3. Ремез Е. Я. Основы численных методов чебышевского приближения. «Наукова думка», К., 1969.
4. Barrar R. B., Loeb H. L.— Pacific. j. Math., 1970, 32, 4.
5. Barrar R. B., Loeb H. L.— Numer Math., 1970, 15,5.
6. Duncham C. B.— J. Inst. Math. Applic., 1971, 8, 3.
7. Rice J. R. The Approximation of Functions, 2, Reading. Massach., 1969.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР, Физико-механический институт АН УССР

Поступила в редколлегию в декабре 1973 г.

ПЕРИОДИЧЕСКАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

В. Н. Полищук

В области $D = \{0 \leqslant t \leqslant T < \infty; \ -\infty < x_p < +\infty, \ p = 1, 2, \ldots, m\}$ рассматривается следующая задача:

$$L[u] \equiv \prod_{j=1}^{q} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \sum_{p=1}^{m} \lambda_{pj} \frac{\partial}{\partial x_p} - b_j \right)^{n_j} u = f(t, x_1, \ldots, x_m), \quad (1)$$

$$\left. \frac{\partial^r u}{\partial t^r} \right|_{t=0} = \left. \frac{\partial^r u}{\partial t^r} \right|_{t=T} \qquad (r = 0, 1, \ldots, n-1), \quad (2)$$

где λ_{pj}, b_j $(j = 1, \ldots, q; \ p = 1, \ldots, m)$ — действительные числа, $n_1 + \ldots + n_q = n$, а функция $f(t, x_1, \ldots, x_m)$ в области D непрерывна по t, 2π-периодическая и достаточно гладкая по $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Решение задачи ищется в классе 2π-периодических по пространственным переменным функций.

Частный случай этой задачи рассмотрен в работе [3].

В дальнейшем будем использовать такие обозначения:

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_m); \quad k = (k_1, k_2, \ldots, k_m);$$

$$|k| = |k_1| + \cdots + |k_m|; \quad (k, x) = k_1 x_1 + \cdots + k_m x_m;$$

$C_{2\pi}^{(p,q)}(D)$ — класс функций, которые определены в области D, p раз непрерывно дифференцируемы по t, а по x — 2π-периодические и q раз непрерывно дифференцируемы.

Решение задачи ищем в виде ряда

$$u(t, x) = \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{k_m=-\infty}^{\infty} u_k(t) \exp\{i(k, x)\}. \quad (3)$$

Тогда каждая из функций $u_k(t)$ является, соответственно, решением такой задачи:

$$\prod_{j=1}^{q(k)} \left[\frac{d}{dt} - \left(i \sum_{p=1}^{m} \lambda_{pj} k_p + b_j \right) \right]^{n_j(k)} u_k(t) = f_k(t), \quad (4)$$

$$l_r[u_k] \equiv u_k^{(r)}(0) - u_k^{(r)}(T) = 0 \qquad (r = 0, 1, \ldots, n-1), \quad (5)$$

где $f_k(t)$ — коэффициенты Фурье функции $f(t, x)$; $n_1(k) + \ldots + n_q(k) = n$,

$$i \sum_{p=1}^{m} (\lambda_{ps} - \lambda_{pv}) k_p + (b_s - b_v) \neq 0 \qquad (s, v = 1, 2, \ldots, q(k); \ s \neq v).$$

Для вектора $k \neq 0$ однородное уравнение

$$\prod_{j=1}^{q(k)} \left[\frac{d}{dt} - \left(i \sum_{p=1}^{m} \lambda_{pj} k_p + b_j \right) \right]^{n_j(k)} u_k(t) = 0, \quad (4^*)$$

соответствующее неоднородному уравнению (4), имеет такую фундаментальную систему решений:

$$u_{k,j,s_j}(t) = t^{s_j-1}\exp\left\{\left(i\sum_{p=1}^{m}\lambda_{pj}k_p + b_j\right)t\right\}, \qquad (6)$$

$$s_j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n_j(k);\quad j = 1,\ 2,\ \ldots,\ q(k),$$

