$$-\frac{a_0p^2\pi^2}{(a_0^2p^4\pi^4+h^4\omega_1^2)}\Bigg]\Bigg[h^4\exp\left\{-\frac{a_0p^2\pi^2\tau}{h^2}\left(\omega_1\sin\omega_1\tau-\frac{a_0p^2\pi^2}{h^2}\cos\omega_1\tau\right)+\right.$$

$$\left.+a_0p^2\pi^2h^2\Bigg]\right\}. \qquad (21)$$

Таким образом, если начальная температура, подводящий тепловой поток к одной из плоскостей и коэффициент теплопроводности пластины представляются заданными некоррелированными стационарными стохастическими процессами, то, как видно из выражений (19) — (21), нахождение математических ожиданий соответствующих температурных полей сводится к вычислению суммы определенных интегралов. Если между функциями $\chi_1(\tau)$, $\chi_2(x)$, $\chi_3(\tau)$ имеется корреляция, то ход решения остается прежним, однако окончательные расчетные формулы для математического ожидания усложняются, поскольку необходимо учитывать корреляционные функции связи между функциями $\chi_1(\tau)$, $\chi_2(x)$, $\chi_3(\tau)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин В. В. Статистические методы в строительной механике. Стройиздат, М., 1961.
2. Лыков А. В. Теория теплопроводности. «Высшая школа», М., 1967.
3. Свешников А. А. Прикладные методы теории случайных функций. «Наука», М., 1963.
4. Снеддон М. Преобразования Фурье. ИЛ, М., 1955.

Львовский филиал математической физики
Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию
в октябре 1974 г.

ТЕМПЕРАТУРНЫЕ ПОЛЯ В ПЛАСТИНКАХ С НЕРАВНОМЕРНОЙ НАЧАЛЬНОЙ ТЕМПЕРАТУРОЙ

В. Л. Лозбень

Рассмотрим бесконечную пластинку, через поверхности которой $z=\pm\delta$ осуществляется теплообмен с внешней средой по закону Ньютона. В начальный момент времени $\tau=0$ температура пластинки является произвольной функцией координат ее срединной плоскости $z=0$, т. е.

$$t\,|_{\tau=0}=t_H(x,\,y). \qquad (1)$$

Для определения возникающего при охлаждении пластинки температурного поля воспользуемся уравнением теплопроводности [2]

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial z^2}=\frac{1}{a}\frac{\partial t}{\partial\tau} \qquad (2)$$

при таких граничных условиях:

$$\lambda\frac{\partial t}{\partial z}\pm\alpha(t-t_c)=0,\quad z=\pm\delta, \qquad (3)$$

где a, λ, α — соответственно коэффициенты температуропроводности, теплопроводности и теплоотдачи.

Общее решение краевой задачи (1) — (3) при $\alpha=\mathrm{const}$ с помощью интегральных преобразований Фурье и Лапласа находим в виде

$$t=t_c[1-\Psi(z,\tau)]+\Psi(z,\tau)\,\Theta(x,y,\tau), \qquad (4)$$

где [2]

$$\Psi(z,\tau)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\mu_n\cos\mu_n\frac{z}{\delta}}{\mu_n+\sin\mu_n\cos\mu_n}\exp\left\{-\mu_n^2\frac{a\tau}{\delta^2}\right\},$$

μ_n — корни характеристического уравнения

$$\operatorname{ctg}\mu = \frac{\mu}{\mathrm{Bi}}, \quad \mathrm{Bi} = \frac{a\tau}{\delta^2}, \tag{5}$$

а

$$\Theta(x, y, \tau) = \frac{1}{4a\pi\tau}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} t_H(x_0, y_0)\exp\left\{-\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{4a\tau}\right\}dx_0dy_0 \tag{6}$$

определяется начальным распределением температуры t_H.

Приведем несколько примеров, представляющих интерес для теории закалки.

