

ные линии) и $hH_1 = 0,5$ (штриховые) при разных значениях отношения $\frac{D_c}{a}$ ($\frac{D_c}{a} = 0,001; 0,01$). При $hH_1 \rightarrow \infty$ концентрация на поверхности имеет постоянное значение $c'(z, \tau) = \frac{\mu_c}{d_c^{e,T}}$. На рис. 2 показано изменение изгибающего момента $M_\varphi^* = -\frac{\lambda M_\varphi}{Dq'\alpha_t h}$ на контуре отверстия, обусловленного процессами теплопроводности и диффузии. Расчеты проводились при следующих значениях параметров: $hH_1 = 1$; $\frac{D_c}{a} = 0,001$; $k = 2$, $\nu = 0,3$.

С увеличением градиента температуры происходит дополнительное перераспределение растворенного вещества, которое приводит к увеличению изгибающего момента по контуру отверстия. Кривая $\gamma_{c,t} = 0$ соответствует изменению момента M_φ^* во времени, обусловленного только тепловым ударом. Как видно из рисунка, изгибающий момент на контуре пластинки резко возрастает при малых значениях времени и стремится к постоянному значению при $\tau \rightarrow \infty$. С увеличением отношения $\frac{r_2}{r_1}$ значение изгибающего момента возрастает и при $k \rightarrow \infty$ достигает максимальной величины.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бескорвайный Н. М. и др.— В кн.: *Металлургия и металловедение чистых металлов*, 8. Атомиздат, М., 1969.
2. Коваленко А. Д. *Основы термоупругости*. «Наукова думка», К., 1970.
3. Лыков А. В. *Теория теплопроводности*. «Высшая школа», М., 1967.
4. Любков Б. Я. *Кинематическая теория фазовых превращений*. «Металлургия», М., 1969.
5. Підстригач Я. С.— ДАН УРСР, 1961, 2, 169.
6. Подстригач Я. С., Павлина В. С.— *Прикладная механика*, 1965, 3, 105.
7. Подстригач Я. С., Павлина В. С., Шевчук П. Р.— В кн.: *Концентрация напряжений*. 3. «Наукова думка», К., 1971.
8. Швец Р. Н., Раврик М. С.— В кн.: *Тепловые напряжения в элементах конструкций*, 12. «Наукова думка», К., 1972.

Львовский филиал математической
физики Института математики
АН УССР

Поступила в редколлегию
в декабре 1973 г.

ВЛИЯНИЕ ОДНОРОДНОГО ТЕПЛОВОГО ПОТОКА НА КОЭФФИЦИЕНТЫ ИНТЕНСИВНОСТИ НАПРЯЖЕНИЙ ДЛЯ ПЛОСКОСТИ С ДВОЙКОПЕРИОДИЧНОЙ СИСТЕМОЙ ТРЕЩИН

М. В. Хай

Пусть упругая плоскость, ослабленная двоякопериодичной системой прямолинейных термозолированных трещин длиной $2l$, подвержена действию стационарного температурного поля $t_0(x, y) = qy$ (однородного теплового потока q , перпендикулярного к линиям расположения трещин). Найдем возмущение $t(x, y)$ этого температурного поля, а также обусловленные им коэффициенты интенсивности напряжений в окрестности концов трещин. Отметим, что основное температурное поле не вызывает напряжений в плоскости с трещинами [3].

Обозначим расстояние между центрами трещин по горизонтали и вертикали соответственно через $2a$ и $2b$. Вследствие периодичности задачи рассмотрим прямоугольник с симметрично расположенной трещиной при соответствующих условиях на температуру, перемещения и напряжения на его границе.

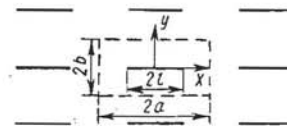


Рис. 1.

