{div}\vec{u}$ на волновые характеристики мало́ при данных параметрах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коваленко А. Д. Основы термоупругости. «Наукова думка», К., 1970.
2. Коваленко А. Д., Карнаухов В. Г., Тюптя В. И.— Прикладная механика, 1968, **4**, 9.
3. Подстригач Я. С.— Изв. АН СССР. Механика и машиностроение, 1960, 4.
4. Підстригач Я. С., Бурак Я. Й.— Прикладна механіка, 1962, **8**, 3.
5. Попов Е. Б.— ПММ, 1967, **31**, 2.
6. Швец Р. Н.— Прикладная механика, 1965, **1**, 3.
7. Lord H. W., Shulman V. A.— J. Mech. Phys. Solid., 1967, **15**, 5.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию в октябре 1973 г.

ТЕРМОУПРУГОЕ РАССЕЯНИЕ ЭНЕРГИИ ВОКРУГ ВЕРШИНЫ СДВИГОВОЙ ТРЕЩИНЫ

Н. М. Власов, В. С. Колесов, И. И. Федик

Упругая деформация реального кристалла сопровождается тепловыми эффектами. При сжатии (растяжении) происходит выделение (поглощение) тепла [4]. Указанные процессы играют существенную роль при тепловой релаксации в твердых телах.

Температурная релаксация, обусловленная теплопроводностью, изучалась Зинером [2], который рассматривал изгибные колебания пластинки. В процессе колебаний тепловой поток идет от сжатой области к растянутой, что приводит к рассеянию механической энергии колебаний. Зинер указал