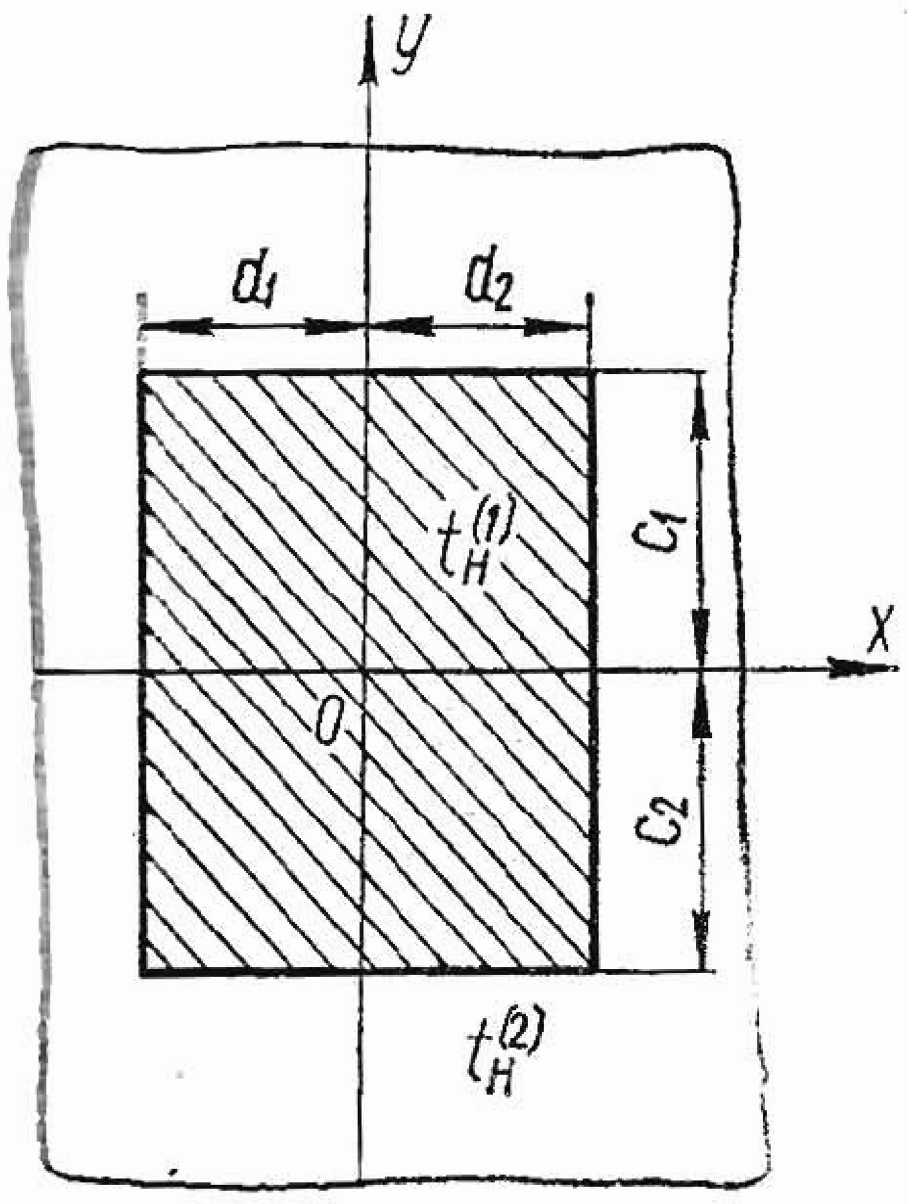

Рис. 1

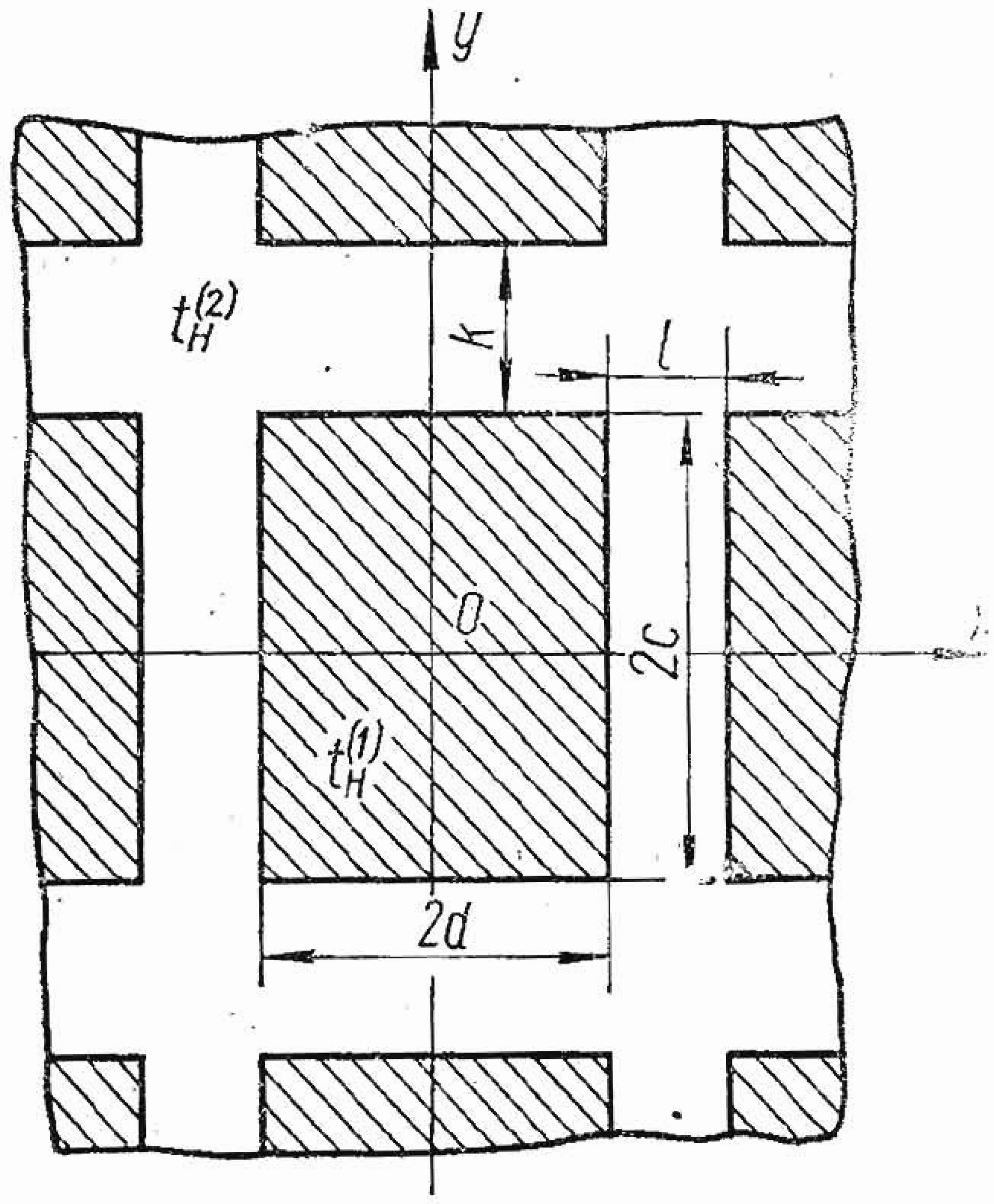

Рис. 2

Пусть в прямоугольнике $-d_2 \leqslant x \leqslant d_1$, $-c_2 \leqslant y \leqslant c_1$ (рис. 1) начальная температура равна $t_H^{(1)}$, вне его — $t_H^{(2)}$, т. е.

$$t_H = t_H^{(2)} + t_p[S(x+d_2) - S(x-d_1)][S(y+c_2) - S(y-c_1)], \tag{7}$$

где $t_p = t_H^{(1)} - t_H^{(2)}$, $S(u)$ — симметричная единичная функция [1]. Подставляя выражение (7) в формулу (6), получаем

$$\Theta(x, y, \tau) = t_H^{(2)} + \frac{t_p}{4}\left[\operatorname{erf}\left(\frac{x+d_2}{2\sqrt{a\tau}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x-d_1}{2\sqrt{a\tau}}\right)\right]\left[\operatorname{erf}\left(\frac{y+c_2}{2\sqrt{a\tau}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{y-c_1}{2\sqrt{a\tau}}\right)\right]. \tag{8}$$

Для полосы $-d_2 \leqslant y \leqslant d_1$ из соотношения (8), полагая $c_1 \to \infty$, $c_2 \to \infty$, находим

$$\Theta(x, \tau) = t_H^{(2)} + \frac{t_p}{2}\left[\operatorname{erf}\left(\frac{x+d_2}{2\sqrt{a\tau}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x-d_1}{2\sqrt{a\tau}}\right)\right]. \tag{9}$$

Аналогично для полуплоскости $x > 0$ из выражения (9) при $d_2 = 0$, $d_1 \to \infty$ получаем

$$\Theta(x, \tau) = t_H^{(2)} + \frac{t_p}{2}\operatorname{erfc}\left(-\frac{x}{2\sqrt{a\tau}}\right), \tag{10}$$

где $\operatorname{erfc}(-u) = 1 + \operatorname{erf}(u)$.

