тогда, когда $\tilde{\Delta}(k) \neq 0$. Поэтому теоремы единственности решения задачи (25), (2) формулируются и доказываются аналогично теоремам 1 и 2.

Рассмотрим вопрос о существовании решения задачи (25), (2). Предположим, что для всех целочисленных векторов $k \neq 0$ $\tilde{\Delta}(k) \neq 0$. Тогда для каждого вектора $k \neq 0$ существует функция Грина $\tilde{G}_k(t, \tau)$ задачи (27*), (6), с помощью которой решение задачи (27), (6) выражается формулой, аналогичной формуле (15).

Для функции $\tilde{G}_k(t, \tau)$ и ее производных по t имеют место следующие оценки:

$$\left| \frac{\partial^s \tilde{G}_k(t, \tau)}{\partial t^s} \right| \leqslant \sum_{r=1}^{q} \frac{A_r |k|^s \left| 1 - \exp\left\{ \left(i \sum_{p=1}^{m} \lambda_{pr} k_p + b_r \right) T \right\} \right|^{-n_r}}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq r}}^{q} \left| i \sum_{p=1}^{m} (\lambda_{pj} - \lambda_{pr}) k_p + b_j - b_r \right|^{n_r + n_j - 1}}. \quad (31)$$

На основании оценок (31), (22), (12) и леммы 1 получаем теоремы существования решения задачи (25), (2), которые с небольшими изменениями повторяют теоремы 3, 4 и 5. Если для некоторых целочисленных векторов $k \neq 0$ $\tilde{\Delta}(k) = 0$, то решения соответствующих задач (27), (6) строятся с помощью обобщенных функций Грина.

Результаты, полученные в статье, переносятся на случаи, когда а) решение рассматриваемой задачи ищется в классе функций, почти периодических по пространственным переменным; б) коэффициенты λ_{pj} и b_j уравнений (1) и (25) являются функциями переменной t.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арнольд В. И.— УМН, 1963, 18, 6 (114).
2. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Физматгиз, М., 1961.
3. Пташник Б. Й.— ДАН УРСР. Сер. А, 1973, 11.
4. Соболев С. Л. Уравнения математической физики. Гостехиздат, М., 1954.

Львовский филиал
математической физики
Института математики
АН УССР

Поступила в редколлегию
в сентябре 1974 г.

МНОГОТОЧЕЧНАЯ АППРОКСИМАЦИОННАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Х. И. Кучминская

На основании разложения функции одного переменного в цепные дроби построены двухточечная и многоточечная формулы Тиле [3, 4]. В данной статье с использованием аппарата ветвящихся цепных дробей получены обобщения этих формул на случай функции многих переменных.

Запишем функциональную формулу для функций многих переменных $f(x_1, \ldots, x_m) = f(P)$ в терминах ветвящихся цепных дробей [3] в окрестности точки $P_l = (x_1^l, \ldots, x_m^l)$:

$$f(P) = f(P_l) + \sum_{k_1=1}^{m} \frac{x_{k_1} - x_{k_1}^l |}{| r^{x_{k_1}} f(P_l)} + \cdots +$$

$$+\sum_{k_n=1}^{m}\frac{x_{k_n}-x_{k_n}^{l}}{nr^{x_{k_n}}[r_{n-1}^{x_{k_{n-1}}\cdots x_{k_1}}f(P)]_{P=P_l}}+r_n^l(P,\ P_l)=$$

$$=f(P_l)+\sum_{l=1}^{n}\sum_{k_l=1}^{m}\frac{x_{k_l}-x_{k_l}^{l}}{lr^{x_{k_l}}[r_{l-1}^{x_{k_{l-1}}\cdots x_{k_1}}f(P)]_{P=P_l}}+r_n^l(P,\ P_l),\tag{1}$$

