Введя обозначения

$$a_{i_1 i_2 \ldots i_k} + \sum_{i_{k+1}=1}^{n} \frac{1}{a_{i_1 \ldots i_{k+1}} + \vdots \atop + \sum\limits_{i_p=1}^{n} \frac{1}{a_{i_1 \ldots i_k \ldots i_p}}} = Q_{i_1 \ldots i_k}^{k+1,p},$$

получаем следующую формулу:

$$\frac{1}{Q^{1,2p-1}} - \frac{1}{Q^{1,2p}} =$$

$$= \sum_{i_1 \ldots i_{2p-1}} \frac{1}{Q^{1,2p-1} \prod\limits_{k=0}^{p-2} (Q_{i_1 \ldots i_{2k+1}}^{2k+2,2p-1} \cdot Q_{i_1 \ldots i_{2k+2}}^{2k+3,2p-1}) \prod\limits_{k=0}^{p-1} (Q_{i_1 \ldots i_{2k}}^{2k+1,2p} \cdot Q_{i_1 \ldots i_{2k+1}}^{2k+2,2p})},$$

где $\frac{1}{Q^{1,2p-1}} = \frac{1}{Q_{i_0}^{1,2p-1}}$ и $\frac{1}{Q^{1,2p}} = \frac{1}{Q_{i_0}^{1,2p}}$ — $(2p-1)$-я и $(2p)$-я подходящие дроби, а суммирование ведется по всем индексам $i_1, \ldots, i_{2p-1}$, каждый из которых независимо пробегает значения от 1 до n.

Используя соотношение

$$Q_{i_1 \ldots i_k}^{k+1,2p-1} = a_{i_1 \ldots i_k} + \frac{1}{Q_{i_1 \ldots i_k 1}^{k+2,2p-1}} + \cdots + \frac{1}{Q_{i_1 \ldots i_k n}^{k+2,2p-1}}$$

и неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\delta + \sum\limits_{j=1}^{n} x_i \cdot x_j^{-1}} \leqslant 1 - K_n(\delta)\,\delta,$$

справедливое для произвольных $x_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$ и $\delta > 0$, где $K_n(\delta)$ не зависит от x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, $0 < K_n(\delta)\,\delta < 1$, можно доказать следующее утверждение.

Теорема. *Ветвящаяся цепная дробь (1) с положительными членами сходится, если ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \min_{i_1 \ldots i_k} a_{i_1 \ldots i_k} \cdot \min_{i_1 \ldots i_{k+1}} a_{i_1 \ldots i_{k+1}}$$

расходится, где $\min\limits_{i_1 \ldots i_k} a_{i_1 \ldots i_k}$ *обозначает минимальное значение элементов дроби, расположенных на* $(k+1)$*-м этаже дроби.*

Теорема остается верной и в том случае, если некоторые члены дроби (1) обращаются в нуль.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боднарчук П. І., Скоробогатько В. Я. Гіллясті ланцюгові дроби та їх застосування. «Наукова думка», К., 1974.
2. Скоробогатько В. Я.— ДАН УРСР. Сер. А, 1972, 1.
3. Скоробогатько В. Я. та ін.— ДАН УРСР, 1967, 131.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию в октябре 1973 г.

ОБ ОДНОМ ИНТЕГРАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ ТЕОРИИ СИНТЕЗА АНТЕНН

Н. Н. Войтович, П. А. Савенко

При решении задач синтеза антенн по методу Семенова [4] возникает нелинейное интегральное уравнение [2]

$$\varphi(\xi') = \arg \int_{-1}^{1} F(\xi) \frac{\sin c(\xi - \xi')}{\xi - \xi'} e^{i\varphi(\xi)} d\xi, \tag{1}$$

где $F(\xi)$ — заданная вещественная положительная функция — амплитудная диаграмма направленности линейной антенны, а параметр c описывает геометрические и физические характеристики системы. Это уравнение имеет одно очевидное решение $\varphi(\xi) \equiv \mathrm{const}$. При определенных значениях параметра c появляются новые решения, отличные от константы. Для некоторых частных случаев задания амплитудной диаграммы $F(\xi)$ уравнение (1) решалось численно методом последовательных приближений [2, 3].

К уравнению (1) можно применить методы теории ветвления решений нелинейных уравнений [1]. Для этого нужно, прежде всего, решить соответствующее линейное уравнение Фредгольма второго рода, которое удается свести к виду [3]

$$\int_{-1}^{1} F(\xi)\frac{\sin c(\xi-\xi')}{\xi-\xi'}[\psi(\xi)-\psi(\xi')]\,d\xi = 0. \tag{2}$$

Значения c, при которых это уравнение имеет отличные от константы решения, являются точками ветвления, а собственные функции $\psi_n(\xi)$, отвечающие данным значениям c, участвуют в построении искомого решения уравнения (1).

Оказывается, что собственные функции $\psi_n(\xi)$ уравнения (2) явно выписываются в виде простых дробно-рациональных выражений. Коэффициенты в этих выражениях, а также точки ветвления c определяются в общем случае из некоторой системы трансцендентных уравнений.