Если начальное распределение температуры в бесконечной пластинке такое, что внутри системы симметрично расположенных прямоугольников температура равняется $t_H^{(1)}$, а на остальной части пластинки — $t_H^{(2)}$ (рис. 2), т. е.

$$t_H = t_H^{(2)} + t_p\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{M}[S(x_-) - S(x_+)][S(y_-) - (S(y_+)], \tag{11}$$

где

$$x_\pm = x - nl - (2n \pm 1)\,d, \quad y_\pm = y - mk - (2m \pm 1)\,c,$$
$$N = \pm 1, \pm 2, \ldots, \qquad M = \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

то

$$\Theta(x, y, \tau) = t_H^{(2)} + \frac{t_p}{4} \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=0}^{M} \left[\operatorname{erf}\left(\frac{x_-}{2\sqrt{a\tau}}\right) - \right.$$
$$\left. - \operatorname{erf}\left(\frac{x_+}{2\sqrt{a\tau}}\right)\right]\left[\operatorname{erf}\left(\frac{y_-}{2\sqrt{a\tau}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{y_+}{2\sqrt{a\tau}}\right)\right]. \tag{12}$$

Для осесимметричного распределения начальной температуры решение (4) принимает вид

$$t = t_c\,[1 - \Psi(z, \tau)] + \Psi(z, \tau)\,\Theta(r, \tau), \tag{13}$$

где

$$\Theta(r, \tau) = \frac{1}{2a\tau} \int_0^\infty t_H(r_0) \exp\left\{-\frac{r^2 + r_0^2}{4a\tau}\right\} r_0 I_0\left(\frac{rr_0}{2a\tau}\right) dr_0, \tag{14}$$

$I_0(\xi)$ — модифицированная функция Бесселя нулевого порядка. В частности при $t_H(r) = t_H^{(2)} + t_p S(R - r)$

$$\Theta(r, \tau) = t_H^{(2)} + \frac{t_p}{2a\tau} \int_0^R \exp\left\{-\frac{r^2 + r_0^2}{4a\tau}\right\} r_0 I_0\left(\frac{rr_0}{2a\tau}\right) d\tau_0 =$$
$$= t_H^{(2)} + t_p \exp\left\{-\frac{r^2}{4a\tau}\right\} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^{2k}}{(k!)^2} (4a\tau)^{-k} \gamma\left(k + 1, \frac{R^2}{4a\tau}\right), \tag{15}$$

$\gamma(\xi, \eta)$ — неполная гамма-функция.

Рассмотрим полубесконечную пластинку, через поверхности которой $z = \pm\delta$ осуществляется теплообмен с внешней средой по закону Ньютона, а на краевой поверхности $x = 0$ задается постоянный тепловой поток плотности $q = \text{const}$. Для определения возникающего при охлаждении пластинки температурного поля воспользуемся уравнением теплопроводности (2) при начальном условии (1), граничных условиях на боковых поверхностях (3) и граничном условии на краевой поверхности

$$\lambda \left.\frac{\partial t}{\partial x}\right|_{x=0} = q. \tag{16}$$

Общее решение краевой задачи теплопроводности (1) — (3), (16) при $\alpha = \text{const}$ с помощью косинус-преобразования Фурье по x, преобразований Фурье по y и преобразования Лапласа по τ находим в виде