где $r_n^l(P,\ P_l)$ — остаточный член или погрешность формулы (1), $r^{x_{k_1}}f(P_l),\ \ldots,\ r_n^{x_{k_n}\cdots x_{k_1}}f(P_l)$ — обратные частные производные функции $f(P)$, определяемые формулами

$$r^{x_{k_1}}f(P_l)=\frac{1}{f'_{x_{k_1}}(P_l)},\quad r_2^{x_{k_2}x_{k_1}}f(P_l)=f(P_l)+2r^{x_{k_2}}[r^{x_{k_1}}f(P)]_{P=P_l},$$

$$r_n^{x_{k_n}\cdots x_{k_1}}f(P_l)=r_{n-2}^{x_{k_{n-2}}\cdots x_{k_1}}f(P_l)+nr^{x_{k_n}}[r_{n-1}^{x_{k_{n-1}}\cdots x_{k_1}}f(P)]_{P=P_l},$$

$$n\geqslant 2,\ k_p=\overline{1,\ m},\ p=\overline{1,\ n}.$$

Пусть в пространстве m действительных переменных $x_1,\ \ldots,\ x_m$ задано k точек $P_i=(x_1^i,\ \ldots,\ x_m^i)$, $i=\overline{1,\ k}$. В каждой из этих точек будем считать заданными значения некоторой функции $f(P)$ и ее частных обратных производных до n-го порядка включительно, т. е. считаем, что задано k функциональных формул (1) для приближения функции m переменных в окрестности точек P_i. Необходимо построить k-точечную функциональную формулу $L(P)$, удовлетворяющую условиям

$$f(P_i)=L(P_i),\qquad i=\overline{1,\ k}.$$

Решение задачи ищем в виде

$$L(P)=\sum_{i=1}^{k}h_i^*(P)\left\{f(P_i)+\sum_{l=1}^{n}\sum_{k_l=1}^{m}\frac{x_{k_l}-x_{k_l}^{i}}{lr^{x_{k_l}}[r_{l-1}^{x_{k_{l-1}}\cdots x_{k_1}}f(P)]_{P=P_i}}\right\}+$$

$$+r_n(P,\ P_1,\ \ldots,\ P_k),\tag{2}$$

где функции $h_i^*(P)$ определяются соотношениями

$$h_i(P_j)=\delta_{ij},\quad h_i(P)=\prod_{\mu=1}^{m}h_i(x_\mu),\quad h_i^*(P)=\frac{h_i(P)}{\sum\limits_{p=1}^{k}h_p(P)},\tag{3}$$

а δ_{ij} — символ Кронекера.

Функции $h_i(x_\mu)$ определяются по формулам

$$h_i(x_\mu)=\begin{cases}0,\ x_\mu\leqslant x_\mu^{i-1},\quad x_\mu\geqslant x_\mu^{i+1},\\ g_n\left(\dfrac{x_\mu-x_\mu^{i-1}}{x_\mu^{i}-x_\mu^{i-1}}\right),\quad x_\mu^{i-1}\leqslant x_\mu\leqslant x_\mu^{i},\\ g_n\left(\dfrac{x_\mu^{i+1}-x_\mu}{x_\mu^{i+1}-x_\mu^{i}}\right),\quad x_\mu^{i}\leqslant x_\mu\leqslant x_\mu^{i+1},\end{cases}$$

$$g_n(u)=\int_0^u t^n(1-t)^n dt:\int_0^1 t^n(1-t)^n\,dt,$$

где $h_i(P)=0$, если точка P находится вне m-измеримого куба [5]:

$$x_\mu^{j-1}\leqslant x_\mu\leqslant x_\mu^{j+1},\quad \mu=\overline{1,\ m},\ j=\overline{1,\ k}.$$

Для простоты положим $x_\mu^p - x_\mu^{p-1} = 1$, $p = \overline{2, k}$. Погрешность или остаточный член формулы (2) принимает вид

$$r_n(P, P_1, \ldots, P_k) = \sum_{i=1}^{k} h_i^*(P)\, r_n^i(P, P_i), \tag{4}$$

где $r_n^i(P, P_i)$ — погрешности функциональной формулы (1) в точках P_i. Очевидно, что

