

Для задачи 1:  $A_0 = -(5a_1 + P_1)$ ,  $2A_1 = 21a_2 - P_3$ ,  $A_2 = 2A_1$ ,  $12A_3 = -(300a_3 + P_5)$ ,  $A_4 = 6A_3$ ,  $A_5 = 3A_3$ ,  $Q_0 = -2(21a_2 + P_3)$ ,  $Q_1 = Q_2 = (300a_3 - P_5)$ .

Для задачи 2:  $A_0 = -(5a_1 + 2L_1)$ ,  $2A_1 = -(21a_2 + 2L_2)$ ,  $A_2 = 2A_1 + N_3$ ,  $6A_3 = -(150a_3 + L_5)$ ,  $A_4 = 6A_3 + N_5$ ,  $2A_5 = A_4$ ,

$Q_0 = -2(7a_2 - 2L_3 + N_3)$ ,  $Q_1 = Q_2 = (300a_3 + 2L_5 - N_5)$ .

Величины  $H_k$ ,  $a_k$ ,  $P_k$ ,  $L_k$ ,  $N_k$  определяются выражениями

$$H_k = \frac{\pi}{2^k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n\pi)^k}{e^{a\beta_n} \operatorname{sh} a\beta_n}, \quad a_k = \frac{\pi^{2k}}{(2k+3)!! 2^{3k}},$$

$$P_k = \frac{\pi}{2^k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n\pi)^k [a\beta_n(1 + \operatorname{cth} a\beta_n) - k]}{e^{a\beta_n} \operatorname{sh} a\beta_n},$$

$$L_k = \frac{\pi}{2^k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n\pi)^k [k \operatorname{sh} a\beta_n + a\beta_n(k - a\beta_n) e^{a\beta_n}]}{(2a\beta_n + \operatorname{sh} 2a\beta_n) e^{a\beta_n}},$$

$$N_k = \frac{4\pi(k-1)}{2^k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2\pi)^k}{2a\beta_n + \operatorname{sh} 2a\beta_n}.$$

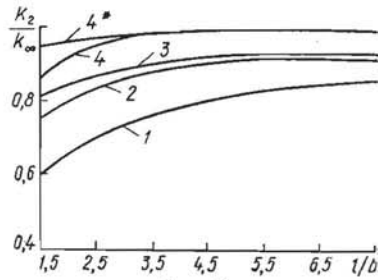


Рис. 2.

На рис. 2 показана зависимость  $k_2/k_{\infty}$  для плоскости от величины  $\epsilon = l/b$ . Цифры 1, 2, 3, 4 соответствуют расстоянию между трещинами по горизонтали  $a = 1, 2; 1, 6; 2; \infty$ . Цифрой 4\* обозначено значение  $k_2$ , вычисленное с помощью численного решения уравнений (8) и (16). Отметим, что при  $a \rightarrow \infty$  и фиксированном  $b$  получаем плоскость с периодической системой параллельных трещин.

В случае  $b = \infty$  (плоскость ослаблена периодической системой коллинеарных трещин) формулы (20) дают разложение в ряд точного решения задачи [1] и ошибка в вычислениях по приближенной формуле не превышает 1% при  $a \geq 1,5l$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Кит Г. С.— ДАН УРСР. Сер. А, 1969, 5.
2. Кит Г. С., Хай М. В.— Механика твердого тела, 1973, 5.
3. Мелан Э., Паркус Г. Термоупругие напряжения, вызываемые стационарными температурными полями. Физматгиз, М., 1958.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию в декабре 1973 г.

#### РЕШЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ ПЛАСТИНЫ

В. М. Вигак

В современном теплоэнергооборудовании возникает задача определения температурного режима, позволяющего в кратчайшее время осуществлять прогрев или расхолаживание деталей, обеспечив при этом заданные допустимые температурные напряжения в расчетных точках детали.

Если величина допустимых температурных напряжений установлена, то для определения допустимых температурных режимов возможны два пути.

