динатные условия уравнениями эллиптического типа с производными $\frac{\partial^2 g_{00}}{\partial x^0 \partial x^\nu}$, $\frac{\partial^2 g_{0\beta}}{\partial x^{02}}$, $\frac{\partial^2 g_{0\alpha}}{\partial x^{\alpha 2}}$.

Если записать координатные условия Франкля (7) как условия на компоненты метрического тензора:

$$\frac{\partial^2 g_{00}}{\partial x^{02}} = 0, \quad 2\frac{\partial^2 g_{01}}{\partial x^{02}} - \frac{\partial^2 g_{00}}{\partial x^0 \partial x^1} = 0,$$
$$2\frac{\partial^2 g_{02}}{\partial x^{02}} - \frac{\partial^2 g_{00}}{\partial x^0 \partial x^2} = 0, \quad 2\frac{\partial^2 g_{03}}{\partial x^{02}} - \frac{\partial^2 g_{00}}{\partial x^0 \partial x^3}, \tag{11}$$

то из полученных выше необходимых и достаточных условий гиперболичности следует гиперболичность уравнений Эйнштейна при использовании координатных условий Франкля.

Итак, условия Гильберта не являются достаточными условиями гиперболичности уравнений Эйнштейна в локальной карте, и для гиперболичности уравнений необходимо выделить классы определенных координатных условий, согласовывая их в этом смысле с уравнениями поля гравитации, как это сделано в данной работе для некоторых типов координатных условий.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гравитация и топология. «Мир», М., 1966.
2. Захаров В. Д. Гравитационные волны в теории тяготения Эйнштейна. «Наука», М., 1972.
3. Инфельд Л., Плебаньский Е. Движение и релятивизм. ИЛ, М., 1962.
4. Кучеренко А. И., Лоскутов А. В. — ДАН СССР, 1974, 215, 5.
5. Петров А. З. Новые методы в общей теории относительности. «Наука», М., 1966.
6. Петровский И. Г. Лекции об уравнениях с частными производными. Гостехиздат, М., 1961.
7. Синг Дж. Общая теория относительности. ИЛ, М., 1963.
8. Франкль Ф. И.— ДАН СССР, 1952, 84, 1.
9. Lichnerowicz A. Theories relativistes de la gravitation et de l'electromagnetisme, Masson Cie, Paris, 1954.
10. Mme Foures-Bruhat G.— Acta Mathematica, 1952, 88, 1—2.
11. Mme Foures-Bruhat Y.— J. Rat. Mech., 1954, 5.
12. Mme Foures et Lichnerowicz A.— Compt. Rend. Acad. Sci., 1948, 226.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию в октябре 1974 г.

О ПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ, РАСПАДАЮЩИХСЯ НА ЛИНЕЙНЫЕ МНОЖИТЕЛИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В. Н. Полищук, Б. И. Пташник

В данной статье, являющейся развитием работы [3], изучается периодическая краевая задача (по переменной t) для гиперболического оператора с многими пространственными переменными, распадающегося на линейные множители первого порядка с постоянными коэффициентами. Исследуются случаи простых и кратных множителей в разложении оператора.

В дальнейшем используются такие обозначения:

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_m); \quad k = (k_1, k_2, \ldots, k_m); \quad |k| = |k_1| + |k_2| + \cdots$$
$$\cdots + |k_m|; \quad (k, x) = k_1 x_1 + k_2 x_2 + \cdots + k_m x_m;$$
$$D = \{t, x : 0 \leqslant t \leqslant T < \infty; \quad -\infty < x_p < +\infty, \ p = 1, 2, \ldots, m\};$$

$C_{2\pi}^{(p,q+\alpha)}(D)$ $(q \geqslant p)$ — класс функций $v(t, x)$, которые определены в области D, p раз непрерывно дифференцируемы по t, 2π-периодические по x и q раз непрерывно дифференцируемы, причем производные $\frac{\partial^q v}{\partial x_j^q}$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ удовлетворяют условию Гельдера с показателем α $(0 < \alpha \leqslant 1)$.

Пусть в области D задано уравнение

$$L[u] \equiv \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \sum_{p=1}^{m} \lambda_{pj} \frac{\partial}{\partial x_p} - b_j \right) u(t, x) = f(t, x), \tag{1}$$

где λ_{pj}, b_j — действительные числа. Для уравнения (1) рассмотрим задачу с периодическими краевыми условиями

$$\left. \frac{\partial^r u}{\partial t^r} \right|_{t=0} = \left. \frac{\partial^r u}{\partial t^r} \right|_{t=T} \quad (r = 0, 1, \ldots, n-1). \tag{2}$$

Как показано в работе [3], решение задачи (1), (2), вообще говоря, не будет единственным, если не наложить на него дополнительных условий по пространственным переменным.