В выбранной системе координат (рис. 1) задача сводится к решению уравнений теплопроводности и термоупругости при следующих граничных условиях:

$$t(x, b) = u(x, b) = \sigma_{yy}(x, b) = \sigma_{yy}(x, 0) = 0, \quad |x| \leq a, \quad (1)$$

$$\frac{\partial t(\pm a, y)}{\partial x} = u(\pm a, y) = \tau_{xy}(\pm a, y) = 0, \quad y \leq b, \quad (2)$$

$$t(x, 0) = u(x, 0) = 0, \quad |x| \geq l,$$

$$\frac{\partial t(x, 0)}{\partial y} = -q, \quad \tau_{xy}(x, 0) = 0, \quad |x| < l. \quad (3)$$

Заменяя граничные условия (2) такими:

$$\frac{\partial t(\pm a, y)}{\partial x} = \sigma_{yy}(\pm a, y) = \tau_{xy}(\pm a, y) = 0, \quad y \leq b, \quad (4)$$

вместо плоскости (задача 1) получим полосу с термоизолированными свободными от внешних усилий границами, ослабленную периодической системой поперечных трещин (задача 2).

Для определения температурного поля $t(x, y)$ необходимо решить уравнение $\Delta t = 0$ при граничных условиях (1) — (3). Это решение, удовлетворяющее условию (1), представим в виде

$$t(x, y) = \int_0^{\infty} \psi(\xi) (\operatorname{ch} \xi y - \operatorname{cth} \xi b \operatorname{sh} \xi y) \cos \xi x d\xi + \sum_{n=0}^{\infty} M_n \operatorname{ch} \beta_n x \sin \beta_n y, \quad (5)$$

где $\beta_n = \frac{n\pi}{b}$, $\psi(\xi)$, M_n — неизвестные величины, подлежащие определению.

Удовлетворяя условию (2), разлагая при этом $t(\pm a, y)$ в ряд Фурье по $\sin \beta_n y$ и приравнявая выражения при одинаковых синусах, получаем соотношения, связывающие неизвестные M_n и $\psi(\xi)$:

$$M_n = \frac{2}{b \operatorname{sh} \beta_n a} \int_0^{\infty} \xi \psi(\xi) \frac{\sin \xi a}{\xi^2 + \beta_n^2} d\xi. \quad (6)$$

Для определения функции $\psi(\xi)$ из условий (3) с учетом (6) получим дуальные интегральные уравнения вида

$$\int_0^{\infty} \xi \psi(\xi) \operatorname{cth} \xi b \cos \xi x d\xi + \frac{2}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{ch} \beta_n x}{\operatorname{sh} \beta_n a} \int_0^{\infty} \xi \psi(\xi) \frac{\sin \xi a}{\xi^2 + \beta_n^2} d\xi = q, \quad |x| < l, \quad (7)$$

$$\int_0^{\infty} \psi(\xi) \cos \xi x d\xi = 0, \quad x > l.$$

Полагая

$$\psi(\xi) = \int_0^l \beta'(z) J_0(\xi z) dz,$$

мы удовлетворим второму уравнению (7) тождественно, а первое с учетом формулы обращения приводится к интегральному уравнению

$$\beta(z) = \frac{1}{2} q z^2 + \int_0^l \beta'(\eta) S(\eta, z) d\eta, \quad (8)$$

где

$$S(\eta, z) = z \int_0^{\infty} (1 - \operatorname{cth} \xi b) J_0(\xi \eta) J_1(\xi z) d\xi + \frac{z\pi}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_1(\beta_n z) I_0(\beta_n \eta)}{e^{a\beta_n} \operatorname{sh} a\beta_n}, \quad (9)$$

$J_n(x)$, $I_n(x)$ — цилиндрические функции первого рода действительного и мнимого аргумента соответственно.

Для определения напряженного состояния, вызванного температурой возмущения $t(x, y)$, выберем решение уравнений термоупругости в перемещениях в виде

$$u = \int_0^{\infty} \{ [A + \xi(y-b)B] \operatorname{ch} \xi(y-b) + [C + \xi(y-b)D] \operatorname{sh} \xi(y-b) \} \sin \xi x d\xi + \sum_{n=0}^{\infty} [(A_n + B_n \beta_n x) \operatorname{sh} \beta_n x + (C_n + D_n \beta_n x) \operatorname{ch} \beta_n x] \sin \beta_n y, \quad (10)$$

$$v = \int_0^{\infty} \{ [A_1 + \xi(y-b)B_1] \operatorname{ch} \xi(y-b) + [C_1 + \xi(y-b)D_1] \operatorname{sh} \xi(y-b) \} \times \times \cos \xi x d\xi + \sum_{n=0}^{\infty} [(A_{1n} + B_{1n} \beta_n x) \operatorname{sh} \beta_n x + (C_{1n} + D_{1n} \beta_n x) \operatorname{ch} \beta_n x] \cos \beta_n y,$$