Первый из них, широко используемый в настоящее время [1, 3, 4, 7—10], определяется путем решения обычной квазистатической задачи термоупругости с последующим сравнением найденных температурных напряже-

ний с допустимыми. Как правило, такой путь дает возможность определить допустимую величину характерных параметров для отдельных температурных режимов, которые удобны при регулировании пусковых режимов теплоэнергооборудования оператором вручную. Однако допустимый температурный режим, определяемый таким путем, затрудняет автоматизацию управления пусковых режимов с помощью вычислительной машины и не обеспечивает полного использования прочностных возможностей детали, вследствие чего увеличиваются продолжительность прогрева или расхолаживания оборудования и пусковые затраты.

Повышение маневренности теплоэнергооборудования, автоматизация управления пусковыми режимами и экономия пусковых затрат ставят задачу определения предельно допустимого температурного режима, который бы обеспечивал на всем протяжении переходного процесса в расчетных точках детали заданные температурные напряжения. На этом основании в работах [5, 6] предложен второй путь определения предельно допустимого или оптимального температурного режима для цилиндра. В настоящей работе приведено определение оптимального нестационарного температурного режима для пластины, которое осуществляется путем решения одномерной задачи теплопроводности при заданных в качестве одного из граничных условий допустимых температурных напряжениях на наружной поверхности, кусочно-линейно зависящих от температуры. В качестве второго граничного условия взято условие теплообмена на одной из поверхностей по закону Ньютона с переменной температурой греющей среды, аппроксимированной степенным рядом по времени.

Для определения оптимального температурного режима в неограниченной пластине рассмотрим решение уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \rho^2} = \frac{\partial T}{\partial Fo} \quad (1)$$

при следующих краевых условиях:

$$(1 - 3q) \int_0^1 T(\rho, Fo) d\rho + 6q \int_0^1 \rho T(\rho, Fo) d\rho - T(1, Fo) = b - cT(1, Fo);$$

$$\frac{\partial T(0, Fo)}{\partial \rho} - Bi T(0, Fo) = Bi \sum_{n=0}^p \omega_n Fo^n; \quad (2)$$

$$T(\rho, 0) = f(\rho). \quad (3)$$

Здесь  $\rho = \frac{x}{h}$ ;  $x$  — ось координат с началом на одной из поверхностей пластины;  $h$  — толщина пластины;  $Fo = \frac{a\tau}{h^2}$  — критерий Фурье;  $a$  — коэффициент температуропроводности;  $Bi = \frac{\alpha h}{\lambda}$  — критерий Био;  $\alpha$  — коэффициент теплоотдачи на поверхности пластины  $\rho = 0$ ;  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности;  $f(\rho)$  — начальное распределение температуры пластины.

Левая сторона первого из граничных условий (2) представляет собой выражение для относительных температурных напряжений  $\frac{(1-\nu)\sigma}{\alpha_\tau E}$  на поверхности пластины  $\rho = 1$  [2], где  $q = 0 \div 1$  — коэффициент упругой заделки краев пластины;  $\nu$  — коэффициент Пуассона;  $\alpha_\tau$  — коэффициент линейного расширения;  $E$  — модуль упругости. Правая сторона — умноженные на  $\frac{1-\nu}{\alpha_\tau E}$  допустимые температурные напряжения  $\sigma_{доп}^\tau$ , закон изменения которых в зависимости от температуры предполагается аппроксимированным ломаной линией, т. е. в отдельных диапазонах температур представляются линейной функцией

$$\frac{1-\nu}{\alpha_\tau E} \sigma_{доп}^\tau = b - cT(1, Fo),$$

где  $b$  и  $c$  — постоянные величины, определяемые по заданной прямой допустимых температурных напряжений.