Решение рассматриваемой задачи будем искать в классе функций, 2π-периодических по пространственным переменным, считая, что $f(t, x) \in C_{2\pi}^{(0, N+\alpha)}(D)$ (N — достаточно большое натуральное число) и $f(0, x) = f(T, x)$. Предположим, что уравнение (1) строго гиперболическое, т. е. что для произвольного действительного вектора $\eta = 0$ все корни $\mu(\eta)$ уравнения

$$\prod_{j=1}^{n} \left(\mu - \sum_{p=1}^{m} \lambda_{pj} \eta_p \right) = 0 \tag{3}$$

действительны и различны *.

Решение задачи (1), (2) ищем в виде ряда

$$u(t, x) = \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{k_m=-\infty}^{\infty} u_k(t) \exp\{i(k, x)\}. \tag{4}$$

Тогда каждая из функций $u_k(t)$ будет решением такой задачи:

$$\prod_{j=1}^{n} \left[\frac{d}{dt} - \left(i \sum_{p=1}^{m} \lambda_{pj} k_p + b_j \right) \right] u_k(t) = f_k(t), \tag{5}$$

$$l_r[u_k] \equiv u_k^{(r)}(0) - u_k^{(r)}(T) = 0 \quad (r = 0, 1, \ldots, n-1), \tag{6}$$

где $f_k(t)$ — коэффициенты Фурье функции $f(t, x)$.

Для каждого вектора $k \neq 0$ однородное уравнение

$$\prod_{j=1}^{n} \left[\frac{d}{dt} - \left(i \sum_{p=1}^{m} \lambda_{pj} k_p + b_j \right) \right] u_k(t) = 0 \tag{5*}$$

имеет такую фундаментальную систему решений:

$$u_{k\nu} = \exp\left\{ i \sum_{p=1}^{m} \lambda_{p\nu} k_p + b_\nu \right\} t \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n), \tag{7}$$

а решение задачи (5*), (6) представляется в виде

$$\tilde{u}_k(t) = \sum_{\nu=1}^{n} c_{k\nu} \exp\left\{ i \sum_{p=1}^{m} \lambda_{p\nu} k_p + b_\nu \right\} t, \tag{8}$$

---

* Все дальнейшие выкладки сохраняются также в случае нестрогой гиперболичности уравнения (1), если предположить, что все b_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ разные.

где $c_{k\nu}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ определяются из системы уравнений

$$\sum_{\nu=1}^{n} c_{k\nu}\left[1 - \exp\left(i\sum_{p=1}^{m}\lambda_{p\nu}k_p + b_\nu\right)T\right]\left(i\sum_{p=1}^{m}\lambda_{p\nu}k_p + b_\nu\right)^s = 0$$

$$(s = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1), \tag{9}$$

определитель которой равен

$$\Delta(k) = \prod_{j=1}^{n}\left[1 - \exp\left(i\sum_{p=1}^{m}\lambda_{pj}k_p + b_j\right)T\right]\times$$

$$\times\prod_{n\geqslant r>\nu\geqslant 1}\left[i\sum_{p=1}^{m}(\lambda_{pr} - \lambda_{p\nu})k_p + (b_r - b_\nu)\right]. \tag{10}$$

Следовательно, для каждого вектора $k \neq 0$ решение задачи (5), (6) единственно только тогда, когда $\Delta(k) = 0$.

З а м е ч а н и е 1. Легко показать, что для вектора $k = (0, 0, \ldots, 0)$ задача (5), (6) имеет единственное решение $u_0(t)$, когда $b_j \neq 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$; если же некоторые из $b_j = 0$, то решение указанной задачи существует только тогда, когда

$$\int_0^T\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi} f(t, x)\,dx_1\cdots dx_m dt = 0 \tag{11}$$

и определяется с точностью до аддитивной константы.

