

чениям  $ah = 3; 5; 10$  соответственно. На рис. 2 штрихпунктирные линии соответствуют расстоянию между двумя проводниками  $\frac{l}{h} = 1$ , сплошные —  $\frac{l}{h} = 0,1$ . На рис. 3 сплошные линии отвечают распределению мощности джоулева тепла для индуктора в виде полосы шириной  $\frac{l}{h} = 1$ , штрихпунктирные —  $\frac{l}{h} = 5$ .

Из приведенных на рис. 1, 2 графиков видно, что для индукторов, состоящих из линейных проводников, при заданных  $h$  и  $l$  с возрастанием параметра  $a$  (уменьшении глубины проникновения электромагнитного поля) уровень мощности джоулева тепла возрастает. Из рис. 3 видно, что для исследованных случаев в области края индуктора имеет место резкое увеличение градиентности кривых распределения мощности джоулева тепла в направлении оси  $x$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, М., 1963.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. Физматгиз, М., 1959.
3. Подстригач Я. С., Колодий Б. И.— Прикладная механика, 1970, 6, 12.
4. Смайт Р. Электростатика и электродинамика. ИЛ, М., 1954.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию в декабре 1973 г.

### ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕРМОУПРУГОГО СОСТОЯНИЯ ПЛОСКОСТИ С КРУГОВЫМ ОТВЕРСТИЕМ И РАДИАЛЬНЫМИ ТРЕЩИНАМИ, ВЫХОДЯЩИМИ НА КОНТУР

М. Г. Кривцун

Рассмотрим бесконечную упругую плоскость с круговым отверстием радиуса  $R$  и  $n$  симметрично расположенными трещинами одинаковой длины  $L$ , выходящими на контур отверстия. Предположим, что отверстие с трещинами теплоизолировано и свободно от внешних усилий, а на бесконечности задан однородный тепловой поток  $q$ , направленный под углом  $\alpha$  к оси  $Ox$ . Координатные оси комплексного переменного  $z = x + iy$  выбираем так, что одна из трещин расположена на положительной полуоси  $Ox$  (рис. 1).

Пусть область, расположенная вне отверстия и трещин, конформно отображается на внешность единичной окружности  $\Gamma$  в плоскости  $\zeta$  функцией  $z = \omega_n(\zeta)$ . Тогда распределение температуры в области переменной  $\zeta$  имеет вид [1, 6]

$$t(\zeta, \bar{\zeta}) = qR_n \operatorname{Re} \left\{ e^{i\alpha} \left( \bar{\zeta} + \frac{1}{\zeta} \right) \right\}, \quad (1)$$

где  $R_n$  — некоторая действительная постоянная, зависящая от формы и размеров отверстия.

Для рассматриваемого случая дифференциальное уравнение отображающей функции запишется так [7]:

$$\frac{dz}{z} = \frac{(1 - \zeta^{-n}) d\zeta}{\zeta (1 + 2\varepsilon_n \zeta^{-n} + \zeta^{-2n})^{\frac{1}{2}}}, \quad (2)$$

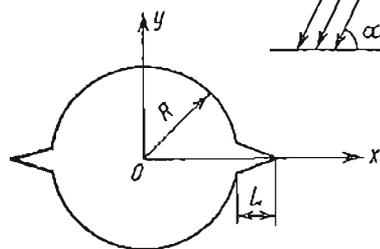


Рис. 1.

Решение этого уравнения с учетом условия  $\omega_n(1) = R + L$  запишем в форме

$$\omega_n(\zeta) = R_n^0 [\zeta^n + \zeta^{-n} + 1 + \varepsilon_n + (1 + \zeta^{-n})(\zeta^{2n} + 2\varepsilon_n \zeta^n + 1)^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{n}}, \quad (3)$$

где  $R_n^0 = R(1 - \varepsilon_n)^{\frac{1}{n}}$ ;  $\varepsilon_n = 1 - 8(1 + \delta)^n [1 + (1 + \delta)^n]^{-2}$ ;  $\delta = \frac{L}{R}$  — безразмерная длина трещины.

Вследствие иррациональности отображающей функции получение решения в замкнутой форме затруднительно. Поэтому представим отображающую функцию в виде

$$\omega_{n,N}(\zeta) = R_n [\zeta + \sum_{s=1}^N c_{n,\frac{s}{n}} \zeta^{1-s}], \quad (4)$$

причем

$$R_n = 2^{\frac{1}{n}} R_n^0; \quad c_{n,\frac{s}{n}} = \begin{cases} c_{n,m}, & \text{если } m = \frac{s}{n} \text{ — целое число,} \\ 0, & \text{если } m = \frac{s}{n} \text{ — дробное число.} \end{cases}$$

Коэффициенты ряда (4) находим подстановкой его в уравнение (2) и приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях  $\zeta$ .

Функция (4) отображает на область  $|\zeta| \geq 1$  внешность некоторого нового контура, на котором сохранены точки возврата в концах трещин, а закруглены лишь углы на пересечении берегов трещин с контуром отверстия, причем, увеличивая  $N$ , радиус закругления этих углов можно сделать сколь угодно малым.