Из второго граничного условия (2) видно, что температура греющей среды  $t_{c_2}(Fo)$  предполагается аппроксимированной в виде ряда

$$t_c(Fo) = - \sum_{n=0}^p \omega_n Fo^n.$$

Решение задачи (1) — (3) имеет вид

$$T(\rho, Fo) = \sum_{n=0}^p T_n(\rho) Fo^n + A_1 U(\lambda_1 \rho) \exp(\lambda_1^2 Fo) + \sum_{n=2}^{\infty} A_n U(\lambda_n \rho) \exp(-\lambda_n^2 Fo). \quad (4)$$

Здесь

$$T_n(\rho) = a_n + b_n \rho + P_n(\rho) \quad (n = 0, 1, \dots, p); \quad (5)$$

$$P_n(\rho) = \sum_{m=1}^{p-n} \frac{(n+m)! \rho^{2m}}{n! (2m)!} \left( a_{n+m} + \frac{b_{n+m} \rho}{2m+1} \right) \quad (n = 0, 1, \dots, p-1);$$

$$P_p(\rho) = 0;$$

$$a_n = \frac{2B_n + (1-q-2c)\omega_n Bi}{2c - (1-q-2c)Bi} \quad (n = 0, 1, \dots, p);$$

$$B_0 = b + (1-c)P_0(1) - (1-3q) \int_0^1 P_0(\rho) d\rho - 6q \int_0^1 \rho P_0(\rho) d\rho;$$

$$B_n = (1-c)P_n(1) - (1-3q) \int_0^1 P_n(\rho) d\rho - 6q \int_0^1 \rho P_n(\rho) d\rho$$

$$(n = 1, 2, \dots, p);$$

$$b_n = Bi(\omega_n + a_n) \quad (n = 0, 1, \dots, p);$$

$$U(\lambda_1 \rho) = \lambda_1 \operatorname{ch} \lambda_1 \rho + Bi \operatorname{sh} \lambda_1 \rho; \quad (6)$$

$$U(\lambda_n \rho) = \lambda_n \cos \lambda_n \rho + Bi \sin \lambda_n \rho \quad (n = 2, 3, \dots); \quad (7)$$

$\lambda_1 > 0$  — корень характеристического уравнения

$$(1+3q)U'(\lambda_1) - [6q + (1-c)\lambda_1^2]U(\lambda_1) = [(1-3q)Bi - 6q]\lambda_1; \quad (8)$$

$\lambda_n > 0$  ( $n = 2, 3, \dots$ ) — корни уравнения

$$(1+3q)U'(\lambda_n) - [6q - (1-c)\lambda_n^2]U(\lambda_n) = [(1-3q)Bi - 6q]\lambda_n. \quad (9)$$

Коэффициенты  $A_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) в силу начального условия (3) определяются из бесконечной системы алгебраических уравнений

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^1 U(\lambda_n \rho) U(\lambda_m \rho) d\rho = \int_0^1 [f(\rho) - T_0(\rho)] U(\lambda_m \rho) d\rho \quad (10)$$

$$(m = 1, 2, \dots),$$

где

$$\int_0^1 U^2(\lambda_1 \rho) d\rho = \frac{\lambda_1^2 - Bi^2}{2} + \frac{\lambda_1^2 + Bi^2}{4\lambda_1} \operatorname{sh} 2\lambda_1 + Bi \operatorname{sh}^2 \lambda_1;$$

$$\int_0^1 U^2(\lambda_n \rho) d\rho = \frac{\lambda_n^2 + Bi^2}{2} + \frac{\lambda_n^2 - Bi^2}{4\lambda_n} \sin 2\lambda_n + Bi \sin^2 \lambda_n$$

$$(n = 2, 3, \dots);$$

$$\int_0^1 U(\lambda_1 \rho) U(\lambda_n \rho) d\rho = \operatorname{sh} \lambda_1 \sin \lambda_n \left( \frac{\lambda_1^2 - \operatorname{Bi}^2}{\lambda_1^2 + \lambda_n^2} \lambda_n \operatorname{ctg} \lambda_n + \right. \\ \left. + \frac{\lambda_n^2 + \operatorname{Bi}^2}{\lambda_1^2 + \lambda_n^2} \lambda_1 \operatorname{cth} \lambda_1 + \operatorname{Bi} \right) \quad (n = 2, 3, \dots); \\ \int_0^1 U(\lambda_n \rho) U(\lambda_m \rho) d\rho = \sin \lambda_n \sin \lambda_m \left( \frac{\lambda_n^2 + \operatorname{Bi}^2}{\lambda_n^2 - \lambda_m^2} \lambda_m \operatorname{ctg} \lambda_m - \right. \\ \left. - \frac{\lambda_m^2 + \operatorname{Bi}^2}{\lambda_n^2 - \lambda_m^2} \lambda_n \operatorname{ctg} \lambda_n + \operatorname{Bi} \right) \quad (n, m = 2, 3, \dots; n \neq m).$$