а решение задачи (4*), (5) можно записать в виде

$$\tilde{u}_k(t) = \sum_{j=1}^{q(k)}\sum_{s_j=1}^{n_j(k)} c_{k,j,s_j}u_{k,j,s_j}(t),$$

где коэффициенты c_{k,j,s_j} $(s_j = 1, 2, \ldots, n_j(k);\ j = 1, 2, \ldots, q(k))$ определяются из системы уравнений

$$\sum_{j=1}^{q(k)}\sum_{s_j=1}^{n_j(k)} c_{k,j,s_j}[u_{k,j,s_j}^{(r)}(0) - u_{k,j,s_j}^{(r)}(T)] = 0 \qquad (r = 0, 1, \ldots, n-1), \qquad (7)$$

определитель которой $\Delta(k)$ вычисляется по формуле

$$\Delta(k) = \prod_{j=1}^{q(k)} 1!\,2!\,\ldots\,(n_j(k)-1)!\left[1 - \exp\left(i\sum_{p=1}^{m}\lambda_{pj}k_p + b_j\right)T\right]^{n_j(k)} \times$$

$$\times \prod_{q(k)\geqslant s>\nu\geqslant 1}\left[i\sum_{p=1}^{m}(\lambda_{ps}-\lambda_{p\nu})k_p + (b_s - b_\nu)\right]^{n_s(k)n_\nu(k)}. \qquad (8)$$

Заметим, что если в уравнении (1) $b_j \neq 0$ $(j = 1, \ldots, q)$, то для вектора $k = 0$ всегда существует единственное решение $u_0(t)$ задачи (4), (5).

Если $k \neq 0$, то единственность решения задачи (4), (5) имеет место тогда и только тогда, когда $\Delta(k) \neq 0$ [2].

Поэтому из формулы (8) и теоремы о единственности разложения функции в ряд Фурье следует такое утверждение.

Теорема 1. *Если в уравнении* (1) $b_j \neq 0$ $(j = 1, 2, \ldots, q)$, *то задача* (1), (2) *не может иметь двух различных решений из класса* $C_{2\pi}^{n,n+m+1}(D)$.

Решение задачи (1), (2) существует, если для каждого вектора k существует решение задачи (4), (5) и если в области D ряд (3) и ряды, полученные его почленным дифференцированием до порядка n включительно, равномерно сходятся.

Предположим, что решение задачи (1), (2) единственно. Тогда для каждого целочисленного вектора $k \neq 0$ существует функция Грина $G_k(t, \tau)$ задачи (4*), (5), с помощью которой решение задачи (4), (5) представляется в виде [2]

$$u_k(t) = \int_0^T G_k(t, \tau) f_k(\tau)\,d\tau \qquad (k = \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

а решение задачи (1), (2) формально можно записать в виде ряда

$$u(t, x) = u_0(t) + \sum_{k_1=-\infty}^{\infty}\cdots\sum_{k_m=-\infty}^{\infty}{}' \int_0^T G_k(t, \tau) f_k(\tau)\,d\tau \exp\{i(k, x)\}, \qquad (9)$$

где штрих означает, что пропущено суммирование по нулевому вектору.

Для функции $G_k(t, \tau)$ и ее производных по t имеют место следующие оценки:

$$\left|\frac{\partial^s G_k(t, \tau)}{\partial t^s}\right| \leqslant \frac{c\,|k|^{s+\frac{n(n-1)}{2}}\left\{\prod_{j=1}^{q(k)}\left|1 - \exp\left(i\sum_{p=1}^{m}\lambda_{pj}k_p + b_j\right)T\right|^{n_j(k)}\right\}^{-1}}{\prod_{q_k\geqslant s>\nu\geqslant 1}\left|i\sum_{p=1}^{m}(\lambda_{ps}-\lambda_{p\nu})k_p + (b_s - b_\nu)\right|^{n_s(k)n_\nu(k)}}. \qquad (10)$$

Из выражения (9) и оценок (10) следуют такие теоремы.