Определим комплексные потенциалы  $\varphi(\zeta)$  и  $\psi(\zeta)$ , через которые компоненты напряжений и смещений выражаются по известным формулам [3, 5].

Учитывая, что контур  $\Gamma$  свободный от внешних усилий, для функций  $\varphi(\zeta)$ ,  $\psi(\zeta)$  имеем следующее граничное условие [3]:

$$\varphi(\sigma)\overline{\omega'(\sigma)} + \omega(\sigma)\overline{\varphi'(\sigma)} + \overline{\omega'(\sigma)}\overline{\psi(\sigma)} = C. \quad (5)$$

Будем искать комплексные потенциалы в виде

$$\begin{aligned} \varphi_{n,N}(\zeta) &= A \ln \zeta + \sum_{s=1}^N a_{n,s} \zeta^{1-s}, \\ \psi(\zeta) &= \bar{A} \ln \zeta + \sum_{s=1}^{\infty} b_{n,s} \zeta^{1-s}. \end{aligned} \quad (6)$$

Нетрудно убедиться, что при таком выборе функций  $\varphi(\zeta)$  и  $\psi(\zeta)$  главный вектор равен нулю, а напряжения на бесконечности ограничены. Комплексная постоянная  $A$  определяется из условия однозначности смещений

$$A = -\frac{1}{4} \alpha_i E q R_n^2 [e^{i\alpha} - c_{n,\frac{2}{n}}^2 e^{-i\alpha}]. \quad (7)$$

Подставим выражения (4) и (6) в соотношение (5), умножим его на ядро типа Коши и проинтегрируем по  $\Gamma$ . Приравнявая в найденном выражении коэффициенты при одинаковых степенях  $\zeta$ , получаем систему линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных коэффициентов  $a_{n,s}$ :

$$a_{n,p} + c_{n,\frac{p+1}{n}} \bar{A} + \sum_{s=1}^{N-p} (1-s) [c_{n,\frac{s}{n}} a_{n,s+p} + c_{n,\frac{s+p}{n}} \bar{a}_{n,s}] = 0; \quad p = 1, 2, 3, \dots, N, \quad (8)$$

после решения которой определим функцию  $\varphi_{n,N}(\zeta)$  и, следовательно [4], коэффициенты интенсивности напряжений.

Для случая трещин малой длины решение задачи можно получить в замкнутой форме, используя метод решения системы (8), предложенный

в работе [2]. Действительно, учитывая, что  $c_{n,\frac{s}{n}} = \delta^2 c_{n,\frac{s}{n}}^*$ , и решая систему (8) методом последовательных приближений, получаем

$$a_{n,p}^{(0)} = 0; \quad a_{n,p}^{(1)} = -\bar{A}c_{n,\frac{p+1}{n}}; \quad a_{n,p}^{(II)} = a_{n,p}^{(I)} - \delta^4 \bar{A} \sum_{s=1}^{N-p} (1-s) [c_{n,\frac{s}{n}}^* c_{n,\frac{s+p+1}{n}}^* + c_{n,\frac{s+p}{n}}^* c_{n,\frac{s+1}{n}}^*]; \quad p = 1, 2, 3, \dots, N. \quad (9)$$

Как видно из этих выражений, второе и все последующие приближения отличаются от первого членами порядка  $\delta^4$ . При надлежащей малости параметра  $\delta$  система (8) регулярна, а последовательные приближения сходятся к ее решению. Поэтому с точностью до членов порядка  $\delta^4$  решение системы (8) имеет вид

$$a_{n,p} = -\bar{A}c_{n,\frac{p+1}{n}}; \quad p = 1, 2, 3, \dots, N. \quad (10)$$

Подставим найденное решение в соотношения (6), учитывая при этом (4), и перейдем в полученном выражении к пределу при  $N \rightarrow \infty$ . Тогда

$$\varphi_n(\zeta) = A \ln \zeta + \bar{A} \left[ \zeta^2 + \zeta c_{n,\frac{1}{n}} - \zeta \frac{\omega_n(\zeta)}{R_n} \right]. \quad (11)$$

Для определения коэффициентов интенсивности напряжений воспользуемся формулами [4]

$$k_{1,n}^{(j)} - ik_{2,n}^{(j)} = 2 \frac{\varphi_n'(\zeta_{\theta_j})}{\sqrt{e^{i\theta_j} \omega_n''(\zeta_{\theta_j})}}, \quad (12)$$

где  $\theta_j$  — угол между полярной осью локальной системы координат  $r, \beta^{\theta}$  и осью  $Ox$ ;  $\zeta_{\theta_j}$  — точка единичной окружности  $\Gamma$ , соответствующая вершине  $j$ -й трещины. Так как угол  $\alpha$  произвольный, достаточно рассмотреть одну из трещин, например ту, которая расположена на положительной полуоси  $Ox$ . При  $\theta_j = 0$ ,  $\zeta_{\theta_j} = 1$  из формулы (12) с учетом выражений (3) и (11) после соответствующих преобразований находим

$$k_{1,n} = -N_n (1 - c_{n,\frac{2}{n}}) (1 + M_n) \cos \alpha, \\ k_{2,n} = N_n (1 + c_{n,\frac{2}{n}}) (1 - M_n) \sin \alpha, \quad (13)$$