Решение (4) не охватывает частного случая, когда  $c = 0$  и  $\operatorname{Bi} = 0$ . Для этого случая решение задачи (1) — (3) представляется в следующем виде:

$$T(\rho, \operatorname{Fo}) = \frac{h^2 \omega}{a} \left( \frac{\rho^2}{2} + \operatorname{Fo} \right) + A_1 + \sum_{n=2}^{\infty} A_n \cos \lambda_n \rho \exp(-\lambda_n^2 \operatorname{Fo}). \quad (11)$$

Здесь допустимая скорость изменения температуры

$$\omega = \frac{12a(1-\nu)\sigma_{\text{доп}}^T}{\alpha_\tau E(3q-4)h^2};$$

$\lambda_n > 0$  ( $n = 2, 3, \dots$ ) — корни уравнения (9) при  $c = \operatorname{Bi} = 0$ ; коэффициенты  $A_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) определяются из системы уравнений

$$A_1 + \sum_{n=2}^{\infty} A_n \frac{\sin \lambda_n}{\lambda_n} = \int_0^1 f(\rho) d\rho - \frac{h^2 \omega}{6}, \\ A_1 \frac{\sin \lambda_m}{\lambda_m} + \frac{A_m}{4\lambda_m} (2\lambda_m + \sin 2\lambda_m) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{A_n}{\lambda_n^2 - \lambda_m^2} (\lambda_n \sin \lambda_n \cos \lambda_m - \\ - \lambda_m \sin \lambda_m \cos \lambda_n) = \int_0^1 \left[ f(\rho) - \frac{h^2 \omega \rho^2}{2a} \right] \cos \lambda_m \rho d\rho \quad (m = 2, 3, \dots);$$

знак суммы  $\sum_{n=2}^{\infty}$  обозначает, что суммирование ведется по  $n$  от 2 до  $\infty$ , за исключением члена, когда  $n = m$ .

При решении задачи (1) — (3) предполагалось, что подъем или понижение температуры пластины ограничивает напряженное состояние на поверхности  $\rho = 1$ . Однако с течением времени в зависимости от интенсивности теплообмена на поверхности  $\rho = 0$  и механических нагрузок на пластину возможно ограничение температурного режима из-за напряженного состояния поверхности  $\rho = 0$ . Для определения оптимального режима в этом случае необходимо решить уравнение (1) при следующих краевых условиях:

$$(1 + 3q) \int_0^1 T(\rho, \operatorname{Fo}) d\rho - 6q \int_0^1 \rho T(\rho, \operatorname{Fo}) d\rho - (1 - c^*) T(0, \operatorname{Fo}) = b^*; \quad (12)$$

$$\frac{\partial T(0, \operatorname{Fo})}{\partial \rho} - \operatorname{Bi} T(0, \operatorname{Fo}) = \operatorname{Bi} \sum_{n=0}^p \omega_n \operatorname{Fo}^n; \\ T(\rho, 0) = f(\rho). \quad (13)$$

Здесь первое граничное условие (12) представляет собой формулу для температурных напряжений на поверхности пластины  $\rho = 0$ .

