

$a_1^{(k)} = (\tilde{A}\tilde{x}_k, \tilde{x}_k)_{\tilde{s}}, a_2^{(k)} = (\tilde{A}\tilde{x}_k, \tilde{A}\tilde{x}_k)_{\tilde{s}}$, приходим к соответствующей последовательности двусторонних оценок наибольшего по модулю собственного значения пучка $P(\lambda)$.

Учет структуры оператора \tilde{A} приводит к упрощению формул для чисел $a_i^{(k)}$. Действительно, учитывая соотношения $x_1^{(k+1)} = x_2^{(k)}, x_2^{(k+1)} = x_3^{(k)}, \dots, x_{n-1}^{(k+1)} = x_n^{(k)}, x_n^{(k+1)} = -A_0(A_1x_n^{(k)} + A_2x_{n-1}^{(k)} + \dots + A_nx_1^{(k)})$ между компонентами векторов \tilde{x}_k и \tilde{x}_{k+1} , записываем итерационную формулу

$$y_k = -A_0(A_1y_{k-1} + A_2y_{k-2} + \dots + A_ny_{k-n}) \quad (k = n, n+1, \dots)$$

с начальными элементами $y_0 = x_1^{(0)}, y_1 = x_2^{(0)}, \dots, y_{n-1} = x_n^{(0)}$. При этом, очевидно, вектор $\tilde{x}_k = \{y_k, y_{k+1}, \dots, y_{k+n-1}\}$. Так как оператор \tilde{S} симметризует каждый из операторов \tilde{A}^k , то $a_0^{(k)} = (\tilde{x}_0, \tilde{x}_{2k})_{\tilde{s}}, a_1^{(k)} = (\tilde{x}_0, \tilde{x}_{2k+1})_{\tilde{s}}, a_2^{(k)} = (\tilde{x}_0, \tilde{x}_{2k+2})_{\tilde{s}}$.

Обозначая $\tilde{S}\tilde{x}_0 = \tilde{u} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, приходим к формулам

$$a_0^{(k)} = (u_1, y_{2k}) + (u_2, y_{2k+1}) + \dots + (u_n, y_{2k+n-1}),$$

$$a_1^{(k)} = (u_1, y_{2k+1}) + (u_2, y_{2k+2}) + \dots + (u_n, y_{2k+n}),$$

$$a_2^{(k)} = (u_1, y_{2k+2}) + (u_2, y_{2k+3}) + \dots + (u_n, y_{2k+n+1}) \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Очевидно, что при каждом последующем итерационном шаге необходимо вычислять лишь два новые значения чисел $a_i^{(k)}$.

Отметим, что для квадратичных операторных пучков специального вида аналогичные вопросы рассматривались в работе [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Балінський А. І., Зорій Л. М.— ДАН УРСР. Сер. А. 1972, 6, 485.
2. Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н.— Изв. АН СССР. ОФМ, 1929, 5, 471.
3. Маркус А. С., Мереуца И. В.— Изв. АН СССР. Сер. матем., 1973, 37, 5, 1108.
4. Nadeher K. P.— ZAMM, 1967, 47, 2, 91.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию в декабре 1973 г.

ВЛИЯНИЕ ЖЕСТКОСТИ ЗАДЕЛКИ НА УСТОЙЧИВОСТЬ КОНИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ ПРИ СОВМЕСТНОМ ДЕЙСТВИИ СЛЕДЯЩЕЙ И КОНСЕРВАТИВНОЙ СИЛ

Д. А. Байдак, А. И. Балинский

Рассмотрим упругий стержень длины l , жесткость и масса которого изменяются по законам

$$EI(\xi) = EI_0 \left(1 - \frac{\xi}{H}\right)^4, \quad m(\xi) = m_0 \left(1 - \frac{\xi}{H}\right)^2,$$

где $I_0 = \pi R^4/4$, $m_0 = \pi \rho R^2$, ρ — плотность материала, R — радиус нижнего основания, что соответствует однородному стержню в виде срезанного конуса ($l \leq H$, H — высота соответствующего полного конуса; ось ξ направлена по оси конуса).