Теорема 2. *Пусть в уравнении* (1) *все* b_j $(j = 1, 2, \ldots, q)$ *различны и не равны нулю. Если* $f(t, x) \in C_{2\pi}^{\left(0, \frac{n(n+1)}{2}+m+1\right)}(D)$, *то существует решение задачи* (1), (2), *которое представляется рядом* (9) *и принадлежит классу* $C_{2\pi}^{(n,n)}(D)$.

Теорема 3. *Пусть в уравнении* (1) $b_j \neq 0$ $(j = 1, 2, \ldots, q)$ *и для некоторых* s_0 *и* ν_0 $(1 \leqslant s_0, \nu_0 \leqslant q)$ $b_{s_0} = b_{\nu_0}$. *Если существуют константа* $M > 0$ *и натуральное число* r *такие, что для всех (за исключением конечного числа) целочисленных векторов* k *выполняются неравенства*

$$\left|\sum_{p=1}^{m} (\lambda_{ps_0} - \lambda_{p\nu_0}) k_p\right| > \frac{M}{|k|^r}, \tag{11}$$

и если $f(t, x) \in C_{2\pi}^{(0,N)}(D)$, *где* N — *некоторое достаточно большое натуральное число, то существует решение задачи* (1), (2), *которое принадлежит классу* $C_{2\pi}^{(n,n)}(D)$.

Лемма. *Почти каждый (в смысле меры Лебега) вектор* $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_m)$ *удовлетворяет неравенству*

$$|\omega_1 k_1 + \cdots + \omega_m k_m| \geqslant K(|k_1| + \cdots + |k_m|)^{-(m+1)} \tag{12}$$

для всех целочисленных $k \neq 0$ *при некотором* $K(\omega) > 0$ [1].

Из теоремы 3 и предыдущей леммы следует утверждение.

Теорема 4. *Пусть в уравнении* (1) $b_j \neq 0$ $(j = 1, \ldots, q)$ *и для некоторых* s_0 *и* ν_0 $(1 \leqslant s_0, \nu_0 \leqslant q)$ $b_{s_0} = b_{\nu_0}$. *Если* $f(t, x) \in C_{2\pi}^{(0,N)}(D)$, *где* N — *некоторое достаточно большое натуральное число, то для почти всех (в смысле меры Лебега) чисел* λ_{pj} $(p = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, q)$ *существует решение задачи* (1), (2) *в классе* $C_{2\pi}^{(n,n)}(D)$.

З а м е ч а н и е. Результаты работы переносятся на случай, когда в уравнении (1) λ_{pj} и b_j $(j = 1, 2, \ldots, q)$ являются $j - 1$ раз непрерывно дифференцируемыми функциями от t.

ЛИТЕРАТУРА

1. А р н о л ь д В. И.— УМН, 1963, 18, 6 (114).
2. К а м к е Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. «Наука», М., 1965.
3. П т а ш н и к Б. Й.— ДАН УРСР. Сер. А, 1973, 11.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию в декабре 1973 г.

ДОСТАТОЧНЫЙ ПРИЗНАК СХОДИМОСТИ ВЕТВЯЩЕЙСЯ ЦЕПНОЙ ДРОБИ С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ ЧЛЕНАМИ

Д. И. Боднар, И. Я. Олексив

Ветвящиеся цепные дроби впервые рассмотрены в работе [3]. Несмотря на свою новизну, теория ветвящихся цепных дробей уже нашла свое применение в теории чисел, теории дифференциальных уравнений, теории функций и вычислительной математике [1]. В работах [1—3] исследовались вопросы сходимости ветвящихся цепных дробей.

В настоящей статье приведен достаточный признак сходимости ветвящейся цепной дроби с положительными членами вида

$$\cfrac{1}{a + \sum\limits_{i_1=1}^{n} \cfrac{1}{a_{i_1} + \sum\limits_{i_2=1}^{n} \cfrac{1}{a_{i_1 i_2} + \vdots}}}, \tag{1}$$

где $a_{i_1 i_2 \ldots i_k} > 0$; $1 \leqslant i_k \leqslant n$, $k = 1, 2, \ldots$.