причем неизвестные величины $A, B \dots C_{1n}, D_{1n}$ связаны между собой соотношениями

$$\begin{aligned} B &= -D_1, \quad D = -B_1, \quad B_n = D_{1n}, \quad D_n = B_{1n}, \\ 2\mu B - (\lambda + \mu)(C + A_1 - B) &= \frac{\gamma}{\xi} \psi(\xi) \operatorname{cth} \xi b, \\ 2\mu D - (\lambda + \mu)(A + C_1 - D) &= -\frac{\gamma}{\xi} \psi(\xi), \\ 2\mu D_n + (\lambda + \mu)(A_n + D_n - C_{1n}) &= \frac{\gamma}{\beta_n} M_n, \\ 2\mu B_n + (\lambda + \mu)(C_n + B_n - A_{1n}) &= 0, \end{aligned} \quad (11)$$

где λ и μ — упругие постоянные Ляме; $\gamma = \alpha_t(3\lambda + 2\mu)$, α_t — коэффициент линейного теплового расширения для случая плоской деформации.

Удовлетворяя граничным условиям (1) — (4), все известные величины можно выразить через одну — A , для определения которой получим дуальные интегральные уравнения

$$\int_0^{\infty} \xi \left[1 + \frac{e^{-\xi b}}{\operatorname{sh} \xi b} - \frac{\xi b}{\operatorname{sh}^2 \xi b} \right] \Phi(\xi) \sin \xi x d\xi - \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \Psi_n(x) = 0, \quad x < l, \quad (12)$$

$$\int_0^{\infty} A \sin \xi x d\xi = 0, \quad x > l.$$

Здесь для задач 1 и 2 соответственно имеем

$$\Psi_n(x) = \frac{2}{b \operatorname{sh} a\beta_n} \int_0^{\infty} \left\{ \left[\frac{2\xi^2 \beta_n}{(\xi^2 + \beta_n^2)^2} - \frac{\xi^2 a \operatorname{cth} a\beta_n}{\xi^2 + \beta_n^2} \right] \operatorname{sh} \beta_n x - - \frac{\xi^2 x \operatorname{ch} \beta_n x}{\xi^2 + \beta_n^2} \right\} \Phi(\xi) \sin \xi a d\xi; \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \Psi_n(x) &= \frac{2b}{\Delta_1 \beta_n} \int_0^{\infty} \left\{ \left[\Delta_2 \xi^2 f_+(\xi) - \frac{2a\beta_n^4 \operatorname{ch} a\beta_n \operatorname{ctg} \xi a}{\xi(\xi^2 + \beta_n^2)} \right] \operatorname{sh} \beta_n x - - \left[\xi^2 f_-(\xi) + \frac{2\xi \beta_n^3 \operatorname{th} a\beta_n \operatorname{ctg} \xi a}{\xi^2 + \beta_n^2} \right] \frac{\beta_n x \operatorname{ch} \beta_n x}{\operatorname{sch} a\beta_n} \right\} \Phi(\xi) \sin \xi a d\xi, \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi(\xi) &= A - \frac{\gamma \psi(\xi)}{2\xi(\lambda + \mu)}, \quad f_{\pm}(\xi) = \frac{1}{\xi^2 + \beta_n^2} \pm \frac{\beta_n^2 - \xi^2}{(\xi^2 + \beta_n^2)^2}, \\ \Delta_1 &= \beta_n(a\beta_n + \operatorname{ch} a\beta_n \operatorname{sh} a\beta_n), \quad \Delta_2 = \operatorname{ch} a\beta_n - a\beta_n \operatorname{sh} a\beta_n. \end{aligned} \quad (15)$$

