

тепловыделения при $r^2 = 0,5\Omega_i^2$ возникает вследствие гашения волн, приходящих от разных точек поверхности полубесконечного тела, что приводит к уменьшению амплитуд волновых процессов и, значит, к уменьшению тепловыделения. Максимум тепловыделения при $r^2 = 1,135\Omega_i^2$ имеет ту же причину возникновения, что и рассмотренный выше максимум амплитуд волн при том же значении r^2 .

На рис. 5 показан характер распределения по глубине джоулева тепла для $s^2 = 10^{-5}$, $|\chi^2| = 1$, $x = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$ для $r^2 = 0,2\Omega_i^2$ (кривая 1), $r^2 = \Omega_i^2$ (кривая 2) и $r^2 = 18\Omega_i^2$ (кривая 3). При возрастании r^2 (уменьшение пространственного периода нагружения) тепловыделение, как и волновые процессы, становится все более приповерхностным, а глубинный нагрев невозможным.

ЛИТЕРАТУРА

1. Агеев А. Н., Киселев М. И., Рыкалин Н. Н.— Физика и химия обработки материалов, 1970, 6.
2. Даргейко М. М., Селезов И. Т.— В кн.: Волны в неупругих средах. Изд. АН МССР, Кишинев, 1970.
3. Карасик В. Р. Физика и техника сильных магнитных полей. «Наука», М., 1964.
4. Конторович В. М., Тищенко Н. А.— Изв. вузов. Радиофизика, 1963, 6, 1.
5. Пелетминский С. В.— УФЖ, 1958, 3, 5.
6. Подстригач Я. С., Колодий Б. И.— Прикладная механика, 1970, 6, 12.
7. Шубаев С. Н., Шкарлет Ю. М.— Дефектоскопия, 1972, 5.
8. Kaliski S., Rogula D.— Proc. Vibr. Problems, 1960, 1, 5.
9. Kaliski S.— Proc. Vibr. Problems, 1962, 3, 4.
10. Kaliski S.— Proc. Vibr. Problems, 1963, 4, 4.
11. Sinha D. K.— Pure Appl. Geophysics (Pageoph.), 1965, 60, 1.

Львовский филиал
математической физики
Института математики
АН УССР

Поступила в редколлегию
в сентябре 1974 г.

ВЛИЯНИЕ СОСРЕДОТОЧЕННЫХ СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ НА ВЕЛИЧИНУ ПОСАДКИ КОЛЬЦА, ВПРЕССОВАННОГО В КРИВОЛИНЕЙНОЕ ОТВЕРСТИЕ ПЛАСТИНКИ

М. К. Зварич, Т. Л. Мартынович, В. С. Щукин

Рассмотрим упругое равновесие бесконечной изотропной пластинки с криволинейным отверстием, в точках z_i и z_j которой приложены соответственно сосредоточенные силы P_i и моменты M_j ($i = 1, 2, \dots, r$; $j = 1, 2, \dots, s$). Пусть в отверстие пластинки L впессован замкнутый упругий стержень (кольцо) постоянного поперечного сечения. Контакт между телами осуществляется вдоль всего контура L . Трением между контактирующими телами пренебрегаем. На линии контакта L как функция дуги задана нормальная величина скачка вектора перемещения $\varepsilon^*(t)$. Напряженно-деформированное состояние кольца описывается уравнениями теории тонких криволинейных стержней.

Определение напряженного состояния в контактирующих телах сводится к нахождению компонент деформации e_0, θ_0 стержня и функций $\varphi_1(z)$ и $\psi_1(z)$ комплексного переменного $z = x + iy$, которые удовлетворяют граничным условиям

$$\int_{\Sigma} F_1(t) \operatorname{Re} dU^* = 2\mu \int_{\Sigma} F_1(t) d[u_{ln} + \varepsilon^*(t)], \quad (1)$$

$$\int_L \overline{F_1(t)} dV^* = \int_L N^{(l)} \overline{F_1(t)} dt, \quad \int_L F_1(t) dV^* = \int_L N^{(l)} F_1(t) dt,$$

где

$$U^* = i\bar{t} [\mu\varphi_1(t) - t\overline{\varphi_1'(t)} - \overline{\psi_1(t)}], \quad (2)$$

$$V^* = \varphi_1(t) + t\overline{\varphi_1'(t)} + \overline{\psi_1(t)},$$

$F_1(z)$ — произвольная функция, голоморфная в области D , t — аффикс точки контура L , $\dot{t} = dt/ds$.

