Результаты вычислений, полученные на ЭВМ «Минск-32», представлены на рис. 1—4. На рис. 1, 2 показана зависимость величины посадки $\varepsilon_{\min}$ от точки приложения силы для эллиптического и квадратного отверстий. Кривые *1, 2, 3* на рис. 1, 3 соответствуют значениям $\delta = 0{,}25$; $0{,}20$; $0{,}05$, а кривые *1, 2* на рис. 2 — значением $m = \pm\frac{1}{3}$. На рис. 3, 4 изображены графики кольцевых напряжений σ_θ вдоль контура отверстия пластинки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мартынович Т. Л. Теория и расчет пластинок с подкрепленным краем. Автореферат докт. дис. Львовский государственный университет, 1970.
2. Мартынович Т. Л., Зварич М. К.— Прикладная механика, 1970, 6, 9.
3. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд-во АН СССР, М., 1954.

Львовский государственный университет

Поступила в редколлегию в сентябре 1974 г.

РЕШЕНИЕ ОБОБЩЕННОЙ ВЗАИМОСВЯЗАННОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ПРОСТРАНСТВА С ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТЬЮ

Ф. В. Семерак, О. И. Борисенко

Рассмотрим бесконечное термоупругое пространство с цилиндрической полостью. Пусть r, φ, z — цилиндрические координаты с началом на оси цилиндрической полости и осью z, совпадающей с ней.

Для определения нестационарного обобщенного температурного поля имеем уравнение теплопроводности [3], которое в цилиндрических координатах имеет вид

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial \tau}\left(T + \tau_r\frac{\partial T}{\partial \tau}\right) - \eta\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\varepsilon_{kk} + \tau_r\frac{\partial}{\partial \tau}\varepsilon_{kk}\right) = 0, \quad (1)$$

где $\eta = \gamma T_c/\lambda_t$, $\gamma = (3\lambda + 2\mu)\alpha_t$, $\varepsilon_{kk} = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r}$, λ_t, α — коэффициенты теплопроводности и температуропроводности, λ, μ — постоянные Ляме, α_t — температурный коэффициент линейного расширения, τ_r — время релаксации теплового потока, T_c — температура тела в ненапряженном состоянии. Уравнение движения в данном случае имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} - \frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = m\frac{\partial T}{\partial r}, \quad (2)$$

где

$$m = \gamma/(\lambda + 2\mu), \quad c_1^2 = (\lambda + 2\mu)/\rho.$$

Применяя преобразование Лапласа по τ к (1) и (2), используя при этом начальные условия

$$T(r, 0) = u(r, 0) = \frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial u}{\partial \tau} = 0 \quad \text{при} \quad \tau = 0, \quad (3)$$

получаем систему уравнений

$$\frac{d^2\overline{T}}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\overline{T}}{dr} - \gamma_s^2\left[\overline{T} - n\left(\frac{d\bar{u}}{dr} + \frac{\bar{u}}{r}\right)\right] = 0, \quad (4)$$

$$\frac{d^2\bar{u}}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\bar{u}}{dr}-\left(q_s^2+\frac{1}{r^2}\right)\bar{u}=m\frac{d\bar{T}}{dr},$$

где $n=\gamma T_c/\rho c$, $\gamma_s^2=\frac{s^2}{c_q^2}+\frac{s}{d}$, $q_s=\frac{s}{c_1}$, $c_q=\sqrt{\frac{a}{\tau_r}}$ — скорость распространения тепла, ρ — плотность, c — удельная теплоемкость.

Исключая $\bar{T}$ в уравнениях (4), получаем

$$[\nabla^4-(q_s^2+\gamma_s^2-\varkappa\gamma_s^2)\nabla^2+q_s^2\gamma_s^2]\,\bar{u}=0, \tag{5}$$

где $\varkappa=mn$. Разлагая корни λ_1 и λ_2 характеристического уравнения

$$\lambda^4-(q_s^2+\gamma_s^2-\varkappa\gamma_s^2)\lambda^2+q_s^2\gamma_s^2=0 \tag{6}$$