Полагая $A(\xi) = \int_0^l \alpha(z) J_1(\xi z) dz$ и применяя формулу обращения [2], сводим дуальные интегральные уравнения (12) к интегральному уравнению Фредгольма

$$\alpha(\eta) = \beta_*(\eta) - \int_0^l \alpha(z) R(z, \eta) dz + \int_0^l \beta'_*(z) \Omega(z, \eta) dz, \quad (16)$$

где $\beta_*(z) = \gamma\beta(z)/2(\lambda + \mu)$, а ядра этого уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} R(z, \eta) &= H_1(z, \eta) - \frac{\pi\eta}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^2 K_{01n}(z, \eta), \\ \Omega(z, \eta) &= H_0(z, \eta) + \frac{\pi\eta}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n K_{10n}(z, \eta), \end{aligned} \quad (17)$$

$$H_k(z, \eta) = \eta \int_0^{\infty} \xi^k \left(\frac{e^{-\xi b}}{\operatorname{sh} \xi b} - \frac{\xi b}{\operatorname{sh}^2 \xi b} \right) J_k(\xi z) J_1(\xi \eta) d\xi,$$

причем для задачи 1

$$\begin{aligned} K_{kjn}(z, \eta) &= \frac{e^{-a\beta_n}}{\operatorname{sh} a\beta_n} \left\{ [z J_k(\beta_n z) - a(1 + \operatorname{cth} a\beta_n) I_j(\beta_n z)] I_1(\beta_n \eta) + \right. \\ &\quad \left. + \eta I_j(\beta_n z) \left[I_0(\beta_n \eta) - \frac{I_1(\beta_n \eta)}{\beta_n \eta} \right] \right\} \end{aligned}$$

и для задачи 2

$$\begin{aligned} K_{kjn}(z, \eta) &= \frac{\beta_n e^{-a\beta_n}}{\Delta_1} \left\{ [z (\operatorname{ch} a\beta_n - a\beta_n e^{a\beta_n}) I_k(\beta_n z) + a^2 \beta_n e^{a\beta_n} I_j(\beta_n z)] I_1(\beta_n \eta) + \right. \\ &\quad \left. + \eta [z \beta_n e^{a\beta_n} I_k(\beta_n z) - (\operatorname{sh} a\beta_n + a\beta_n e^{a\beta_n}) I_j(\beta_n z)] \left[I_0(\beta_n \eta) - \frac{I_1(\beta_n \eta)}{\beta_n \eta} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Уравнения (8) и (16) в общем случае необходимо решать численно. Но для достаточно больших расстояний между трещинами решение $\beta(z)$ и $\alpha(z)$ можно найти приближенно, представив их в виде рядов

$$\beta(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta_k(z)}{b^k}, \quad \alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k(z)}{b^k}, \quad (18)$$

разлагая при этом их ядра в ряд по степеням $1/b$. Подставляя $\beta(z)$ и $\alpha(z)$ в уравнения (8), (16) и приравнявая выражения при одинаковых степенях b , получаем рекуррентные соотношения для определения $\beta_k(z)$ и $\alpha_k(z)$.

Коэффициенты интенсивности напряжений выражаются через функцию $\alpha(z)$ по следующей формуле [2]:

$$k_1 = 0, \quad k_2 = \frac{2\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \frac{\alpha(l)}{\sqrt{l}}. \quad (19)$$

Ограничиваясь шестью членами ряда (18) и учитывая формулу (19), записываем выражение для k_2 в виде

$$\begin{aligned} k_2 &= k_{\infty} \left\{ 1 + (B_0 + A_0) \varepsilon^2 + \left(B_1 + A_1 + \frac{1}{2} A_2 + B_0 A_0 + B_0^2 - \frac{1}{4} Q_0 \right) \varepsilon^4 + \right. \\ &\quad \left. + \left[5B_3 + 2B_0 B_1 + A_3 + \frac{1}{2} A_4 + \frac{1}{3} A_5 + B_0 \left(A_1 + \frac{1}{2} A_2 \right) + B_0^3 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + A_0 \left(B_0^2 + B_1 - \frac{1}{4} Q_0 \right) - \frac{1}{4} Q_1 - \frac{1}{6} Q_2 - \frac{1}{4} Q_0 B_0 \right] \varepsilon^6 + o(\varepsilon^8) \right\}, \end{aligned}$$

где для задач 1 и 2 имеем: $\varepsilon = l/b$, $k_{\infty} = \alpha_l E q / 4(1 - \nu)$, $B_0 = H_1 - 5a_1$, $B_1 = H_3 - 7a_2$, $12B_3 = -(60a_3 - H_5)$, E — модуль упругости, ν — коэффициент Пуассона.