Нормальная составляющая перемещения u_{1n} контурных точек стержня выражается через относительное удлинение e_0 нулевой (для чистого изгиба) линии L_0 и угол поворота θ_b нормального сечения стержня формулой [1]

$$u_{1n} = \operatorname{Re} \left\{ i\bar{t} \int_{l_n}^t \left[\frac{r_0}{r_1} e_0 + \dot{t} (r_1 - r_0) \frac{d\theta_b}{dt} + i\theta_b \right] dt + C\bar{t} \right\}, \quad (3)$$

где C — постоянная интегрирования.

Нормальное напряжение σ в сечении стержня и внутренние усилия в нем определяются по формулам [1]

$$\sigma = E^* \left| \frac{r_0}{r} e_0 + (r - r_0) \dot{t} \frac{d\theta_b}{dt} \right|, \quad (4)$$

$$L_b = g\eta_c r_1 \dot{t} \frac{d\theta_b}{dt}, \quad V_\tau = g e_0. \quad (5)$$

Контактное напряжение $N^{(l)}$ связано с компонентами деформации стержня зависимостью

$$N^{(l)} = -\frac{1}{2h} \operatorname{Re} \frac{d}{dt} [t(V_n + iV_\tau)] + \frac{h^*}{h} \frac{r_2}{r_1} N^*, \quad (6)$$

где

$$t(V_n + iV_\tau) = \frac{d}{dt} \left[g(r_0 - r_1) e_0 + g\eta_c r_1 \dot{t} \frac{d\theta_b}{dt} \right] + i g e_0 \dot{t}.$$

Уравнения равновесия элемента стержня с учетом равенства $T^{(l)} = 0$ принимают вид

$$N^{(l)} = -\frac{1}{2h} \left(\frac{dV_n}{ds_1} - \frac{1}{r_1} V_\tau \right) + \frac{h^*}{h} \frac{r_2}{r_1} N^*, \quad (7)$$

$$\frac{dV_\tau}{ds_1} = -\frac{1}{r_1} V_n, \quad \frac{dL_b}{ds_1} = \frac{r_0}{r_1} V_n.$$

В выражениях (3) — (7) использованы обозначения работ [1, 2].

К системе контурных условий (1), которая служит для определения комплексных потенциалов $\varphi_1(z)$, $\psi_1(z)$ и компонент деформации стержня e_0 и θ_b , необходимо присоединить условие однозначности перемещений

$$\int_L \left[\frac{r_0}{r_1} e_0 + (r_1 - r_0) \dot{t} \frac{d\theta_b}{dt} + i\theta_b \right] dt = 0. \quad (8)$$

Область, занятую пластинкой, конформно отобразим на внешность единичной окружности γ плоскости ζ , положив

$$z = \omega(\zeta) = R \left(\zeta + \frac{m}{s-1} \zeta^{1-s} \right), \quad |m| < 1. \quad (9)$$

При $s = 2$ функция (9) соответствует области с эллиптическим отверстием при $s = 4$, $m = \pm \frac{1}{3}$ — области с квадратным отверстием, а при $s = 3$, $m = 0,5$ — области с треугольным отверстием с закругленными углами и т. д.

Величины e_0 и θ_0 представим на γ в форме комплексных рядов Фурье

$$e_0 = \alpha_0 + 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sigma^k, \quad \theta_0 = \beta_0 + 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \sigma^k. \quad (10)$$

Функции напряжения $\varphi(\zeta) = \varphi_1[\omega(\zeta)]$, $\psi(\zeta) = \psi_1[\omega(\zeta)]$ в области ζ , занятой пластинкой, ищем в виде [3]

$$\varphi(\zeta) = - \sum_{i=1}^r P_i \ln(\zeta - \zeta_i) + \sum_{k=0}^{\infty} A_k \zeta^{-k}, \quad (11)$$

$$\psi(\zeta) = \kappa \sum_{i=1}^r \bar{P}_i \ln(\zeta - \zeta_i) + \sum_{i=1}^r \frac{P_i \eta_i}{\zeta - \zeta_i} + \sum_{j=1}^s \frac{M_j^* \eta_j^*}{\zeta - \zeta_j} + \sum_{k=0}^{\infty} B_k \zeta^{-k},$$