$$|r_n^i(P, P_i)| = \left| K^i - \left(\frac{P_n}{Q_n}\right)_i \right|,$$

где K^i — значение ветвящейся цепной дроби, в которую разлагается функция $f(P)$ в точке P_i, а $\left(\frac{P_n}{Q_n}\right)_i$ — n-я подходящая дробь этой ветвящейся цепной дроби. Формулу (1) можно рассматривать как сумму m ветвящихся цепных дробей при $k_1 = \overline{1, m}$ соответственно. Обозначим через $\left(\frac{P_n}{Q_n}\right)_i^{k_1}$ n-ю подходящую дробь для каждой из этих m ветвящихся цепных дробей. Если дробь с отрицательными компонентами, то через $\left(\frac{P_n}{Q_n}\right)_i^{k_1}$ обозначим n-ю подходящую дробь каждой из m ветвящихся цепных дробей, что являются суммой преобразованной дроби уже с положительными компонентами [2]. Доказана следующая теорема.

Теорема. *Если функция $f(P) \in C^{n+1}$ разложима в ветвящуюся цепную дробь по формуле (1) в точках P_i, $i = \overline{1, k}$, причем все знаменатели формулы (1) одинакового знака и выполняются неравенства*

$$|\nu r^{x_{k_\nu}}[r_{\nu-1}^{x_{k_{\nu-1}}\ldots x_{k_1}} f(P)]| \geqslant \left(\frac{1}{A}\right)^{\frac{\nu-1}{2}} \quad при \quad x_{k_{\nu+1}} - x_{k_{\nu+1}}^i > 0, \tag{5}$$

$$|\nu r^{x_{k_\nu}}[r_{\nu-1}^{x_{k_{\nu-1}}\ldots x_{k_1}} f(P)]| \geqslant \left(\frac{1}{A}\right)^{\nu-1} + |x_{k_\nu} - x_{k_\nu}^i| + m \quad при \quad x_{k_{\nu+1}} - x_{k_{\nu+1}}^i < 0,$$

где

$$A = \min_{k_\nu, k_{\nu+1}} \frac{x_{k_\nu} - x_{k_\nu}^i}{x_{k_{\nu+1}} - x_{k_{\nu+1}}^i}, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, k_\nu = \overline{1, m},$$

то для погрешности формулы (2) *в m-измеримом кубе $x_\mu^{j-1} \leqslant x_\mu \leqslant x_\mu^{j+1}$, $\mu = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, k}$ справедлива оценка*

$$|r_n(P, P_1, \ldots, P_k)| < Mm(1 - K_m(\delta)\,\delta)^n,$$

$$где\ M = \max_i \left\{ \max_{k_1} \left(\frac{Q_2}{P_2}\right)_i^{k_1} \right\},\ K_m = \frac{1}{(2+\delta)^{m-1} + \delta},\ \delta \geqslant 1 — константа.$$

Изложим схему доказательства теоремы. Без ограничения общности можно считать, что в точках P_i, $i = \overline{1, k}$,

$$r^{x_{k_\nu}}[r_{\nu-1}^{x_{k_{\nu-1}}\ldots x_{k_1}} f(P)]_{P=P_i} > 0, \qquad \nu = 1, 2, \ldots,$$

поскольку, в противном случае, это легко получить, умножая все частные числители и знаменатели на -1. Возможны два случая: либо частные числители положительны и имеем ветвящуюся цепную дробь с положительными компонентами, либо частные числители отрицательны. В первом случае, применяя достаточное условие сходимости ветвящихся цепных дробей [1], получаем утверждение теоремы. Во втором случае, используя условия теоремы, преобразовываем ветвящуюся цепную дробь в дробь с положительными компонентами, т. е. сводим к первому случаю.