Пусть нижний конец ($\xi = 0$) упруго зашпелен, а другой ($\xi = l$) — нагружен консервативной силой G и следящей силой P . Исследование малых колебаний и устойчивости прямолинейной формы равновесия рассматриваемого стержня сводится к следующей задаче на собственные значения:

$$\begin{aligned} & \{f(x)y''\}' + py'' - \omega^2 g(x)y = 0, \\ & \{f(x)y''\}' + p(1-\eta)y' \Big|_{x=1} = 0, \quad \{f(x)y''\}_{x=1} = 0, \\ & \{f(x)y'' - \sigma_0 y'\}_{x=0} = 0, \quad \{y\}_{x=0} = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\xi = xl$, $f(x) = (1 - \alpha x)^4$, $g(x) = (1 - \alpha x)^2$, $\omega = \frac{l}{H}$, причем $0 \leq \alpha \leq 1$ ($\alpha = 0$ соответствует цилиндрическому стержню, $\alpha = 1$ — стержню в виде полного конуса),

$$p = \frac{P+G}{EI_0} l^2, \quad \eta = \frac{P}{P+G}, \quad \omega^2 = \frac{m_0 l^4}{EI_0} \Omega^2,$$

Ω — параметр частоты, σ_0 — параметр жесткости заделки.

Для построения области устойчивости в плоскости параметров нагрузки (p) и неконсервативности (η), а также для исследования влияния на нее параметров σ_0 и α применяем метод двусторонних оценок [2]. С этой целью, как и в работе [1], строим характеристическое уравнение задачи (1):

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_{2n}(p, \eta, \sigma_0, \alpha) \omega^{2n} = 0,$$

где

$$B_{2n} = \sum_{k=0}^n (b_{nk} + \sigma_0 d_{nk}),$$

$$\begin{aligned} b_{nk} &= v_k(0) u_{n-k}(0) - u_k(0) v_{n-k}(0); \\ d_{nk} &= u_k(0) v'_{n-k}(0) - u'_{n-k}(0) v_k(0), \end{aligned}$$

причем функции $u_n(x)$ и $v_n(x)$, $n = 1, 2, \dots$, определяются рекуррентным соотношением

$$\zeta_n(x) = \frac{1}{p} \int_x^1 \left[x - \xi - \frac{(1-\alpha x)(1-\alpha \xi)}{\sqrt{p}} \sin \frac{\sqrt{p}(x-\xi)}{(1-\alpha x)(1-\alpha \xi)} \right] (1-\alpha \xi)^2 \zeta_{n-1}(\xi) d\xi,$$

$$\zeta_0(x) = u_0(x) = 1;$$

$$\zeta_0(x) = v_0(x) = \eta x + \frac{(1-\alpha)(1-\eta)(1-\alpha x)}{\sqrt{p}} \sin \frac{\sqrt{p}(x-1)}{(1-\alpha)(1-\alpha x)}.$$

Отсюда находим выражения, определяющие коэффициенты

$$u_n^{(i)}(0) = \int_{D_n} s_i(\theta_1) F_u(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) d\theta_1 d\theta_2 \dots d\theta_n,$$

$$v_n^{(i)}(0) = \int_{D_n} s_i(\theta_1) F_v(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) d\theta_1 d\theta_2 \dots d\theta_n,$$

где

$$i = 0, 1, 2; \quad n = 1, 2, \dots;$$

$$s_0(\theta_1) = (-1)^{n-1} p^{-n} \varphi(\theta_1), \quad s_1(\theta_1) = (-1)^{n-1} p^{-n} [\alpha \varphi(\theta_1) + \varphi'(\theta_1)],$$

$$s_2(\theta_1) = (-1)^n p^{-n+1} [\theta_1 + \varphi(\theta_1)];$$

$$F_u = (1 + \alpha \theta_n)^{-5} \prod_{m=1}^{n-1} \frac{\varphi(\theta_m - \theta_{m+1})}{(1 + \alpha \theta_m)^6}, \quad F_v = (1 + \alpha \theta_n)^{-1} (\theta_n + s(\theta_n)) F_u,$$