Для задачи 1: $A_0 = -(5a_1 + P_1)$, $2A_1 = 21a_2 - P_3$, $A_2 = 2A_1$, $12A_3 = -(300a_3 + P_5)$, $A_4 = 6A_3$, $A_5 = 3A_3$, $Q_0 = -2(21a_2 + P_3)$, $Q_1 = Q_2 = (300a_3 - P_5)$.

Для задачи 2: $A_0 = -(5a_1 + 2L_1)$, $2A_1 = -(21a_2 + 2L_2)$, $A_2 = 2A_1 + N_3$, $6A_3 = -(150a_3 + L_5)$, $A_4 = 6A_3 + N_5$, $2A_5 = A_4$,

$Q_0 = -2(7a_2 - 2L_3 + N_3)$, $Q_1 = Q_2 = (300a_3 + 2L_5 - N_5)$.

Величины H_k , a_k , P_k , L_k , N_k определяются выражениями

$$H_k = \frac{\pi}{2^k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n\pi)^k}{e^{a\beta_n} \operatorname{sh} a\beta_n}, \quad a_k = \frac{\pi^{2k}}{(2k+3)!! 2^{3k}},$$

$$P_k = \frac{\pi}{2^k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n\pi)^k [a\beta_n(1 + \operatorname{cth} a\beta_n) - k]}{e^{a\beta_n} \operatorname{sh} a\beta_n},$$

$$L_k = \frac{\pi}{2^k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n\pi)^k [k \operatorname{sh} a\beta_n + a\beta_n(k - a\beta_n) e^{a\beta_n}]}{(2a\beta_n + \operatorname{sh} 2a\beta_n) e^{a\beta_n}},$$

$$N_k = \frac{4\pi(k-1)}{2^k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2\pi)^k}{2a\beta_n + \operatorname{sh} 2a\beta_n}.$$

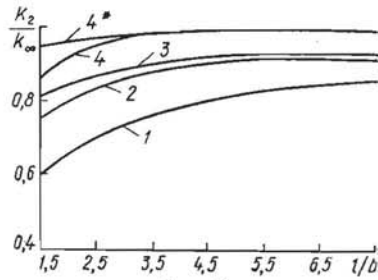


Рис. 2.

На рис. 2 показана зависимость k_2/k_{∞} для плоскости от величины $\epsilon = l/b$. Цифры 1, 2, 3, 4 соответствуют расстоянию между трещинами по горизонтали $a = 1, 2; 1, 6; 2; \infty$. Цифрой 4* обозначено значение k_2 , вычисленное с помощью численного решения уравнений (8) и (16). Отметим, что при $a \rightarrow \infty$ и фиксированном b получаем плоскость с периодической системой параллельных трещин.

В случае $b = \infty$ (плоскость ослаблена периодической системой коллинеарных трещин) формулы (20) дают разложение в ряд точного решения задачи [1] и ошибка в вычислениях по приближенной формуле не превышает 1% при $a \geq 1,5l$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кит Г. С.— ДАН УРСР. Сер. А, 1969, 5.
2. Кит Г. С., Хай М. В.— Механика твердого тела, 1973, 5.
3. Мелан Э., Паркус Г. Термоупругие напряжения, вызываемые стационарными температурными полями. Физматгиз, М., 1958.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию в декабре 1973 г.

РЕШЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ ПЛАСТИНЫ

В. М. Вигак

В современном теплоэнергооборудовании возникает задача определения температурного режима, позволяющего в кратчайшее время осуществлять прогрев или расхолаживание деталей, обеспечив при этом заданные допустимые температурные напряжения в расчетных точках детали.

Если величина допустимых температурных напряжений установлена, то для определения допустимых температурных режимов возможны два пути.

Первый из них, широко используемый в настоящее время [1, 3, 4, 7—10], определяется путем решения обычной квазистатической задачи термоупругости с последующим сравнением найденных температурных напряже-