где

$$P_i = \frac{X_i + iY_i}{4\pi h(1+\kappa)}, \quad M_j^* = \frac{iM_j}{4\pi h}, \quad \eta_i^* = \frac{\zeta_i^s}{\zeta_i^s - m}, \quad \eta_i = \eta_i^* \left(\bar{\zeta}_i + \frac{m}{s-1} \bar{\zeta}_i^{1-s} \right).$$

Произвольную функцию $F(\zeta) = F_1[\omega(\zeta)]$ представим в виде ряда

$$F(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} E_n \zeta^{-n}. \quad (12)$$

В случае силовой и геометрической симметрии задача относительно координатных осей x и y разложения (10) примут вид

$$e_0 = \alpha_0 + \sum_{k=2,4,\dots}^{\infty} \alpha_k (\sigma^k + \sigma^{-k}), \quad \theta_0 = i \sum_{k=2,4,\dots}^{\infty} \beta_k^* (\sigma^k - \sigma^{-k}), \quad (13)$$

где α_k и β_k^* — действительные величины. Тогда нормальная составляющая контактного напряжения запишется так:

$$\Delta^{(t)} = \frac{g}{2hr_1} \alpha_0 + \sum_{k=2,4,\dots}^{\infty} \alpha_k f_k(\sigma) + \frac{h^*}{h} \frac{r_2}{r_1} N^*, \quad (14)$$

где

$$f_k(\sigma) = \frac{g}{2hr_1} \operatorname{Re} \left\{ \sigma^k + \sigma^{-k} - \frac{kr_1\sigma}{|\omega'(\sigma)|} \frac{d}{d\sigma} \left[\frac{r_1}{|\omega'(\sigma)|} (\sigma^k - \sigma^{-k}) \right] \right\}.$$

Учитывая (2), (3), (6) и (9) внесем разложения (10) и (11) в граничные условия (1) и выполним интегрирование вдоль контура γ . Полагая все E_j равными нулю, кроме E_n , в результате получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложений искомых функций. Эту систему выпишем для пластинки с эллиптическим или квадратным отверстием, когда силы и моменты, приложенные к пластинке, расположены симметрично относительно осей координат ($N^* = 0$):

$$\begin{aligned} & \sum_{k=2,4,\dots}^{\infty} a_{kn}^{(1)} \alpha_k + \sum_{k=2,4,\dots}^{\infty} b_{kn}^{(1)} \beta_k^* = 0, \\ & \frac{1}{2} a_{0n}^{(2)} \alpha_0 + \sum_{k=2,4,\dots}^{\infty} a_{kn}^{(2)} \alpha_k + \sum_{k=2,4,\dots}^{\infty} b_{kn}^{(2)} \beta_k^* + \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} c_{kn}^{(2)} A_k + \\ & \quad + \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} d_{kn}^{(2)} B_k = \varepsilon + P_n^{(2)}, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\frac{1}{2} a_{0n}^{(3)} \alpha_0 + \sum_{k=2,4,\dots}^{\infty} a_{kn}^{(3)} \alpha_k + \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} c_{kn}^{(3)} A_k = P_n^{(3)},$$

$$\frac{1}{2} a_{0n}^{(4)} \alpha_0 + \sum_{k=2,4,\dots}^{\infty} a_{kn}^{(4)} \alpha_k + \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} c_{kn}^{(4)} A_k + \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} d_{kn}^{(4)} B_k = P_n^{(4)},$$