Решение задачи (1), (12), (13) имеет вид (4), где

$$a_n = \frac{2B_n^* - (1-q)\omega_n \operatorname{Bi}}{2c^* + (1-q)\operatorname{Bi}};$$

$$B_0^* = b^* - (1 + 3q) \int_0^1 P_0(\rho) d\rho +$$

$$+ 6q \int_0^1 \rho P_0(\rho) d\rho;$$

$$B_n^* = 6q \int_0^1 \rho P_n(\rho) d\rho - (1 + 3q) \int_0^1 P_n(\rho) d\rho$$

$$(n = 1, 2, \dots, p);$$

$\lambda_1 > 0$  — корень уравнения

$$(1 - 3q)U'(\lambda_1) + 6qU(\lambda_1) = [6q +$$

$$+ (1 - c^*)\lambda_1^2 + (1 + 3q)Bi]\lambda_1; \quad (14)$$

$\lambda_n > 0$  ( $n = 2, 3, \dots, k + 1$ ) — корни уравнения

$$(1 - 3q)U'(\lambda_n) + 6qU(\lambda_n) = [6q -$$

$$- (1 - c^*)\lambda_n^2 + (1 + 3q)Bi]\lambda_n; \quad (15)$$

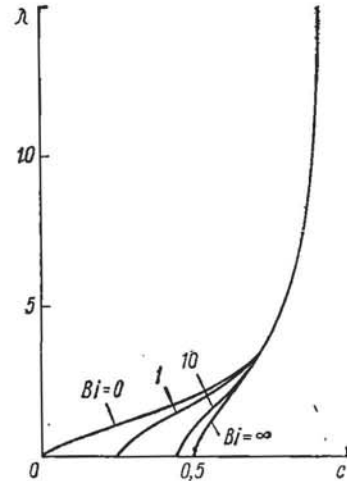


Рис. 1.

остальные величины и функции определяются, как и для задачи (1) — (3).

Для анализа полученных решений рассмотрим корни характеристических уравнений (8), (9), (14) и (15). На рис. 1—4 приведены соответственно корни этих уравнений для жесткого защемления по краям пластины ( $q = 0$ ).

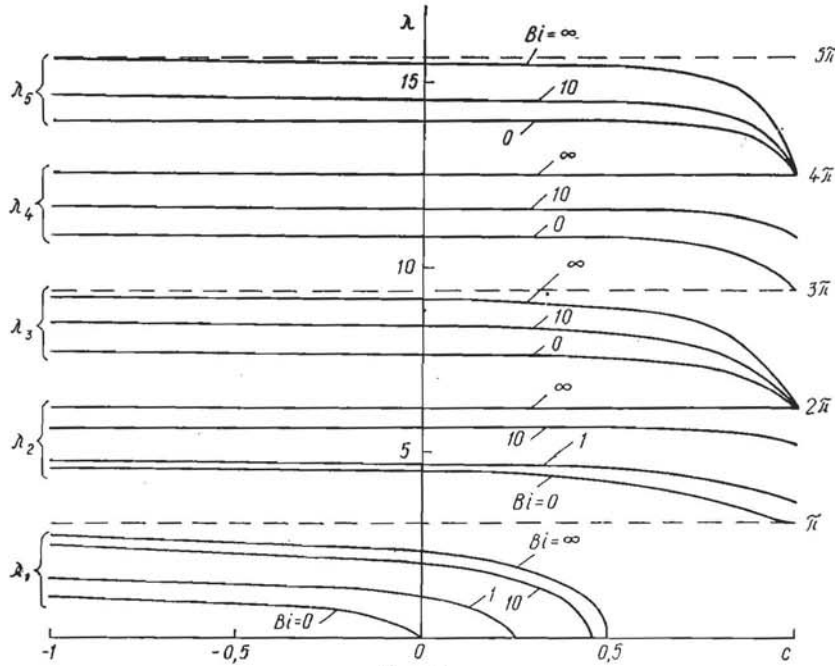


Рис. 2.

Из рис. 1 видно, что уравнение (8) при  $c \geq 0$  имеет только один корень, который в области  $c > 0,7$  практически не зависит от критерия  $Bi$  и стремится к  $\infty$ . Последнее свидетельствует, что при  $c \rightarrow 1$  температурный режим можно осуществлять как угодно, температурные напряжения не препятствуют его ограничению.