$$t = \frac{q}{\lambda}\left\{\frac{2x}{\sqrt{\pi\alpha}}\,\Gamma\left(-\frac{1}{2}, \frac{x^2}{4a\tau}\right) - \frac{\delta}{\alpha\mu_n} \exp\left\{-\frac{\mu_n x}{\delta}\right\} + \right.$$
$$+ \frac{\delta\Psi(z, \tau)}{2\alpha\mu_n} \exp\left\{-\mu_n^2 \frac{a\tau}{\delta^2}\right\}\left[\exp\left\{-\frac{\mu_n x}{\delta}\right\} \operatorname{erfc}\left(\frac{\frac{\mu_n}{\delta} - \frac{x}{2}}{\sqrt{a\tau}}\right) + \right.$$
$$\left. + \exp\left\{\frac{\mu_n x}{\delta}\right\} \operatorname{erfc}\left(\frac{\frac{\mu_n}{\delta} + \frac{x}{2}}{\sqrt{a\tau}}\right)\right] - \sqrt{a}\left[2\sqrt{\frac{\tau}{\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{4a\tau}\right) - \right.$$
$$\left.\left. - \frac{x}{\sqrt{a}} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{a\tau}}\right)\right]\right\} + t_c \frac{1 - \Psi(z, \tau)}{\pi\alpha} + \left(1 - \frac{1 + \Psi(z, \tau)}{\alpha}\right) \Theta(x, y, \tau), \tag{17}$$

где

$$\Theta(x, y, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \tilde{t}_H(\xi, \eta) \exp\{-i\eta y - a(\xi^2 + \eta^2)\tau\} \cos \xi x\, d\xi\, d\eta, \tag{18}$$

$\Gamma(\xi, \eta)$ — неполная гамма-функция.

Как видно, решение (17) состоит из трех слагаемых, первое зависит от плотности теплового потока q, второе — от температуры среды, третье — от распределения температуры в начальный момент времени.

Рассмотрим следующие примеры. Пусть в прямоугольнике $d_2 \leqslant x \leqslant d_1$, $-c_2 \leqslant y \leqslant c_1$ (рис. 3) начальная температура равна $t_H^{(1)}$, а вне его — $t_H^{(2)}$, т. е.

$$t_H(x, y) = t_H^{(2)} + t_p [S(x-d_2) - S(x-d_1)] [S(y+c_2) - S(y-c_1)]. \quad (19)$$

Подставим выражение (19) в соотношение (18). Воспользовавшись теоремой о свертке для преобразований Фурье и косинус-преобразования Фурье [3], находим

$$\Theta(x, y, \tau) = t_H^{(2)} + \frac{t_p}{4}\left[\operatorname{erf}\left(\frac{x+d_1}{2\sqrt{a\tau}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x+d_2}{2\sqrt{a\tau}}\right) + \right.$$
$$\left. + \operatorname{erf}\left(\frac{x-d_2}{2\sqrt{a\tau}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x-d_1}{2\sqrt{a\tau}}\right)\right]\left[\operatorname{erf}\left(\frac{y+c_2}{2\sqrt{a\tau}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{y-c_1}{2\sqrt{a\tau}}\right)\right]. \quad (20)$$

Полагая в (20) $d_2 = 0$, $d_1 \to \infty$ для полуполосы $-c_2 \leqslant y \leqslant c_1$, параллельной оси Ox, получаем