где

$$\begin{aligned}
 a_{kn}^{(1)} &= \int_{\gamma} (\sigma^k + \sigma^{-k}) d(r_0 \sigma^{-n-1}), \\
 b_{kn}^{(1)} &= k(n+1) \int_{\gamma} r_1 \eta_k (\sigma^k + \sigma^{-k}) \frac{\sigma^{-n-2}}{|\omega'(\sigma)|} d\sigma, \\
 a_{kn}^{(2)} &= -2\mu \int_{\gamma} \operatorname{Re} \left\{ \frac{\overline{\omega'(\sigma)}}{\sigma |\omega'(\sigma)|} \int_{\sigma_0}^{\sigma} \frac{r_0}{r_1} (\sigma^k + \sigma^{-k}) \omega'(\sigma) d\sigma \right\} \sigma^{-n} d\sigma, \\
 b_{kn}^{(2)} &= 2\mu \int_{\gamma} \operatorname{Re} \left\{ \frac{\overline{\omega'(\sigma)}}{\sigma |\omega'(\sigma)|} \int_{\sigma_0}^{\sigma} \left[\sigma^k - \sigma^{-k} + \frac{k(r_1 - r_0)}{|\omega'(\sigma)|} (\sigma^k + \sigma^{-k}) \right] \omega'(\sigma) d\sigma \right\} \sigma^{-n} d\sigma, \\
 c_{kn}^{(2)} &= \int_{\gamma} \operatorname{Re} \left\{ \frac{\overline{\omega'(\sigma)}}{\sigma |\omega'(\sigma)|} \left[\kappa \sigma^{-k} + k \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \sigma^{k+1} \right] \right\} \sigma^{-n} d\sigma, \\
 d_{kn}^{(2)} &= - \int_{\gamma} \operatorname{Re} \left\{ \frac{\overline{\omega'(\sigma)}}{|\omega'(\sigma)|} \sigma^{k-1} \right\} \sigma^{-n} d\sigma, \\
 a_{kn}^{(3)} &= \int_{\gamma} f_k(\sigma) \sigma^n \omega'(\sigma) d\sigma, \quad c_{kn}^{(3)} = n \int_{\gamma} \sigma^{n-k-1} d\sigma, \\
 a_{kn}^{(4)} &= \int_{\gamma} f_k(\sigma) \sigma^{-n} \omega'(\sigma) d\sigma, \quad c_{kn}^{(4)} = kn \int_{\gamma} \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \sigma^{k-n} d\sigma, \\
 d_{kn}^{(4)} &= -n \int_{\gamma} \sigma^{k-n-1} d\sigma, \quad \varepsilon = 2\mu \int_{\gamma} \varepsilon^*(\sigma) \sigma^{-n} d\sigma, \\
 P_n^{(2)} &= \int_{\gamma} \operatorname{Re} \left\{ \frac{\overline{\omega'(\sigma)}}{\sigma |\omega'(\sigma)|} \left[\kappa \sum_{i=1}^r P_i \ln \frac{(\sigma - \xi_i)(1 - \bar{\xi}_i \sigma)}{\sigma} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \sum_{i=1}^s \frac{\bar{M}_i \bar{\eta}_i \sigma}{1 - \bar{\xi}_i \sigma} - \sum_{i=1}^l \frac{\bar{P}_i \sigma}{1 - \bar{\xi}_i \sigma} \left(\frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} - \bar{\eta}_i \right) \right] \right\} \sigma^{-n} d\sigma, \\
 P_n^{(3)} &= -n \int_{\gamma} \left\{ \kappa \sum_{i=1}^r P_i \ln \frac{1 - \bar{\xi}_i \sigma}{\sigma} + \sum_{i=1}^l \frac{\bar{P}_i \sigma}{1 - \bar{\xi}_i \sigma} \left(\bar{\eta}_i - \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \right) - \right. \\
 &\quad \left. - \sum_{i=1}^s \frac{\bar{M}_i \bar{\eta}_i \sigma}{1 - \bar{\xi}_i \sigma} \right\} \sigma^{n-1} d\sigma, \\
 P_n^{(4)} &= -n \int_{\gamma} \left\{ \sum_{i=1}^r P_i \ln(\sigma - \xi_i) + \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \sum_{i=1}^l \frac{\bar{P}_i \sigma}{1 - \bar{\xi}_i \sigma} \right\} \sigma^{-n-1} d\sigma, \quad n = 1, 3, 5, \dots
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

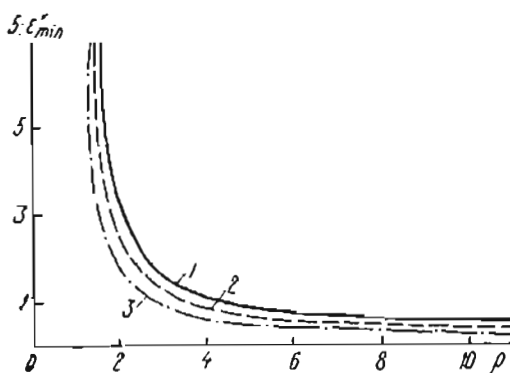


Рис. 1.