причем

$$\varphi(\theta) = \frac{\sin \sqrt{p} \theta}{\sqrt{p}} - \theta,$$

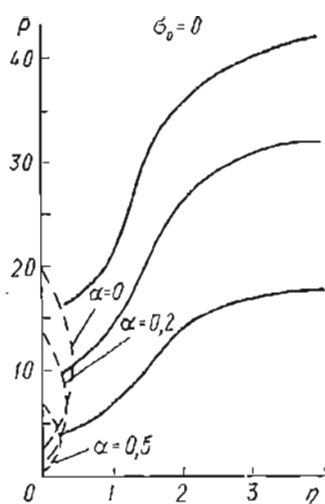


Рис. 1.

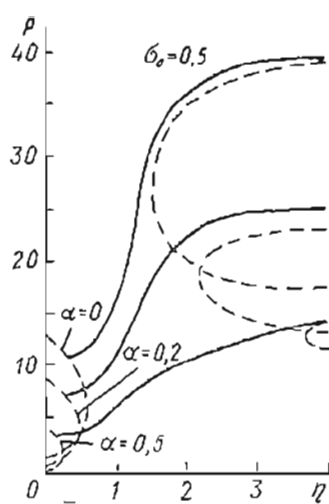


Рис. 2.

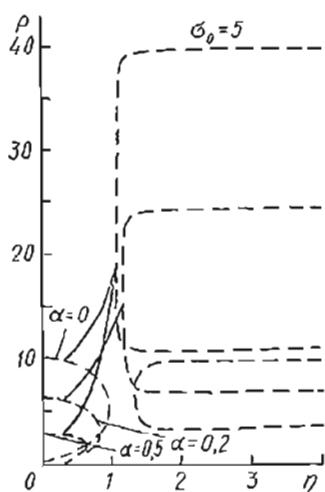


Рис. 3.

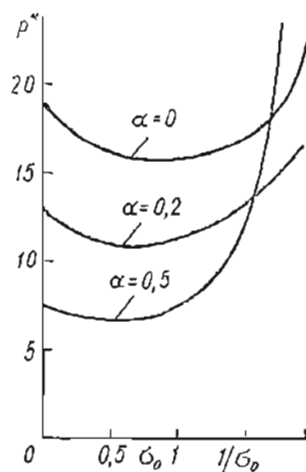


Рис. 4.

$$s(\theta) = (1 - \eta) \left[(1 - \alpha) \varphi \left(\theta - \frac{1}{1 - \alpha} \right) - (1 + \alpha \theta) \right];$$

область интегрирования D_n задается неравенствами

$$0 \leq \theta_1 \leq \frac{1}{1 - \alpha}, \quad \theta_1 \leq \theta_2 \leq \frac{1}{1 - \alpha}, \quad \dots, \quad \theta_{n-1} \leq \theta_n \leq \frac{1}{1 - \alpha}.$$

Для определения значений параметра нагрузки, отвечающих автоколебательной потере устойчивости, используется простейшая из нижних оценок данных в работе [2]; эйлеровы значения определяются как наименьшие корни уравнения

$$B_0(\rho, \eta, \sigma_0, \alpha) = 0.$$

Результаты проведенных вычислений изображены на рис. 1, 2, 3, где построены области устойчивости в плоскости (η, ρ) для некоторых значений α и σ_0 . При этом сплошные кривые отвечают автоколебательному виду потери устойчивости, а штриховые — эйлеровому.

Из данных графиков видно, что жесткость заделки оказывает существенное влияние на характер потери устойчивости и критические нагрузки конических стержней при каждом значении α .

Зависимость критического значения следящей силы ($\eta = 1$) от параметра σ_0 изображена на рис. 4. Эта зависимость не является монотонной — при меньшей степени жесткости защемления равновесие стержня может оказаться более устойчивым.