Теорема 1. *Если в уравнении* (1) *все* b_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ *отличны от нуля, то задача* (1), (2) *не может иметь двух различных решений из класса* $C_{2\pi}^{(n, n+m+\alpha)}(D)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что существуют два решения $u_1(t, x)$ и $u_2(t, x)$ задачи (1), (2) из класса $C_{2\pi}^{(n, n+m+\alpha)}(D)$. Тогда функция $u = u_1 - u_2$ удовлетворяет условиям (2) и однородному уравнению

$$L[u] \equiv \prod_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial t} - \sum_{p=1}^{m}\lambda_{pj}\frac{\partial}{\partial x_p} - b_j\right)u = 0. \tag{1*}$$

Так как функция $u(t, x) \in C_{2\pi}^{(n, n+m+\alpha)}(D)$, то ее можно разложить в ряд Фурье вида (4) и применить к нему оператор L. Тогда для каждого вектора k $u_k(t)$ будет решением задачи (5*), (6). Далее, если все b_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ отличны от нуля, то $\Delta(k) \neq 0$ для всех целочисленных векторов $k \neq 0$. Это следует из строгой гиперболичности оператора L и оценки

$$\left|1 - \exp\left\{\left(i\sum_{p=1}^{m}\lambda_{pj}k_p + b_j\right)T\right\}\right| \geqslant |1 - \exp\{b_jT\}| = a_j > 0. \tag{12}$$

Отсюда, учитывая замечание 1, получаем, что для всех целочисленных векторов k $u_k(t) \equiv 0$. Из теоремы о единственности разложения функции в ряд Фурье следует, что $u(t, x) \equiv 0$, т. е. $u_1(t, x) \equiv u_2(t, x)$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть в уравнении* (1) $b_j = 0$ $(j = s_1, s_2, \ldots, s_r;\ 1 \leqslant s_1, \ldots, s_r \leqslant n)$. *Для того чтобы два решения задачи* (1), (2) *из класса* $C_{2\pi}^{(n, n+m+\alpha)}(D)$ *отличались между собой лишь на аддитивную константу, необходимо и достаточно, чтобы уравнения*

$$\sum_{p=1}^{m}\lambda_{pj}k_p - \frac{2\pi}{T}l = 0, \qquad j = s_1, \ldots, s_r, \tag{13}$$

не имели нетривиальных решений в целых числах $k_1, \ldots, k_m, l$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если какое-нибудь из уравнений (13) имеет решение в целых числах $k_1^0, \ldots, k_m^0, l^0$, то однородная задача (1*), (2) имеет решение вида

$$c_1 \cos p \left[\frac{2\pi}{T} l^0 t + (k^0, x) \right], \quad c_2 \sin p \left[\frac{2\pi}{T} l^0 t + (k^0, x) \right]$$

$$(\pm p = 0, 1, 2, \ldots), \tag{14}$$

где c_1, c_2 — произвольные константы.

Доказательство достаточности аналогично доказательству теоремы 1. При этом надо учесть замечание 1 и то, что если уравнения (13) не имеют нетривиальных решений в целых числах $k_1, \ldots, k_m, l$, то для всех целочисленных векторов $k \neq 0$ $\Delta(k) \neq 0$.

Решение рассматриваемой задачи существует, если для каждого вектора k с целочисленными координатами существует решение задачи (5), (6) и если в области D ряд (4) и ряды, полученные из него почленным дифференцированием до n-го порядка включительно, равномерно сходятся.

Предположим сначала, что для любого вектора $k \neq 0$ $\Delta(k) \neq 0$. Тогда существует функция Грина $G_k(t, \tau)$ задачи (5*), (6), с помощью которой решение задачи (5), (6) выражается формулой [2]

$$u_k(t) = \int_0^T G_k(t, \tau) f_k(\tau)\, d\tau. \tag{15}$$

При этом решение задачи (1), (2) формально представляется рядом

$$u(t, x) = u_0(t) + \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{k_m=-\infty}^{\infty}{}' \int_0^T G_k(t, \tau) f_k(\tau)\, d\tau \exp\{i(k, x)\}, \tag{16}$$

где штрих означает, что пропущено суммирование по вектору $k = (0, \ldots, 0)$.