в ряд по обратным степеням параметра s и учитывая малость величины $\varkappa$, получаем для корней следующие выражения:

$$\lambda_1\approx q_s\left[1+\frac{\varkappa\gamma_s^2}{2(\gamma_s^2-q_s^2)}\right], \tag{7}$$

$$\lambda_2\approx\gamma_s\left[1+\frac{\varkappa\gamma_s^2}{2(\gamma_s^2-q_s^2)}\right].$$

Учитывая, что $\bar{u}|_{r\to\infty}\neq\infty$, решение уравнения (5) ищем в виде

$$\bar{u}=AK_1(\lambda_1 r)+BK_1(\lambda_2 r). \tag{8}$$

Выражение для температуры имеет вид

$$\bar{T}=\frac{1}{m}\left[A\frac{q_s^2-\lambda_1^2}{\lambda_1}K_0(\lambda_1 r)+B\frac{q_s^2-\lambda_2^2}{\lambda_2}K_0(\lambda_2 r)\right], \tag{9}$$

где $K_0(z)$, $K_1(z)$ — функции Макдональда.

Пусть R — радиус цилиндрической полости. Граничные условия на свободной от напряжения поверхности полости берем в виде

$$T=T_0S_+(\tau),\quad \sigma_{rr}=0 \text{ при } r=R, \tag{10}$$

где $S_+(\tau)$ — асимметричная единичная функция.

Применим преобразование Лапласа по τ к условиям (10) и в результате получим

$$\bar{T}=T_0/s,\quad \bar{\sigma}_{rr}=0 \text{ при } r=R. \tag{11}$$

Подставляя выражения (8), (9) в (11), записываем систему уравнений

$$\left[\frac{s^2}{\lambda_1}K_0(\lambda_1R)+c^*K_1(\lambda_1R)\right]A+\left[\frac{s^2}{\lambda_2}K_0(\lambda_2R)+c^*K_1(\lambda_2R)\right]B=0; \tag{12}$$

$$\left(\frac{q_s^2}{\lambda_1}-\lambda_1\right)K_0(\lambda_1R)\,A+\left(\frac{q_s^2}{\lambda_2}-\lambda_2\right)K_0(\lambda_2R)\,B=\frac{mT_0}{s},$$

где $c^*=\frac{2c_2^2}{R}$.

Используя асимптотическое разложение [1]

$$K_0(z)\simeq K_1(z)\simeq\left(\frac{\pi}{2z}\right)^{\frac{1}{2}}\exp(-z), \tag{13}$$

из системы (12) определяем неизвестные A и B:

$$A=\sqrt{\frac{2R}{\pi}}\frac{mT_0}{s}\frac{\left(\frac{s^2}{\lambda_2}+c^*\right)\sqrt{\lambda_1}\exp(\lambda_1R)}{s^2\frac{\lambda_1-\lambda_2}{\lambda_1\lambda_2}\left[(\lambda_1+\lambda_2)-\frac{c^*}{c_1^2}\right]-c^*(\lambda_1-\lambda_2)}, \tag{14}$$

$$B = -\sqrt{\frac{2R}{\pi}}\,\frac{mT_0}{s}\,\frac{\left(\frac{s^2}{\lambda_1}+c^*\right)\sqrt{\lambda_2}\exp(\lambda_2 R)}{s^2\frac{\lambda_1-\lambda_2}{\lambda_1\lambda_2}\left[(\lambda_1+\lambda_2)-\frac{c^*}{c_1^2}\right]-c^*(\lambda_1-\lambda_2)}\,.$$

Подставляя значения величин A и B (14) в формулы (8), (9) и учитывая (13), получаем выражения изображений температурного поля и перемещения:

$$\overline{T} = \sqrt{\frac{R}{r}}\,\frac{T_0}{s}\,\frac{\left(\frac{s^2}{\lambda_2}+c^*\right)(q_s^2-\lambda_1)\lambda_2\exp\{-\lambda_1(r-R)\} - \left(\frac{s^2}{\lambda_1}+c^*\right)(q_s^2-\lambda_1^2)\lambda_1\exp\{-\lambda_2(r-R)\}}{(\lambda_1-\lambda_2)\left\{s^2\left[(\lambda_1+\lambda_2)-\frac{c^*}{c_1^2}\right]-c^*\lambda_1\lambda_2\right\}}\,, \tag{15}$$

$$\overline{u} = -\sqrt{\frac{R}{r}}\,\frac{mT_0}{s}\,\frac{\left(\frac{s^2}{\lambda_2}+c^*\right)\lambda_1\lambda_2\exp\{-\lambda_1(r-R)\} - \left(\frac{s^2}{\lambda_1}+c^*\right)\lambda_1\lambda_2\exp\{-\lambda_2(r-R)\}}{(\lambda_1-\lambda_2)\left\{s^2\left[(\lambda_1+\lambda_2)-\frac{c^*}{c_1^2}\right]-c^*\lambda_1\lambda_2\right\}}\,. \tag{16}$$

