КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

НЕКОТОРЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ВЕТВЯЩИХСЯ ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ

П. И. Боднарчук

В теории ветвящихся цепных дробей, как и в теории обыкновенных цепных дробей, важную роль играют правила их тождественного преобразования. В настоящей статье излагаются главные из них [1—3].

Теорема 1. *Любую ветвящуюся цепную дробь общего вида*

$$a_0+\sum_{k_1=1}^{N}\left(\frac{a_{k_1}^{(1)}|}{|a_{k_10}^{(1)}}+\sum_{k_2=1}^{N}\left(\frac{a_{k_1k_2}^{(2)}|}{|a_{k_1k_20}^{(2)}}+\cdots+\sum_{k_n=1}^{N}\left(\frac{a_{k_1\ldots k_n}^{(n)}|}{a_{k_1\ldots k_n0}^{(n)}}+\cdots\right)\cdots\right)\right) \tag{1}$$

всегда можно привести к виду с единицами в частных числителях:

$$a_0+\sum_{k_1=1}^{N}\left(\frac{1|}{|c_{k_10}^{(1)}}+\sum_{k_2=1}^{N}\frac{1|}{|c_{k_1k_20}^{(2)}}+\cdots+\sum_{k_n=1}^{N}\left(\frac{1|}{|c_{k_1\ldots k_n0}^{(n)}}+\cdots\right)\cdots\right). \tag{2}$$

Доказательство этой теоремы очевидно, если применить метод последовательного деления (см. [1, 3]).

Теорема 2. *Любая ветвящаяся цепная дробь общего вида* (1) *путем умножения частных числителей и знаменателей на множители* $\rho_\nu=\pm 1$ *всегда приводится к равноценной ветвящейся цепной дроби с положительными частными знаменателями и произвольными по знаку частными числителями, т. е. к ветвящейся цепной дроби вида*

$$a_0+\sum_{k_1=1}^{N}\left(\frac{a_{k_1}^{(1)}|}{|b_{k_10}^{(1)}}+\sum_{k_2=1}^{N}\left(\frac{a_{k_1k_2}^{(2)}|}{|b_{k_1k_20}^{(2)}}+\cdots+\sum_{k_n=1}^{N}\left(\frac{a_{k_1\ldots k_n}^{(n)}|}{|b_{k_1\ldots k_n0}^{(n)}}+\cdots\right)\cdots\right)\right). \tag{3}$$

Доказательство теоремы очевидно.

С помощью теорем 1 и 2 доказана следующая теорема о преобразовании ветвящейся цепной дроби с произвольными по знаку компонентами в ветвящуюся цепную дробь с положительными компонентами, исключая, возможно, частные числители первого этажа (они не влияют на сходимость и накопленную дробью погрешность округления компонент).

Теорема 3. *Если компоненты ветвящейся цепной дроби* (3) *с положительными частными знаменателями удовлетворяют условиям*

$$b_{k_1\ldots k_\nu}^{(\nu)}\geqslant\begin{cases}|a_{k_1\ldots k_\nu}^{(\nu)}|, & \text{если } a_{k_1\ldots k_{\nu+1}}^{(\nu+1)}>0;\\ |a_{k_1\ldots k_\nu}^{(\nu)}|+m_{\nu+1}, & \text{если } a_{k_1\ldots k_{\nu+1}}^{(\nu+1)}<0,\end{cases} \tag{4}$$

$$k_\nu=1,2,\ldots,N;\quad \nu=1,2,\ldots$$

где $m_{\nu+1}$ — *максимальное число значений индекса* $k_{\nu+1}$, *при котором* $a_{k_1\ldots k_{\nu+1}}^{(\nu+1)}$ — *отрицательные, то для каждого отрицательного значения* $a_{k_1\ldots k_{\nu+1}}^{(\nu+1)}=-a_{k_1\ldots k_{\nu+1}}^{(\nu+1)}$ *отрезок ветвящейся цепной дроби* (3)

$$\frac{a^{(\nu)}_{k_1\dots k_\nu}}{b^{(\nu)}_{k_1\dots k_\nu}-\sum\limits_{\tilde{k}_{\nu+1}=1}^{m_{\nu+1}}\dfrac{\setminus a^{(\nu+1)}_{k_1\dots k_\nu\tilde{k}_{\nu+1}}}{b^{(\nu+1)}_{k_1\dots k_\nu\tilde{k}_{\nu+1}}}} \tag{5}$$