Как следует из рис. 2, уравнение (9) имеет бесконечное количество корней. Правда, при  $c > 0$  вначале, в зависимости от величины  $Bi$ , а в последующем вне этой зависимости отсутствует первый корень  $\lambda_1$  этого уравнения. Его место в решении (4) замещает корень уравнения (8) (см. рис. 1).

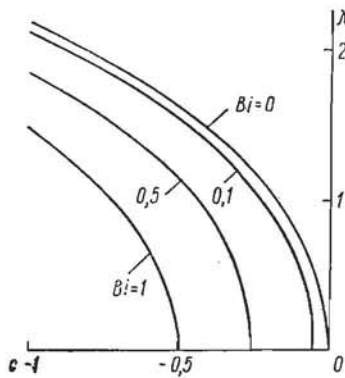


Рис. 3.

Значение параметра  $c$ , при котором первый корень  $\lambda_1$  переходит от уравнения (9) к уравнению (8), определяется из выражения

$$c = \frac{Bi}{2(1 + Bi)}.$$

Уравнение (14) (см. рис. 3) имеет только один корень при  $c^* \leq 0$ , который сильно меняется в зависимости от критерия  $Bi$ . При этом в области существования корня уравнения (14) отсутствуют корни уравнения (15) (см. рис. 4). Значение параметра  $c^*$ , при котором уравнение (14) будет иметь корень, лежит в области  $c^* \leq -\frac{Bi}{2}$ .

Таким образом, при  $c^* < -\frac{Bi}{2}$  и  $q = 0$  решение задачи (1), (2), (3) можно представить в следующем виде:

$$T(\rho, Fo) = \sum_{n=0}^p T_n(\rho) Fo^n + A_1 U(\lambda_1 \rho) \exp(\lambda_1^2 Fo),$$

где

$$A_1 = \frac{\int_0^1 [f(\rho) - T_0(\rho)] U(\lambda_1 \rho) d\rho}{\int_0^1 U^2(\lambda_1 \rho) d\rho};$$

функция  $U(\lambda_1 \rho)$  имеет вид (6);  $\lambda_1 > 0$  — корень уравнения (14).

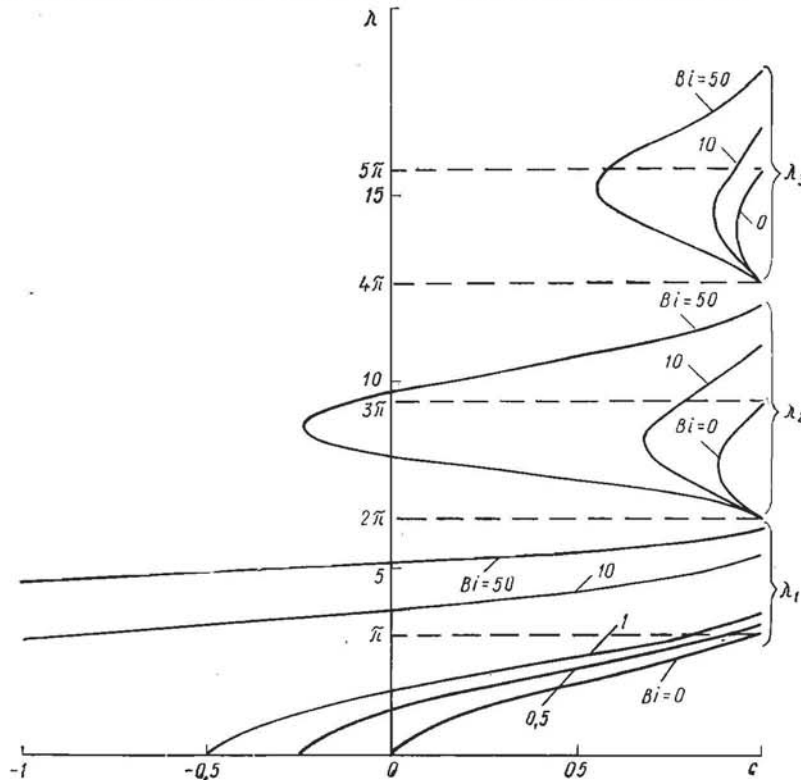


Рис. 4.