Используя выражения (15), (16) и соотношения [2]

$$\sigma_{rr} = (\lambda+2\mu)\frac{\partial u}{\partial r} + \lambda\frac{u}{r} - \gamma T, \tag{17}$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \lambda\frac{\partial u}{\partial r} + (\lambda+2\mu)\frac{u}{r} - \gamma T,$$

записываем выражения для нестационарного обобщенного температурного поля и динамических температурных напряжений:

$$\begin{aligned}
\theta = \sqrt{\frac{P}{\rho}}\Big\langle V(\rho-P)\Big\{\int_0^f \sum_{n=1}^{12}\frac{\Phi_4(s_n)}{\Psi_1'(s_n)}\exp[s_n(f-\xi)]\int_0^\xi\Big[\exp\Big[\frac{A_0}{2M^2}(\rho-P)\Big] + \\
+\frac{A_0}{4M^4}(\rho-P)\int_{A_1(\rho-P)}^{\xi-\eta}\exp\left(-\frac{x}{2M^2}\right)\frac{I_1[v(x,\rho,P)]}{v(x,\rho,P)}\,dx\Big]S_-[\xi-\eta-A_0\times \\
\times(\rho-P)]\int_0^\eta\exp\left(-\frac{\zeta}{M^2}\right)F(\eta,\zeta)\,d\zeta d\eta d\xi - \int_0^f\sum_{n=1}^{12}\frac{\Phi_3(s_n)}{\Psi_1'(s_n)}\exp[s_n(f-\xi)]\times \\
\times\int_0^\xi\exp\Big[-\frac{1}{2M^2}(\xi-\eta)\Big]I_0[v(\xi-\eta,\rho,P)]\,S_-[(\xi-\eta)-A_1(\rho-P)]\times \\
\times\int_0^\eta\exp\left(-\frac{\zeta}{M^2}\right)F(\eta,\zeta)\,d\zeta d\eta d\xi\Big\} + \exp\Big[-\frac{(\rho-P)\varkappa}{2(M^2-1)^2}\Big]\Big\{\int_0^f\sum_{n=1}^{12}\frac{\Phi_2(s_n)}{\Psi_1'(s_n)}\times \\
\times\exp[s_n(f-\xi)]\exp[q(\xi,\rho,P)]\,I_0[w(\xi,\rho,P)]\,d\xi + \int_0^f\sum_{n=1}^{12}\frac{\Phi_1(s_n)}{\Psi_1'(s_n)}\exp[s_n(f- \\
-\xi)]\int_0^\xi\exp\Big[-\frac{1}{2M^2}(\xi-\eta)-q(\eta,\rho,P)\Big]I_0\Big[\frac{1}{2M^2}(\xi-\eta)\Big]\times \\
\times J_0[w(\eta,\rho,P)]\,d\eta d\xi\Big\}\Big\rangle;
\end{aligned}$$

$$\sigma_i = V(p-P)\left\{\int_0^f H_4^i(f,\xi)\int_0^\xi\left[\exp\left[-\frac{A_0}{2M^2}(p-P)\right]+\frac{A_0}{4M^4}(p-P)\times\right.\right.$$

$$\times\int_{(p-P)A_0}^{\xi-\eta}\exp\left(-\frac{x}{2M^2}\right)\frac{I[v(x,p,P)]}{v(x,p,P)}dx\Bigg]S_-[\xi-\eta-A_0(p-P)]\times$$

$$\times\int_0^\eta\exp\left(-\frac{\zeta}{M^2}\right)F(\eta,\zeta)\,d\zeta d\eta d\xi-\int_0^f H_3^i(f,\xi)\int_0^\xi\exp\left[-\frac{1}{2M^2}(\xi-\eta)\right]\times$$