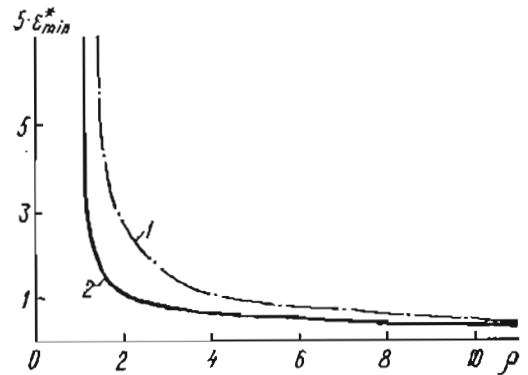


Рис. 2.

Коэффициенты (16) системы (15) выражаются через интегралы вида

$$I_{|n|}(m) = \frac{1}{4i} \int_{\gamma} \frac{\sigma^{\pm n} d\sigma}{\sqrt{(\sigma^2 - m)(1 - m\sigma^2)}} =$$

$$= \begin{cases} m^{\frac{|2|n|-s+2|}{2s}} \int_0^1 \frac{x^{\frac{|2|n|-s+2|}{s}} dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-m^2x^2)}}, & \frac{2|n|-s+2}{s} \text{ — четное;} \\ 0, & \frac{2|n|-s+2}{s} \text{ — нечетное,} \end{cases} \quad (17)$$

для которых при больших l справедлива оценка

$$I_{2l}(m) < \frac{\pi}{2} \frac{m^l}{\sqrt{\pi l}}, \quad l > 0. \quad (18)$$

Система уравнений (15) квазирегулярна. Доказательство этого основывается на оценке (18) интегралов (17), через которые выражаются коэффициенты системы.

Нормальное напряжение (4) в сечении стержня с учетом (13) принимает вид

$$\sigma = E^* \left[\frac{r_0}{r} \alpha_0 + 2 \sum_{k=2,4,\dots}^{\infty} \left(\frac{r_0}{r} \alpha_k - \frac{k(r-r_0)\beta_k^*}{R\sqrt{1+m^2-2m\cos s\theta}} \right) \cos k\theta \right]. \quad (19)$$

Контакт между пластинкой и кольцом осуществляется вдоль всего контура L , если $N^{(l)} \leq 0$. Это условие служит для определения минимальной величины посадки $\varepsilon^*(l)$.

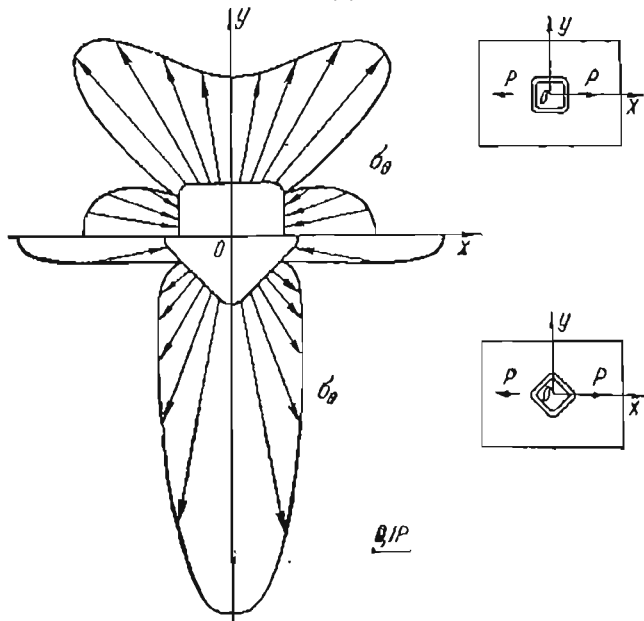


Рис. 4.

пластинка с эллиптическим отверстием $m = 0,2$; $0,05 \leq \delta \leq 0,25$ и пластинка с квадратным отверстием $m = \pm \frac{1}{3}$, $\delta = \frac{1}{16}$.