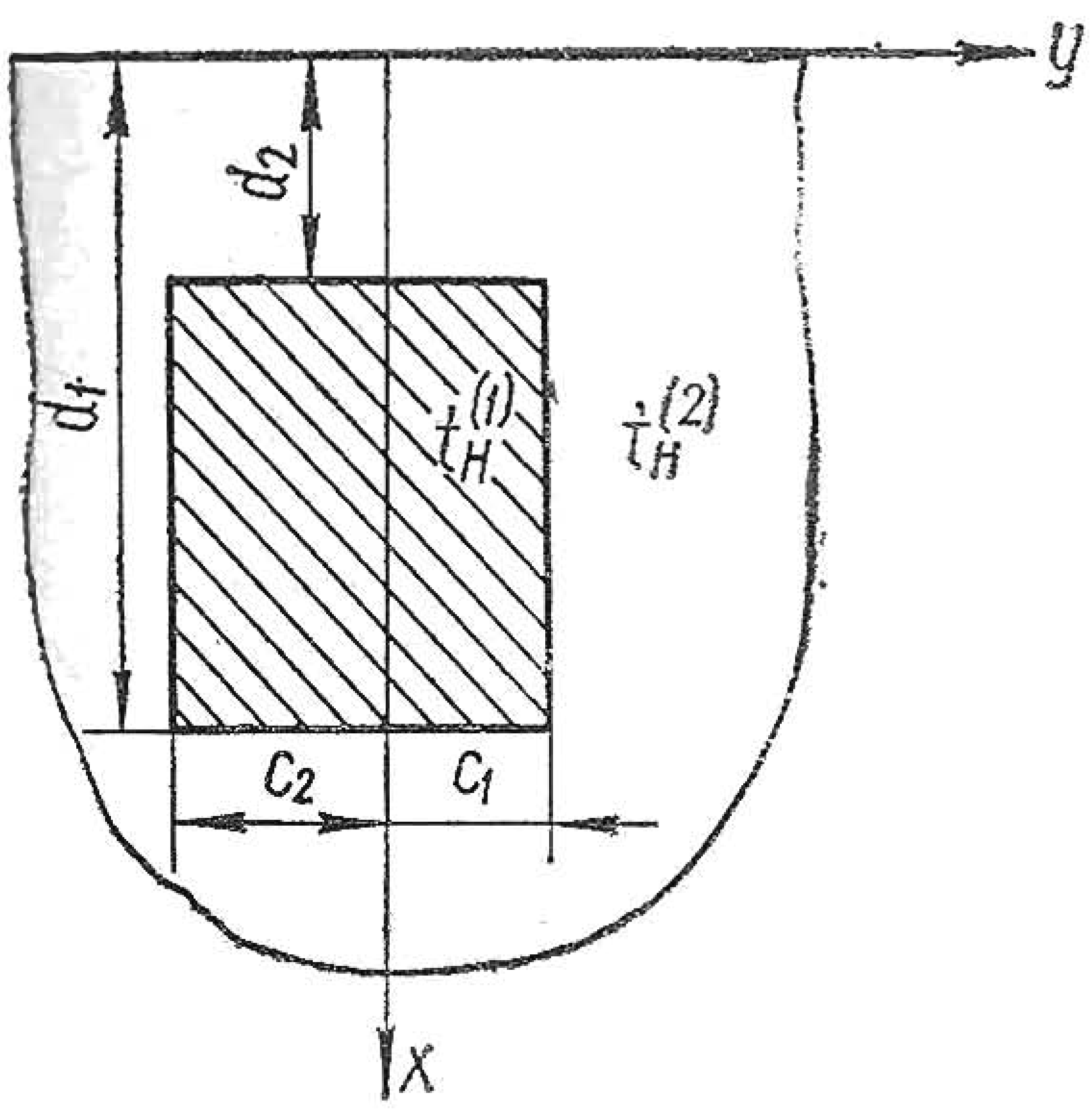

Рис. 3

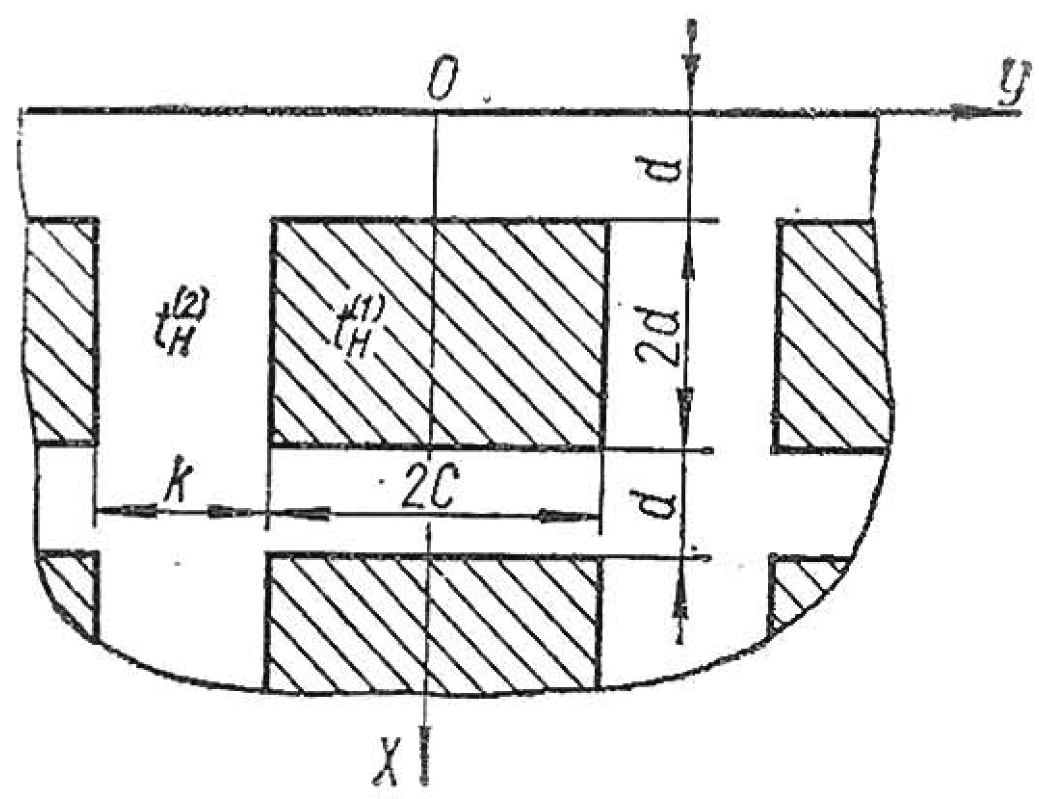

Рис. 4

$$\Theta(y, \tau) = t_H^{(2)} + \frac{t_p}{2}\left[\operatorname{erf}\left(\frac{y+c_2}{2\sqrt{a\tau}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{y-c_1}{2\sqrt{a\tau}}\right)\right]. \quad (21)$$

Для клинообразной области из выражения (21) при $c_2 = 0$, $c_1 \to \infty$ получаем

$$\Theta(y, \tau) = t_H^{(2)} + \frac{t_p}{2}\left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{y}{2\sqrt{a\tau}}\right)\right]. \quad (22)$$

Для полосы, параллельной оси Oy, из соотношения (20) при $d_2 = 0$, $c_1 \to \infty$, $c_2 \to \infty$ следует, что

$$\Theta(x, \tau) = t_H^{(2)} + \frac{t_p}{2}\left[\operatorname{erf}\left(\frac{x+d_1}{2\sqrt{a\tau}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x-d_1}{2\sqrt{a\tau}}\right)\right]. \quad (23)$$

Для полуполосы из (20) при $d_2 = 0$, $c_2 = 0$, $c_1 \to \infty$ находим

$$\Theta(x, y, \tau) = t_H^{(2)} + \frac{t_p}{4}\left[\operatorname{erf}\left(\frac{x+d_1}{2\sqrt{a\tau}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x-d_1}{2\sqrt{a\tau}}\right)\right]\operatorname{erfc}\left(-\frac{y}{2\sqrt{a\tau}}\right). \quad (24)$$

Аналогично для полосы, параллельной оси Oy, полагая в соотношении (20) $c_1 \to \infty$, $c_2 \to \infty$, записываем