$$\times I_0[v(\xi-\eta,p,P)]\,S_-[(\xi-\eta)-A_0(p-P)]\int_0^\eta\exp\left(-\frac{\zeta}{M^2}\right)F(\eta,\zeta)\times$$

$$\left.\times d\zeta d\eta d\xi\right\}+\exp\left[-\frac{\varkappa(p-P)}{2(M^2-1)^2}\right]\left\{\int_0^f H_2^i(f,\xi)\exp[q(\xi,p,P)]\times\right.$$

$$\times J_0[w(\xi,p,P)]\,d\xi+\int_0^f H_1^i(f,\xi)\int_0^\xi\exp\left[-\frac{1}{2M^2}(\xi-\eta)-q(\eta,p,P)\right]\times$$

$$\left.\times I_0\left[\frac{1}{2M^2}(\xi-\eta)\right]J_0[w(\eta,p,P)]\,d\eta d\xi\right\},$$

где $w(x,p,P)=-\dfrac{(p-P)[(2+\varkappa)M^2-2]\varkappa}{4(M^2+1)^2[(2-\varkappa)M^2-2]}q(x,p,P)$;

$$V(p-P)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\left[\frac{M\varkappa}{(M^2-1)^2}(p-P)\right]^k\frac{k^2}{4M^2(M^2-1)^2};$$

$$v(x,p,P)=\frac{1}{2M^2}[x^2-A_0^2(p-P)]^{\frac{1}{2}},\quad A_0=\frac{[M^2(2-\varkappa)-2]M}{2(M^2-1)};$$

$$F(\eta,\zeta)={}_1F_1\left[\frac{k}{2}+1,\ 2,\ -\frac{1}{M^2-1}(\eta-\zeta)\right]{}_1F_1\left[\frac{k}{2}+1,\ 2,\right.$$

$$\left.-\frac{1}{M^2(M^2-1)}\zeta\right];$$

$$q(x,p,P)=\frac{1}{M^2-1}\left[x-\frac{(2+\varkappa)M^2-2}{2(M^2-1)}(p-P)\right];$$

$$i=r,\ \varphi;\ H_j^r=A_j+\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}B_j+C_j;$$

$$H_j^\varphi=\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}A_j+B_j+C_j;$$

$$A_j=\sqrt{\frac{P}{p}}\sum_{n=1}^{12}\frac{F_j(s_n)}{\Psi_1'(s_n)}\exp[s_n(f-\xi)];$$

$$B_j=\sqrt{\frac{P}{p}}\sum_{n=1}^{10}\frac{G_j(s_n)}{\Psi_2'(s_n)}\exp[s_n(f-\xi)];$$

$$C_j=\sqrt{\frac{P}{p}}\sum_{n=1}^{12}\frac{\Phi_j(s_n)}{\Psi_1'(s_n)}\exp[s_n(f-\xi)],\quad j=1,\ 2,\ 4;$$

$$H_3^r=\sqrt{\frac{P}{p}}\sum_{n=1}^{13}\frac{F_3(s_n)}{\Psi_3'(s_n)}\exp[s_n(f-\xi)]+\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\sqrt{\frac{P}{p}}\sum_{n=1}^{11}\frac{G_3(s_n)}{\Psi_4'(s_n)}\times$$

$$\times \exp[s_n(f-\xi)] + \sqrt{\frac{P}{p}} \sum_{n=1}^{12} \frac{\Phi_3(s_n)}{\Psi_1'(s_n)} \exp[s_n(f-\xi)];$$

$$H_3^{\varphi} = \frac{\lambda}{\lambda+2\mu} \sqrt{\frac{P}{p}} \sum_{n=1}^{13} \frac{F_3(s_n)}{\Psi_3'(s_n)} \exp[s_n(f-\xi)] + \sqrt{\frac{P}{p}} \sum_{n=1}^{11} \frac{G_3(s_n)}{\Psi_4'(s_n)} \times$$

$$\times \exp[s_n(f-\xi)] + \sqrt{\frac{P}{p}} \sum_{n=1}^{12} \frac{\Phi_3(s_n)}{\Psi_1'(s_n)} \exp[s_n(f-\xi)];$$

$$\Psi_3^{(s)} = s\Psi_1(s); \; \Psi_4(s) = s\Psi_2(s);$$

$$\Psi_1(s) = M^2 s (s+M^{-2}) \varphi_1^2 - \varphi_2^2; \; \Psi_2(s) = M^2 (s+M^{-2}) s g_1^2 - g_2^2;$$