Для построения решения уравнения (1) нужно, чтобы различные $\psi_n(\xi)$, соответствующие одной и той же точке ветвления c, были ортонормированы с некоторым весом. Однако ради простоты записи мы здесь не будем придерживаться этого требования, имея в виду, что ортогонализация и нормировка известных функций не представляет труда.

Все точки ветвления уравнения (2) можно разбить на два класса, охватывающих соответственно одномерные и двумерные случаи ветвления. Принадлежность к тому или другому классу определяется количеством собственных функций, отвечающих одному и тому же c. Наибольший интерес для практики представляют несколько первых точек ветвления. Оказывается, что для широкого класса функций $F(\xi)$ в первой точке ветвление одномерно, а во второй — двумерно. В последующем встречаются ветвления как того, так и другого типа.

В одномерном случае ветвления собственная функция уравнения (2) имеет вид

$$\psi_1(\xi) = \frac{\xi}{1+b\xi}. \tag{3}$$

Подставляя формулы (3) в (2), получаем систему трансцендентных уравнений

$$\begin{gathered}\int_{-1}^{1}\frac{F(\xi)\sin c\xi}{1+b\xi}\,d\xi = 0,\\ \int_{-1}^{1}\frac{F(\xi)\cos c\xi}{1+b\xi}\,d\xi = 0,\end{gathered} \tag{4}$$

из которой определяется коэффициент b и точки ветвления c. Например, для $F(\xi)=1+\alpha\xi$ имеем $b=\alpha$, $c=n\pi$ $(n=1, 2, \ldots)$ и первое ветвление происходит при $c=\pi$. Для $\alpha=1$ этот результат был получен численным путем в работе [2].

Для четных функций $F(\xi)$ b оказывается равным нулю и c определяется из уравнения

$$\int_{-1}^{1} F(\xi)\cos c\xi\,d\xi = 0. \tag{5}$$

Так, для $F(\xi) \equiv 1$ $c = n\pi$, для $F(\xi) = \cos\frac{\pi\xi}{2}$ $c = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$, а для $F(\xi) = 1 - \xi^2$ трансцендентное уравнение принимает вид $\operatorname{tg} c = c$ и имеет первый корень $c = 4{,}4934$ [5]. Следует отметить, что в работе [2] для функции $F(\xi) \equiv 1$ первая точка ветвления $c = \pi$ не была обнаружена, поскольку там решение уравнения (1) определялось в классе четных функций, а ответвляющееся в первой точке решение нечетно. Приведенное в работе [2] значение c_0 является второй точкой ветвления.

При рассмотрении двумерного случая ветвления ограничимся четными $F(\xi)$. Собственные функции при этом имеют вид

$$\psi_1(\xi) = \frac{1}{1+\beta\xi^2}, \quad \psi_2(\xi) = \frac{\xi}{1+\beta\xi^2}. \tag{6}$$

Потребовав, чтобы эти функции удовлетворяли уравнению (2), придем к следующей системе трансцендентных уравнений:

$$\begin{gathered} \int\limits_{-1}^{1} \frac{K(\xi)\cos c\xi}{1+\beta\xi^2}\, d\xi = 0, \\ \int\limits_{-1}^{1} \frac{F(\xi)\,\xi\sin c\xi}{1+\beta\xi^2}\, d\xi = 0, \end{gathered} \tag{7}$$

из которой можно определить параметр β и точку ветвления c. Например, для $F(\xi) \equiv 1$ второе ветвление имеет место при $c \approx 5{,}347$ и $\beta \approx 2{,}987$. Соответственно, для $F(\xi) = \cos\frac{\pi\xi}{2}$ получается $c \approx 7{,}075$ и $\beta \approx 1{,}760$.

Отметим в заключение, что, зная точки ветвления и соответствующие им собственные функции $\psi_n(\xi)$, можно, следуя работе [1], выписать решение уравнения (1) в виде рядов, хорошо сходящихся в окрестности точек ветвления.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. «Наука», М., 1969.
2. Войтович Н. Н.— Радиотехника и электроника, 1972, **17**, 12, 2491.
3. Войтович Н. Н., Савенко П. А.— Радиотехника и электроника, 1973, **18**, 9.
4. Семенов В. В.— Радиотехника и электроника, 1972, **17**, 1, 23.
5. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. Формулы, графики, таблицы. «Наука», М., 1968.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию в декабре 1973 г.

К ИССЛЕДОВАНИЮ УСТОЙЧИВОСТИ СЖАТОГО И СКРУЧЕННОГО КОНСОЛЬНОГО СТЕРЖНЯ С УЧЕТОМ ДЕФОРМАЦИИ КРУЧЕНИЯ

Б. С. Остапович

Рассматривая задачу устойчивости сжатого и скрученного аксиальным или тангенциальным моментом консольного стержня, Е. Л. Николаи [3] пришел к выводу, что метод Эйлера не применим к данной задаче. Предположив, что масса стержня расположена на свободном конце, и применив метод малых колебаний, Николаи показал, что в данном случае при условии равенства главных изгибных жесткостей и без учета трения всегда имеет место неустойчивость. При этом не учитывалась деформация кручения, предшествующая потере устойчивости (угол закручивания предполагался пренебрежительно малым).