В квадрате $K = (t, \tau : 0 \leqslant t, \tau \leqslant T)$ (за исключением сторон $\tau = 0$ и $\tau = T$) функция $G_k(t, \tau)$ ($k \neq 0$) определяется формулой

$$G_k(t, \tau) = g_k(t, \tau) +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{n} \frac{\left[1 + \exp\left\{\left(i \sum\limits_{p=1}^{m} \lambda_{ps} k_p + b_s\right) T\right\}\right] \exp\left\{\left(i \sum\limits_{p=1}^{m} \lambda_{ps} k_p + b_s\right)(t - \tau)\right\}}{\left[1 - \exp\left\{\left(i \sum\limits_{p=1}^{m} \lambda_{ps} k_p + b_s\right) T\right\}\right] \prod\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq s}}^{n} \left[i \sum\limits_{p=1}^{m} (\lambda_{ps} - \lambda_{pj}) k_p + b_s - b_j\right]}, \tag{17}$$

где

$$g_k(t, \tau) = \frac{\operatorname{sign}(t - \tau)}{2} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\exp\left\{\left(i \sum\limits_{p=1}^{m} \lambda_{p\nu} k_p + b_\nu\right)(t - \tau)\right\}}{\prod\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq \nu}}^{n} \left[i \sum\limits_{p=1}^{m} (\lambda_{p\nu} - \lambda_{pj}) k_p + b_\nu - b_j\right]}. \tag{18}$$

Для значений $\tau = 0$ ($\tau = T$) функция $G_k(t, \tau)$ доопределяется по непрерывности слева (справа).

Из формул (17), (18) получаем следующие оценки для функции $G_k(t, \tau)$ и ее производных по t в квадрате K:

$$\left| \frac{\partial^s G_k(t, \tau)}{\partial t^s} \right| \leqslant \sum_{\nu=1}^{n} c\, |k|^s \frac{\left| 1 - \exp\left\{\left(i \sum\limits_{p=1}^{m} \lambda_{p\nu} k_p + b_\nu\right) T\right\}\right|^{-1}}{\prod\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq \nu}}^{n} \left\{\left| \sum\limits_{p=1}^{m} (\lambda_{p\nu} - \lambda_{pj}) k_p \right|^2 + (b_\nu - b_j)^2\right\}^{\frac{1}{2}}}$$

$$(s = 0, 1, 2, \ldots), \tag{19}$$

где c — положительная константа, не зависящая от k.

Теорема 3. *Пусть в уравнении* (1) b_j ($j = 1, 2, \dots, n$) *все разные и отличны от нуля и пусть* $f(t, x) \in C_{2\pi}^{(0,m+p+\alpha)}(D)$ $(p \geqslant n)$. *Тогда существует решение задачи* (1), (2), *которое принадлежит классу* $C_{2\pi}^{(n,p)}(D)$ *и представляется рядом* (16).

Доказательство. Если $f(t, x) \in C_{2\pi}^{(0,m+p+\alpha)}(D)$, то коэффициенты $f_k(t)$ ее разложения в ряд Фурье по пространственным переменным при $|k| \to \infty$ имеют следующую оценку:

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant T} |f_k(t)| = O(|k|^{-(m+p+\alpha)}). \tag{20}$$

Из оценок (12), (19) и (20) следует, что ряд (16) и ряды, полученные из него почленным дифференцированием до порядка p включительно (дифференцирование по t допускается до порядка n), имеют в области D общей мажорантой сходящийся числовой ряд с положительными членами

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant T} |u_0(t)| + \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{k_m=-\infty}^{\infty}{}' \frac{c_0}{|k|^{m+\alpha}}.$$

Следовательно, ряд (16) абсолютно и равномерно сходится вместе со всеми производными до порядка p включительно в области D, где дифференцирование по t допускается до порядка n, и его сумма $u(t, x)$ принадлежит классу $C_{2\pi}^{(n,p)}(D)$.

Теорема 4. *Пусть все* b_j ($j = 1, 2, \dots, n$) *различны, причем* $b_q = 0$ $(1 \leqslant q \leqslant n)$, *и пусть для всех (кроме конечного числа) совокупностей целых чисел* $k_1 \dots, k_m, l$ *выполняется неравенство*

$$\left| \sum_{p=1}^{m} \lambda_{pq} k_p - \frac{2\pi}{T} l \right| \geqslant A |k|^{-r}, \tag{21}$$

где A — *положительная константа,* r — *некоторое натуральное число. Если* $f(t, x) \in C_{2\pi}^{(0,r+m+p+\alpha)}(D)$ $(p \geqslant n)$ *и выполняется условие* (11), *то существует решение задачи* (1), (2), *которое принадлежит классу* $C_{2\pi}^{(n,p)}(D)$ *и определяется с точностью до аддитивной константы.*