Пример. Разложив функцию $f(x, y) = \sqrt{x + y}$ в точках (2, 2) и (3,3) по двухточечной аппроксимационной формуле и вычислив ее значение с точностью до пяти знаков в точке (2,2; 2,21) по этой формуле, при $n = 2$ получим $f(2{,}2;\ 2{,}21) = 2{,}09995$, а при $n = 3$ — $f(2{,}2;\ 2{,}21) = 2{,}10000$. Точное же значение функции равно 2,1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боднар Д. И., Олексив И. Я.— В кн.: Математические методы и физико-механические поля, 2. «Наукова думка», К., 1975.
2. Боднарчук П. И.— В кн.: Математические методы и физико-механические поля, 2. «Наукова думка», К., 1975.
3. Боднарчук П. І., Скоробогатько В. Я. Гіллясті ланцюгові дроби та їх застосування. «Наукова думка», К., 1974.
4. Кучминская Х. И., Боднарчук П. И.— В кн.: Вычислительная и прикладная математика, 22. Изд-во Киевского ун-та, К., 1974.
5. Литвин О. М., Рвачов В. Л. Класична формула Тейлора, її узагальнення та застосування. «Наукова думка», К., 1973.

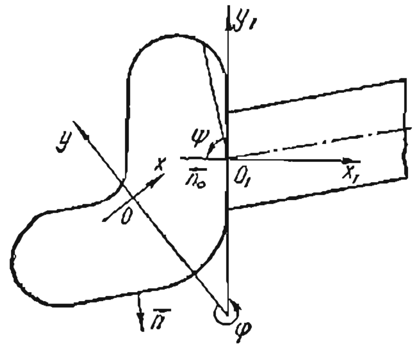
Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию в октябре 1974 г.

ТЕМПЕРАТУРНЫЕ ПОЛЯ КРИВОЛИНЕЙНЫХ СТЕРЖНЕЙ И ПОДКРЕПЛЕННЫХ ОБОЛОЧЕК

Я. С. Подстригач, Н. И. Войтович, Ю. А. Чернуха

Условия теплообмена на крае пластинки, подкрепленном тонким изотропным стержнем прямоугольного поперечного сечения, были получены в работах [3, 4, 5] в предположении, что толщины пластинки и стержня совпадают. Позже эти условия были обобщены на случай, когда подкрепляющий элемент расположен несимметрично относительно срединной поверхности пластинки [2]. В настоящей работе предложен метод сведения нестационарной трехмерной (по пространственным координатам) задачи теплопроводности к одномерной, выведены уравнения теплопроводности и сформулированы соответствующие краевые условия для плоских криволинейных ортотропных стержней произвольного поперечного сечения, теплообмен которых с окружающей средой осуществляется согласно закону Ньютона. Получены условия теплообмена на крае оболочки, подкрепленном таким стержнем.



Рассмотрим оболочку, край которой подкреплен ортотропным стержнем произвольного поперечного сечения (рисунок). Ось стержня предполагается гладкой плоской кривой, а направления ортотропии — совпадающими с направлениями сопровождающего трехгранника. Координатные оси Ox и Oy совместим с нормалью и бинормалью. Между стержнем и оболочкой (на поверхности S_1) имеет место идеальный тепловой контакт, а на участке боковой поверхности стержня S_2, не контактирующей с оболочкой, и на его торцевых поверхностях S_3 и S_4 теплообмен с омывающими средами осуществляется по закону Ньютона. Поверхность контакта S_1 предполагается линейчатой развертывающейся поверхностью, вообще говоря, не ортогональной к срединной поверхности оболочки.

В качестве исходного примем уравнение нестационарной трехмерной задачи теплопроводности [6]

$$\lambda_x \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \lambda_y \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \lambda_x k \frac{\partial t}{\partial x} + \lambda_s \frac{\partial^2 t}{\partial s^2} - c \frac{\partial t}{\partial \tau} + q = 0, \quad (1)$$

а условия идеального теплового контакта, граничные и начальные условия имеют вид

$$-\left[\lambda_x \cos(n, x) \frac{\partial t}{\partial x} + \lambda_y \cos(n, y) \frac{\partial t}{\partial y}\right]_{S_1} = \lambda_\gamma \cos(n_0, \gamma) \frac{\partial t_*}{\partial \gamma} +$$

$$+ \lambda_\alpha \frac{\cos(n_0, \alpha)}{A} \frac{\partial t_*}{\partial \alpha} + \lambda_\beta \frac{\cos(n_0, \beta)}{B} \frac{\partial t_*}{\partial \beta}, \quad [t]_{S_1} = t_*(\gamma, \alpha, \beta, \tau); \quad (2)$$