заменяем отрезком

$$\frac{a^{(\nu)}_{k_1\dots k_\nu}}{b^{(\nu)}_{k_1\dots k_\nu}-m_{\nu+1}+\sum\limits_{\tilde{k}_{\nu+1}=1}^{m_{\nu+1}}\dfrac{1}{1+\dfrac{\setminus a^{(\nu+1)}_{k_1\dots k_\nu\tilde{k}_{\nu+1}}}{b^{(\nu+1)}_{k_1\dots k_\nu\tilde{k}_{\nu+1}}-\setminus a^{(\nu+1)}_{k_1\dots k_\nu\tilde{k}_{\nu+1}}}}}, \tag{6}$$

где $\tilde{k}_{\nu+1}$ принимает только те значения индекса $k_{\nu+1}$, при которых компоненты $a^{(\nu+1)}_{k_1\dots k_\nu k_{\nu+1}}$ являются отрицательными.

Путем повторного применения процесса замены отрезков (5) отрезками (6) получаем ветвящуюся цепную дробь с положительными частными числителями, исключая, возможно, частные числители первого этажа, и положительными частными знаменателями. Сходимость преобразованной ветвящейся цепной дроби тогда является достаточной для сходимости исходной ветвящейся цепной дроби (3), а множество фигурных подходящих дробей преобразованной ветвящейся цепной дроби содержит в качестве подмножества все подходящие дроби исходной ветвящейся цепной дроби.

Доказательство. Условимся описанное в теореме 3 преобразование ветвящихся цепных дробей называть преобразованием растяжения ветвящихся цепных дробей.

Обозначим через K исходную ветвящуюся цепную дробь (3), а через K_1 — преобразованную ветвящуюся цепную дробь. Очевидно, что

$$\frac{a^{(s)}_{k_1\dots k_s}}{b^{(s)}_{k_1\dots k_s}+\sum\limits_{\tilde{k}_{s+1}=1}^{m_{s+1}}\dfrac{a^{(s+1)}_{k_1\dots k_s\tilde{k}_{s+1}}}{b^{(s+1)}_{k_1\dots k_s\tilde{k}_{s+1}}}}\equiv$$

$$\equiv\frac{a^{(s)}_{k_1\dots k_s}}{b^{(s)}_{k_1\dots k_s}-m_{s+1}+\sum\limits_{\tilde{k}_{s+1}=1}^{m_{s+1}}\dfrac{1}{1+\dfrac{\setminus a^{(s+1)}_{k_1\dots k_s\tilde{k}_{s+1}}}{b^{(s+1)}_{k_1\dots k_s\tilde{k}_{s+1}}-\setminus a^{(s+1)}_{k_1\dots k_s\tilde{k}_{s+1}}}}},$$

т. е. отрезки (5) и (6) ветвящейся цепной дроби являются тождественными. Кроме того, в ветвящейся цепной дроби K_1 все компоненты являются положительными. Действительно, тогда частными знаменателями, начиная с первого этажа, будут числа

а) $b^{(s)}_{k_1\dots k_s}>0$, если $a^{(s+1)}_{k_1\dots k_s k_{s+1}}>0$ ($k_{s+1}=1, 2, \dots, N$; $s=1, 2, \dots$);

б) $b^{(s)}_{k_1\dots k_s}-m_{s+1}>0$, если $a^{(s)}_{k_1\dots k_s}>0$ при всех $k_s=1, 2, \dots, N$, а $a^{(s+1)}_{k_1\dots k_s k_{s+1}}<$ <0 при m_{s+1} значениях индекса k_{s+1};