ЛИТЕРАТУРА

1. Байдак Д. А., Зорій Л. М.— ДАН УРСР. Сер. А, 1972, 6, 548.
2. Зорій Л. М.— ДАН УРСР. Сер. А, 1968, 11, 992.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию в ноябре 1973 г.

ВЛИЯНИЕ ТРЕНИЯ И ЖЕСТКОСТИ ЗАДЕЛКИ НА УСТОЙЧИВОСТЬ УПРУГОГО СТЕРЖНЯ

Ю. М. Исаев, А. И. Ровенчак

Влияние трения, пропорционального скорости, на автоколебательную потерю устойчивости упругой консоли исследовалось в [1].

Здесь рассматривается упруго закрепленный консольный стержень при действии следящей силы (H) и распределенных сил трения $(b \frac{\partial v}{\partial t})$. Исследуется влияние параметров упругого закрепления и трения на величину критической силы.

Представляя решение соответствующей задачи о малых колебаниях в виде $v(x, t) = f(x) \exp \tilde{\lambda} t$ ($\tilde{\lambda}$ — характеристический показатель, t — время), приходим к следующей краевой задаче на собственные значения:

$$\left. \begin{aligned} f^{IV}(\xi) + \beta f''(\xi) + \delta f &= 0; \\ f(0) = f'(0) - \psi f''(0) = f''(1) = f'''(1) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

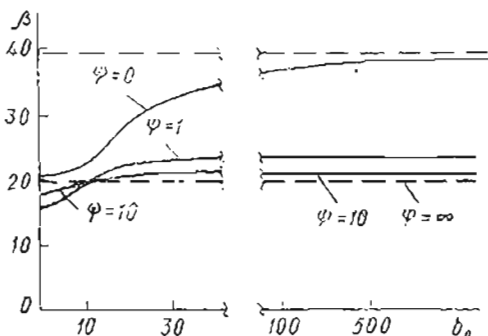
где $\beta = \frac{Hl^2}{EI}$; $\delta = \lambda^2 + b_0 \lambda$; $b_0 = \frac{B}{\sqrt{a}}$; $B = \frac{bl^4}{EI}$; $a = \frac{ml^4}{EI}$; $\lambda = \sqrt{a} \tilde{\lambda}$; l — длина стержня; EI — жесткость на изгиб; m — масса единицы длины; ψ — коэффициент упругого закрепления.

Для исследования устойчивости рассмотрим отвечающее (1) характеристическое уравнение, которое, согласно работе [2], представляется так *:

$$F_0 + \psi F'_0 = A_0 + A_1 \lambda + A_2 \lambda^2 + \dots + A_{2n} \lambda^{2n} + \dots = 0, \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} A_0 &= 1; \quad A_1 = b_0 (a_{4,0} + \psi a'_{4,0}); \\ A_2 &= (a_{4,0} + b_0^2 a_{4,1}) + \psi (a'_{4,0} + b_0^2 a'_{4,1}); \\ A_3 &= b_0 [(2a_{4,1} + b_0^2 a_{4,2}) + \psi (2a'_{4,1} + b_0^2 a'_{4,2})]; \\ A_4 &= (a_{4,1} + 3b_0^2 a_{4,2} + b_0^4 a_{4,3}) + \psi (a'_{4,1} + 3b_0^2 a'_{4,2} + b_0^4 a'_{4,3}); \end{aligned} \quad (3)$$



$$A_5 = b_0 [(3a_{4,2} + 4b_0^2 a_{4,3} + b_0^4 a_{4,4}) + \psi (3a'_{4,2} + 4b_0^2 a'_{4,3} + b_0^4 a'_{4,4})].$$

Для нахождения критических значений параметра нагрузки используем простейшие оценки работы [3].

Результаты вычислений представлены на рисунке (изображены нижние оценки, так как верхние практически совпадают с ними). Как видно, при

* Из выражения (2) непосредственно следует, что при $\psi = 0$ данная задача представляет собой случай, рассмотренный в работе [1].