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 3. При этом учитывается замечание 1 и следующее неравенство:

$$\left| 1 - \exp\left\{ \left(i \sum_{p=1}^{m} \lambda_{pq} k_p \right) T \right\} \right| > \frac{T}{\pi} \left| \sum_{p=1}^{m} \lambda_{pq} k_p - \frac{2\pi}{T} l_k \right|, \tag{22}$$

где l_k — целое число, удовлетворяющее неравенству

$$\left| \frac{T}{2\pi} \sum_{p=1}^{m} \lambda_{pq} k_p - l_k \right| \leqslant \frac{1}{2}. \tag{23}$$

Лемма 1. *Почти каждый (в смысле меры Лебега) вектор* $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_m)$ *удовлетворяет неравенству*

$$(\omega, k) \geqslant K |k|^{-(m+1)} \tag{24}$$

для всех целочисленных $k \neq 0$ *при некотором* $K(\omega) > 0$.

Доказательство см. в работе [1].

Замечание 2. Из леммы 1 следует, что если $r \geqslant m + 2$, то неравенство (21) выполняется для почти всех (в смысле меры Лебега) векторов $\omega = (\lambda_{1q}, \dots, \lambda_{mq}, \frac{2\pi}{T})$.

Теорема 5. *Пусть все* b_j ($j = 1, 2, \dots, n$) *отличны от нуля, причем некоторые из них являются кратными. Если* $f(t, x) \in C_{2\pi}^{(0,N+\alpha)}(D)$ $(0 < \alpha < 1$; N — *достаточно большое натуральное число), то в классе* $C_{2\pi}^{(n,p)}(D)$ $(p \geqslant n)$ *существует решение задачи* (1), (2) *для почти всех (в смысле меры Лебега) чисел* λ_{pj} ($p = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, n$).

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3. При этом используется лемма 1 и неравенство (12).

Замечание 3. В случае произвольности чисел b_j (в смысле кратности и равенства нулю) вопрос о существовании решения задачи (1), (2) решается путем сочетания теорем 4 и 5 в предположении, что $\Delta(k) \neq 0$ для всех целочисленных $k \neq 0$.

Замечание 4. При условиях каждой из теорем 3, 4 и 5 решение задачи (1), (2) корректно относительно функции $f(t, x)$ [4].

Замечание 5. Полученные результаты переносятся на случай, когда для некоторых целочисленных векторов $k \neq 0$ $\Delta(k) = 0$. В этом случае решения соответствующих задач (5), (6) строятся с помощью обобщенных функций Грина [2].

Рассмотрим теперь случай кратных множителей в разложении оператора L, т. е. вместо уравнения (1) рассмотрим следующее уравнение:

$$L[u] \equiv \prod_{j=1}^{q}\left(\frac{\partial}{\partial t} - \sum_{p=1}^{m} \lambda_{pj}\frac{\partial}{\partial x_p} - b_j\right)^{n_j} u(t, x) = f(t, x), \qquad (25)$$

где $n_1 + \ldots + n_q = n$. Предположим, что корни $\mu(k)$ уравнения

$$\prod_{j=1}^{q}\left(\mu - \sum_{p=1}^{m}\lambda_{pj}k_p\right)^{n_j} = 0 \qquad (26)$$

имеют одинаковую кратность для всех целочисленных векторов $k \neq 0$.

Решение задачи (25), (2) представим в виде ряда (4), где каждая из функций $u_k(t)$ удовлетворяет условиям (6) и уравнению

$$\prod_{j=1}^{q}\left[\frac{d}{dt} - \left(i\sum_{p=1}^{m}\lambda_{pj}k_p + b_j\right)\right]^{n_j} u_k(t) = f_k(t). \qquad (27)$$

Для вектора $k \neq 0$ однородное уравнение

$$\prod_{j=1}^{q}\left[\frac{d}{dt} - \left(i\sum_{p=1}^{m}\lambda_{pj}k_p + b_j\right)\right]^{n_j} u_k(t) = 0 \qquad (27^*)$$

имеет такую фундаментальную систему решений:

$$u_{k,j,s_j}(t) = t^{s_j-1}\exp\left\{\left(i\sum_{p=1}^{m}\lambda_{pj}k_p + b_j\right)t\right\}, \quad s_j = 1, 2, \ldots, n_j,$$
$$j = 1, 2, \ldots, q, \qquad (28)$$