$$\Phi_1(s) = M(s+M^{-2})(\varphi_5\varphi_2 - \varphi_3\varphi_1); \; \Phi_2(s) = \varphi_3\varphi_2 - (M^2 s+1)\varphi_5\varphi_1;$$

$$\Phi_3(s) = -Ms(s+M^{-2})\varphi_1\varphi_4; \; \Phi_4(s) = -\varphi_2\varphi_4;$$

$$F_1(s) = M(s+M^{-2})[f_2\varphi_2 - f_1\varphi_1]; \; F_2(s) = f_1\varphi_2 - (M^2 s+1) f_2\varphi_1;$$

$$F_3(s) = M(s+M^{-2})[sf_3\varphi_1 - f_4\varphi_2]; \; F_4(s) = (M^2 s+1) f_4\varphi_1 - f_3\varphi_2;$$

$$G_1(s) = (s+M^{-2})[g_5 g_2 - Msg_1 g_3]; \; G_2(s) = g_3 g_2 - (s+M^{-2}) g_1 g_5;$$

$$G_3(s) = -(s+M^{-2}) g_4 g_2; \; G_4(s) = M(s+M^{-2}) g_4 g_1;$$

$$\varphi_1 = \{[a_2(s+M^{-2}) - s - a_0][(s+a_0)(s-2a_3) + a_2 s(s+$$

$$+M^{-2})](s+M^{-2}) + [a_2(s+M^{-2}) + s + a_0]\{s(s+M^{-2})[s+a_0-$$

$$-a_2(s+M^{-2})] - 2a_3(s+a_0)[(1-a_4)s - M^{-2}]\}\}(s+a_0);$$

$$\varphi_2 = M^2(s+M^{-2})(s+a_0)[a_2(s+M^{-2}) + s + a_0]\{s(s+M^{-2})[s+a_0-$$

$$-a_2(s+M^{-2})] - 2a_3(s+a_0)[(1-a_4)s - M^2]\} + s[a_2(s+M^{-2}) +$$

$$+s+a_0][(s+a_0)(s-2a_3) + a_2 s(s+M^{-2})](s+M^{-2})(s+a_0);$$

$$\varphi_3 = h_1 h_2; \; \varphi_4 = h_3 h_2; \; \varphi_5 = a_1 a_3 h_2;$$

$$f_1 = h_1 h_4; \; f_2 = a_1 a_3 h_4; \; f_3 = a_5^2(s+a_8)(s+M^{-2}) h_3;$$

$$f_4 = (s+a_0)(s+a_8) a_7 M p^{-1} h_3; \; g_1 = (s+a_0)^{-1}\varphi_1;$$

$$g_2 = (s+a_0)^{-1}\varphi_2; \; g_3 = p^{-1} a_7 (s+M^{-2}) h_1;$$

$$g_4 = p^{-1} a_5 (s+a_8) h_3; \quad g_5 = 2p^{-1} M a_3 a_7 (2-\varkappa)(s+M^{-2});$$

$$h_1 = s^2 + s a_0 + 4 a_3 a_5; \; h_2 = [(s+a_0)^2 + a_5^2 (s+a_8)^2](s+M^{-2});$$

$$h_3 = s^2 + s(a_0 + a_3 a_7) + 2 a_7 a_6;$$

$$h_4 = [a_7 s(s+a_6) + p^{-1}(s+a_0)](s+a_6)(s+M^{-2}) a_7;$$

$$a_0 = \frac{1}{M^2-1}; \; a_1 = M(2-\varkappa) a_0; \; a_2 = \frac{1}{2} M^2 \varkappa a_0;$$

$$a_3 = \frac{\beta}{P}; \; a_4 = \frac{\varkappa^4}{4M^2}; \; a_5 = \frac{1}{2} M[(2-\varkappa)M^2 - 2] a_0;$$

$$a_6 = \frac{2+\varkappa}{(2+\varkappa)M^2-2}; \; a_7 = \frac{(2+\varkappa)M^2-2}{2(M^2-1)}; \; a_8 = \frac{2-\varkappa}{(2-\varkappa)M^2-2};$$

$$\beta = \frac{c_2^2}{c_1^2}; \; f = \frac{c_1^2\tau}{a}; \; p = \frac{c_1 r}{a}; \; P = \frac{c_1 R}{a};$$

$$M = \frac{c_1}{c_q}; \; \theta = \frac{T}{T_0}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. «Наука», М., 1971.
2. Коваленко А. Д. Основы термоупругости. «Наукова думка», К., 1970.
3. Kaliski S.— Proc. Vibr. Problems, 1965, 6, 3.