в) $b^{(s)}_{k_1\dots k_s}-\setminus a^{(s)}_{k_1\dots k_s}\geqslant 0$, если $a^{(s+1)}_{k_1\dots k_s k_{s+1}}>0$ при всех значениях индекса k_{s+1}, а $a^{(s)}_{k_1\dots k_s}=-\setminus a^{(s)}_{k_1\dots k_s}<0$;

г) $b^{(s)}_{k_1 \dots k_s} - {}^{\backprime}a^{(s)}_{k_1 \dots k_s} - m_{s+1} \geqslant 0$, если $a^{(s)}_{k_1 \dots k_s} = -{}^{\backprime}a^{(s)}_{k_1 \dots k_s} < 0$, а $a^{(s+1)}_{k_1 \dots k_s k_{s+1}} < 0$ при m_{s+1} значениях индекса k_{s+1}.

Если через P_s и Q_s обозначить соответственно числитель и знаменатель s-й подходящей дроби ветвящейся цепной дроби K, то s-я подходящая дробь к K совпадает с некоторой фигурной или прореженной (см. [1]) подходящей дробью ветвящейся цепной дроби K_1. Следовательно, при сходимости множества фигурных или прореженных подходящих дробей к ветвящейся цепной дроби K_1 (очевидно, при ее сходимости это имеет место) является сходящейся и последовательность подходящих дробей ветвящейся цепной дроби (3). Теорема доказана.

Заметим, что при $m_{s+1} = N$ растяжение исходной ветвящейся цепной дроби является равномерным.

Теорема 3 дает возможность переносить на ветвящиеся цепные дроби с произвольными по знаку компонентами закономерности и свойства ветвящихся цепных дробей с положительными компонентами, например признаки сходимости, теоремы о ненакоплении относительных погрешностей округления компонент и др. (см. [1—3]).

В качестве примера сформулируем одну из таких теорем.

Теорема 4. *Пусть ветвящаяся цепная дробь общего вида* (1) *с произвольными по знаку компонентами преобразована в равноценную ветвящуюся цепную дробь* (3) *с положительными частными знаменателями и выполнены условия* (4). *Пусть, далее, ветвящаяся цепная дробь* (3) *преобразованием растяжения преобразована в ветвящуюся цепную дробь с положительными компонентами, которая снова заменена равноценной дробью вида* (2) *с положительными компонентами и накопленной относительной погрешностью компонент* δ_n *при числе этажей* n. *Тогда максимальная относительная погрешность дроби* (1) *не превышает* δ_n.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боднарчук П. И., Скоробогатько В. Я. Ветвящиеся цепные дроби и их приложения. «Наукова думка», К., 1974.
2. Боднарчук П. И., Слоневский Р. В., Марко В. Ф.— В кн.: Вопросы алгебры и теории дифференциальных уравнений, 75. Изд-во Львовского ун-та, Львов, 1973.
3. Слоневский Р. В. Элементы теории ветвящихся цепных дробей и ее приложения к решению дифференциальных уравнений и марковским процессам. Автореф. канд. дис., Одесса, 1972.

Львовский политехнический институт

Поступила в редколлегию в январе 1974 г.

О НАИЛУЧШЕМ ЧЕБЫШЕВСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ ОДНИМ НЕЛИНЕЙНЫМ ВЫРАЖЕНИЕМ

Б. Р. Монцибович, Б. А. Попов

Известно, что физические величины могут описываться аналитическими зависимостями, которые далеко не исчерпываются многочленными и рациональными выражениями. Для приближения экспериментальных данных часто также используются выражения вида [1]

$$y = Ax^B; \quad y = Ae^{Bx}; \quad y = Ae^{Bx+Cx^2}; \quad y = Ax^Be^{Cx}; \quad y = Ax^Be^{Cx+Dx^2}.$$

Рассмотрим выражение

$$W_{k,l}(x) = Ax^{\sum\limits_{i=1}^{k} a_i x^{i-1}} e^{\sum\limits_{i=1}^{l} b_i x^i} \tag{1}$$