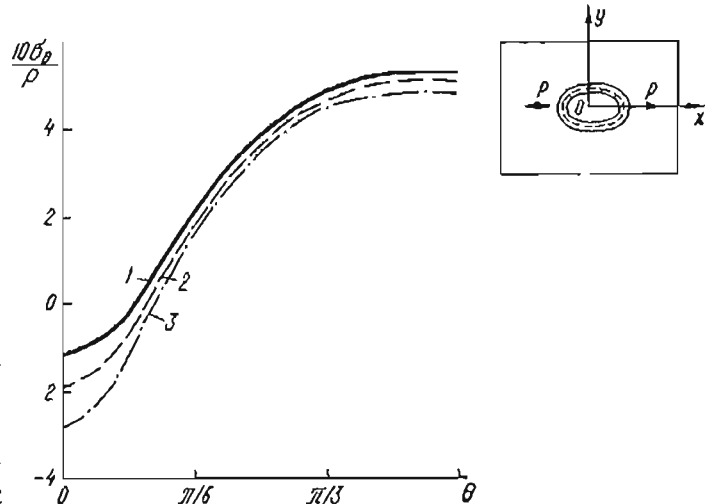


Рис. 3.

Для числового примера возьмем медную пластинку с криволинейным отверстием, в которое впрессован стальной стержень прямоугольного сечения $2h^* \times b$, при следующих значениях геометрических и упругих постоянных материалов: $\nu = \frac{h^*}{h} = 1, 0$,

$$b = 2e_1, \quad \delta = \frac{b}{R},$$

$$\nu = 0,3, \quad \kappa = 2,08,$$

$$\mu = 4,34 \cdot 10^{10} \text{ н/м}^2,$$

$$E^* = 2,06 \cdot 10^{11} \text{ н/м}^2,$$

где b — ширина кольца. Силы P , растягивающие пластинку, направлены параллельно оси абсцисс и приложены в точках $x = \pm \rho$. Рассмотрены следующие случаи:

Результаты вычислений, полученные на ЭВМ «Минск-32», представлены на рис. 1—4. На рис. 1, 2 показана зависимость величины посадки ϵ_{min} от точки приложения силы для эллиптического и квадратного отверстий. Кривые 1, 2, 3 на рис. 1, 3 соответствуют значениям $\delta = 0,25; 0,20; 0,05$, а кривые 1, 2 на рис. 2 — значением $m = \pm \frac{1}{3}$. На рис. 3, 4 изображены графики кольцевых напряжений σ_{θ} вдоль контура отверстия пластинки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мартынович Т. Л. Теория и расчет пластинок с подкрепленным краем. Автореферат докт. дис. Львовский государственный университет, 1970.
2. Мартынович Т. Л., Зварич М. К. — Прикладная механика, 1970, 6, 9.
3. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд-во АН СССР, М., 1954.

Львовский государственный университет

Поступила в редколлегию в сентябре 1974 г.

РЕШЕНИЕ ОБОБЩЕННОЙ ВЗАИМОСВЯЗАННОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ПРОСТРАНСТВА С ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТЬЮ

Ф. В. Семерак, О. И. Борксенко

Рассмотрим бесконечное термоупругое пространство с цилиндрической полостью. Пусть r, φ, z — цилиндрические координаты с началом на оси цилиндрической полости и осью z , совпадающей с ней.

Для определения нестационарного обобщенного температурного поля имеем уравнение теплопроводности [3], которое в цилиндрических координатах имеет вид

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(T + \tau_r \frac{\partial T}{\partial \tau} \right) - \eta \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\epsilon_{kk} + \tau_r \frac{\partial}{\partial \tau} \epsilon_{kk} \right) = 0, \quad (1)$$

где $\eta = \gamma T_c / \lambda_l$, $\gamma = (3\lambda + 2\mu) \alpha_l$, $\epsilon_{kk} = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r}$, λ_l, α — коэффициенты теплопроводности и температуропроводности, λ, μ — постоянные Ляме, α_l — температурный коэффициент линейного расширения, τ_r — время релаксации теплового потока, T_c — температура тела в ненапряженном состоянии. Уравнение движения в данном случае имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = m \frac{\partial T}{\partial \tau}, \quad (2)$$

где

$$m = \gamma / (\lambda + 2\mu), \quad c_1^2 = (\lambda + 2\mu) / \rho.$$

Применяя преобразование Лапласа по τ к (1) и (2), используя при этом начальные условия

$$T(r, 0) = u(r, 0) = \frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial u}{\partial \tau} = 0 \quad \text{при } \tau = 0, \quad (3)$$

получаем систему уравнений

$$\frac{d^2 \bar{T}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\bar{T}}{dr} - \gamma_s^2 \left[\bar{T} - n \left(\frac{d\bar{u}}{dr} + \frac{\bar{u}}{r} \right) \right] = 0, \quad (4)$$