где

$$N_n = \alpha_t E q R^2 \left[ \frac{\gamma^n - 1}{2n\gamma^5(\gamma + 1)} \right]^{\frac{1}{2}} \left( \frac{1 + \gamma^n}{2} \right)^{\frac{4}{n}}; \\ M_n = 2 + c_{n,\frac{1}{n}} - \gamma^2 \left( \frac{2}{1 + \gamma^n} \right)^{\frac{2}{n}}; \\ c_{1,1} = 2 \left( \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right)^2; \quad c_{1,2} = \frac{1}{2} c_{1,1} (\gamma^2 + 6\gamma + 1); \\ c_{2,1} = \left( \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2 + 1} \right)^2; \quad \gamma = 1 + \delta;$$

$\alpha_t$  — линейный коэффициент теплового расширения;  $E$  — модуль упругости.

На рис. 2, 3 дана зависимость приведенных коэффициентов интенсивности напряжений

$$\tilde{k}_{i,n} = \frac{k_{i,n}}{\alpha_t E q R^2}, \quad i = 1, 2,$$

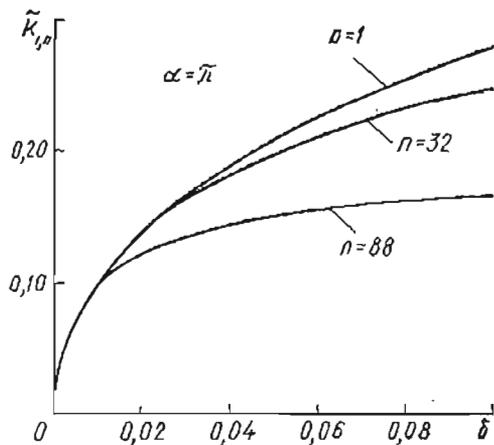


Рис. 2.

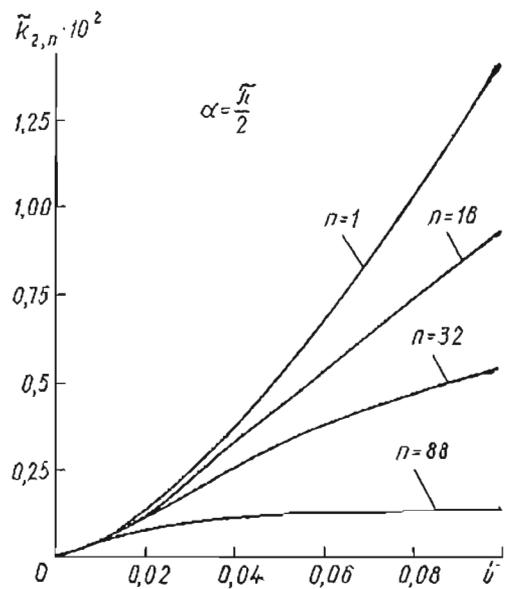


Рис. 3.

от безразмерной длины трещины  $\delta = \frac{L}{R}$ . Как показывает анализ соотношения (13) и приведенных графиков, величина коэффициентов интенсивности напряжений существенно зависит от количества трещин и их длины. При увеличении  $n$  коэффициенты интенсивности напряжений снижаются, и как это следует из формул (13), стремятся к нулю при  $n \rightarrow \infty$ . При небольшом количестве трещин ( $n \leq 4$ ) графики  $\tilde{k}_{i,1} \div \tilde{k}_{i,4}$  ( $i = 1, 2$ ) практически совпадают, так как в случае трещин малой длины возмущение температурного поля в окрестности одной трещины слабо влияет на возмущение температурного поля в окрестности другой.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гайвась И. В.— Прикладная механика, 1966, 2, 2.
2. Каминский А. А.— Прикладная механика, 1971, 7, 12.
3. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. «Наука», М., 1966.
4. Панасюк В. В., Бережницкий Л. Т.— ФХММ, 1965, 1, 4.
5. Прусов И. А. Некоторые задачи термоупругости. Изд-во Белорусского ун-та, Минск, 1972.
6. Савин Г. Н. Распределение напряжений около отверстий. «Наукова думка», К., 1968.
7. Bowie O. L.— J. Math. and Phys., 1956, 45, 1.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию в декабре 1973 г.

## ТЕРМОУПРУГОЕ СОСТОЯНИЕ ПЛОСКОСТИ С КРУГОВОЙ ЛУНОЧКОЙ

Г. С. Махар

Рассмотрим упругую плоскость, ослабленную теплоизолированной полостью, имеющую форму луночки, образованной пересечением дуг двух окружностей разных радиусов. Пусть на бесконечности задано температурное поле

$$t_{\infty} = q(x \cos \varphi + y \sin \varphi),$$

обусловленное однородным тепловым потоком плотности  $q$ , направленным под углом  $\varphi$  к оси  $Ox$ . Определим возмущение температурного поля в окрест-