а решение задачи (27*), (6) представляется в виде

$$\tilde{u}_k(t) = \sum_{j=1}^{q}\sum_{s_j=1}^{n_j} c_{k,j,s_j}u_{k,j,s_j}(t),$$

где коэффициенты c_{k,j,s_j} определяются из системы уравнений

$$\sum_{j=1}^{q}\sum_{s_j=1}^{n_j} c_{k,j,s_j}\left[u_{k,j,s_j}^{(r)}(0) - u_{k,j,s_j}^{(r)}(T)\right] = 0 \qquad (r = 0, 1, \ldots, n-1), \quad (29)$$

определитель которой вычисляется по формуле

$$\tilde{\Delta}(k) = \prod_{j=1}^{q}\left\{\left[1 - \exp\left(i\sum_{p=1}^{m}\lambda_{pj}k_p + b_j\right)T\right]^{n_j}\prod_{s=2}^{n_j}(s-1)!\right\} \times$$
$$\times \prod_{q\geq s>\nu\geq 1}\left[i\sum_{p=1}^{m}(\lambda_{ps} - \lambda_{p\nu})k_p + b_s - b_\nu\right]^{n_s\cdot n_\nu}. \qquad (30)$$

В случае $k = (0, \ldots, 0)$ для задачи (27), (6) справедливо замечание 1. Если $k \neq 0$, то единственность решения задачи (27), (6) имеет место только тогда, когда $\tilde{\Delta}(k) \neq 0$. Поэтому теоремы единственности решения задачи (25), (2) формулируются и доказываются аналогично теоремам 1 и 2.

Рассмотрим вопрос о существовании решения задачи (25), (2). Предположим, что для всех целочисленных векторов $k \neq 0$ $\tilde{\Delta}(k) \neq 0$. Тогда для каждого вектора $k \neq 0$ существует функция Грина $\tilde{G}_k(t, \tau)$ задачи (27*), (6), с помощью которой решение задачи (27), (6) выражается формулой, аналогичной формуле (15).

Для функции $\tilde{G}_k(t, \tau)$ и ее производных по t имеют место следующие оценки:

$$\left|\frac{\partial^s \tilde{G}_k(t, \tau)}{\partial t^s}\right| \leqslant \sum_{r=1}^{q} \frac{A_r |k|^s \left|1 - \exp\left\{\left(i \sum_{p=1}^{m} \lambda_{pr} k_p + b_r\right) T\right\}\right|^{-n_r}}{\prod\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq r}}^{q} \left| i \sum_{p=1}^{m} (\lambda_{pj} - \lambda_{pr}) k_p + b_j - b_r \right|^{n_r + n_j - 1}}. \quad (31)$$

На основании оценок (31), (22), (12) и леммы 1 получаем теоремы существования решения задачи (25), (2), которые с небольшими изменениями повторяют теоремы 3, 4 и 5. Если для некоторых целочисленных векторов $k \neq 0$ $\tilde{\Delta}(k) = 0$, то решения соответствующих задач (27), (6) строятся с помощью обобщенных функций Грина.

Результаты, полученные в статье, переносятся на случаи, когда а) решение рассматриваемой задачи ищется в классе функций, почти периодических по пространственным переменным; б) коэффициенты λ_{pj} и b_j уравнений (1) и (25) являются функциями переменной t.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арнольд В. И.— УМН, 1963, 18, 6 (114).
2. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Физматгиз, М., 1961.
3. Пташник Б. Й.— ДАН УРСР. Сер. А, 1973, 11.
4. Соболев С. Л. Уравнения математической физики. Гостехиздат, М., 1954.

Львовский филиал
математической физики
Института математики
АН УССР

Поступила в редколлегию
в сентябре 1974 г.

МНОГОТОЧЕЧНАЯ АППРОКСИМАЦИОННАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Х. И. Кучминская

На основании разложения функции одного переменного в цепные дроби построены двухточечная и многоточечная формулы Тиле [3, 4]. В данной статье с использованием аппарата ветвящихся цепных дробей получены обобщения этих формул на случай функции многих переменных.

Запишем функциональную формулу для функций многих переменных $f(x_1, \ldots, x_m) = f(P)$ в терминах ветвящихся цепных дробей [3] в окрестности точки $P_i = (x_1^i, \ldots, x_m^i)$:

$$f(P) = f(P_i) + \sum_{k_1=1}^{m} \frac{x_{k_1} - x_{k_1}^i\,|}{|\,r^{x_{k_1}} f(P_i)} + \cdots +$$