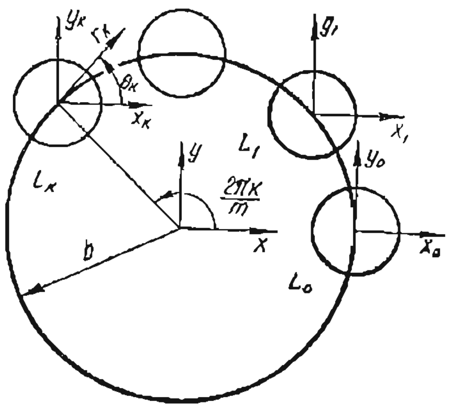
Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию в сентябре 1974 г.

ДИНАМИЧЕСКИЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКЕ С КОЛЬЦОМ РАВНЫХ КРУГОВЫХ ОТВЕРСТИЙ

Р. Н. Швец, С. В. Грицай

Рассмотрим установившиеся изгибные колебания бесконечной трансверсально-изотропной пластинки толщины $2h$ с кольцом равных круговых отверстий, центры которых периодически размещены по окружности радиуса b (см. рисунок). В центре каждого отверстия поместим полюс полярной системы координат (r_k, θ_k) $(k = 0, 1, \ldots, m-1)$. Граничные условия на контурах L_k будем считать циклически симметричными [2].



Задача состоит в отыскании в области S, занимаемой пластинкой, решений уравнений движения [1]

$$\left(\Delta - \frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\right)\left(\Delta\tilde{w} - \frac{1}{c_3^2}\frac{\partial^2\tilde{w}}{\partial \tau^2}\right) + \frac{3}{h^2c_1^2}\frac{\partial^2\tilde{w}}{\partial\tau^2} = \frac{3(1-\nu)}{2h^3G}P,$$

$$\Delta\varphi - \left(k^2 + \frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right)\varphi = 0, \tag{1}$$

которые учитывают поперечные сдвиговые деформации и инерцию вращения, когда на контурах $(r_k = R)$ L_k заданы условия

$$M_r^{(k)} = M_r^0 e^{-i\omega_0\tau}, \quad M_{r\theta}^{(k)} = M_{r\theta}^0 e^{-i\omega_0\tau}, \quad N_r^{(k)} = N_r^0 e^{-i\omega_0\tau}. \tag{2}$$

Здесь $c_1^2 = \frac{E}{\rho(1-\nu^2)}$, $c_2^2 = \frac{G}{\rho}$, $c_3^2 = \frac{k'G_z}{\rho}$, $k^2 = \frac{2}{\varepsilon(1-\nu)}$, $\varepsilon = \frac{Eh^2}{3k'(1-\nu^2)G_z}$, $\Delta_1 = \Delta - \frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}$, $w = \tilde{w} - \varepsilon\Delta_1\tilde{w}$ — прогиб, φ — функция сдвига, P — внешняя нагрузка, E, G — модули Юнга и сдвига в плоскости пластинки, G_z — модуль сдвига в направлении, перпендикулярном к плоскости пластинки, Δ — двумерный оператор Лапласа, k' — коэффициент сдвига, ν — коэффициент Пуассона, ρ — плотность, ω_0 — круговая частота, τ — время.

Моменты и перерезывающие усилия в рассматриваемой пластинке определяются формулами

$$M_r^{(k)} = -D\left[(1-\nu)\frac{\partial^2\tilde{w}}{\partial r_k^2} + \nu\Delta\tilde{w} - (1-\nu)\left(\frac{1}{r_k}\frac{\partial^2\varphi}{\partial r_k\partial\theta_k} - \frac{1}{r_k^2}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta_k}\right)\right],$$

$$M_r^{(k)} + M_\theta^{(k)} = -D(1+\nu)\Delta\tilde{w},$$