При  $c^* \geq -\frac{Bi}{2}$  и  $q = 0$  уравнение (15) имеет ограниченное количество корней ( $n = 1, 2, \dots, k$ ) (см. рис. 4). И лишь при  $c^* \rightarrow 1$  количество этих корней устремляется к бесконечному. Для этого случая решение задачи (1), (12), (13) представляется в виде

$$T(\rho, Fo) = \sum_{n=0}^p T_n(\rho) Fo^n + \sum_{n=1}^k A_n U(\lambda_n \rho) \exp(-\lambda_n^2 Fo),$$

где коэффициенты  $A_n$  ( $n = 1, 2, \dots, k$ ) определяются из системы уравнений (10), которая на этот раз будет ограниченной; функции  $U(\lambda_n \rho)$  имеют вид (7).

При  $c^* = Bi = 0$  уравнение (14) и уравнение (15) имеют только один корень и при этом нулевой, т. е.  $\lambda_1 = 0$ . Поэтому в соответствии с выражением (11) решение для этого случая представляется в простом виде

$$T(\rho, Fo) = \frac{h^2 \omega}{a} \left( \frac{\rho^2}{2} + Fo \right) + A_1,$$

где допустимая скорость изменения температуры

$$\omega = \frac{12a(1-\nu)\sigma_{доп}^T}{\alpha_r E(2-3q)h^2},$$

а постоянная величина

$$A_1 = \int_0^1 f(\rho) d\rho - \frac{h^2 \omega}{6a}.$$

При аппроксимации заданных допустимых температурных напряжений в зависимости от температуры ломаной линией [6] время перехода от одной ограничительной прямой к другой определяется из условия, что в точке пересечения этих прямых температурное поле предыдущего температурного режима должно удовлетворять также граничным условиям последующего режима. Аналогичным путем определяется время перехода от задачи (1) — (3) к задаче (1), (12), (13), т. е. из условия, что температурное поле (4) в момент перехода должно удовлетворять также первому граничному условию (12).

Определив таким путем оптимальный температурный режим, из условия теплообмена на поверхности пластины  $\rho = 1$  нетрудно определить оптимальную температуру греющей среды или оптимальный тепловой поток.

Приведенное решение для определения оптимального температурного режима пластины может быть использовано в теплоэнергетике (например, для фланца турбины) в качестве управляющей функции при автоматическом регулировании пусковых режимов теплоэнергооборудования.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Вигак В. М., Прокопенко А. Г., Фальковский С. В. — В кн.: Наладочные и экспериментальные работы ОРГРЭС, 39. СЦНТИ ОРГРЭС, М., 1970.
2. Гейтвуд Б. Е. Температурные напряжения применительно к самолетам, снарядам, турбинам и ядерным реакторам. ИЛ, М., 1959.
3. Губа В. М., Постольник Ю. С., Гаранчук В. А. — В кн.: Тепловые напряжения в элементах конструкций, 12. «Наукова думка», К., 1972.
4. Захаров Е. С., Фальковский С. В., Вигак В. М. Из опыта монтажа и наладки паропроводов блоков мощностью 150 и 200 МВт. БТИ ОРГРЭС, М., 1964.
5. Підстригач Я. С., Вигак В. М. — ДАН УРСР. Сер. А, 1972, 12.
6. Подстригач Я. С., Вигак В. М., Прокопенко А. Г. — В кн.: Тепловые напряжения в элементах конструкций, 13. «Наукова думка», К., 1973.
7. Ратнер А. В. — Электрические станции, 1967, 12.
8. Токарский Б. Н. — ИФЖ, 1969, 16, 3.
9. Шевелев А. А. — ИФЖ, 1965, 8, 1.
10. Ulrich E. — Brennstoff Wärme — Kraft, 1966, 18, 1.

Южное отделение  
ОРГРЭС, г. Львов

Поступила в редколлегию  
в декабре 1973 г.