$$\Theta(x, \tau) = t_H^{(2)} + \frac{t_p}{2}\left[\operatorname{erf}\left(\frac{x+d_1}{2\sqrt{a\tau}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x+d_2}{2\sqrt{a\tau}}\right) + \right.$$
$$\left. + \operatorname{erf}\left(\frac{x-d_2}{2\sqrt{a\tau}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x-d_1}{2\sqrt{a\tau}}\right)\right]. \quad (25)$$

Полагая в (20) $c_1 = c_2 = c$, $d_1 - d_2 = 2c$, для квадратной области получаем

$$\Theta(x, y, \tau) = t_H^{(2)} + \frac{t_p}{4}\left[\operatorname{erf}\left(\frac{x+2c+d_2}{2\sqrt{a\tau}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x+d_2}{2\sqrt{a\tau}}\right) + \right.$$
$$\left. + \operatorname{erf}\left(\frac{x-d_2}{2\sqrt{a\tau}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x-2c-d_2}{2\sqrt{a\tau}}\right)\right]\left[\operatorname{erf}\left(\frac{y+c}{2\sqrt{a\tau}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{y-c}{2\sqrt{a\tau}}\right)\right]. \quad (26)$$

Если начальное распределение температуры в полубесконечной пластинке такое, что внутри системы симметрично расположенных прямоугольников температура равняется $t_H^{(1)}$, а вне их — $t_H^{(2)}$ (рис. 4), т. е.

$$t_H(x,\ y) = t_H^{(2)} + t_p \sum_{m=0}^{M} \sum_{n=0}^{N} \{[S(x_-^-) - S(x_+^-)]\,[S(y_-) - S(y_+)]\}, \qquad (27)$$

где $x_\pm^+ = x + nl + (2n + 2 \pm 1)\,d, \quad x_\pm^- = x - nl - (2n + 2 \pm 1)\,d,$

$$y_\pm = y - mk - (2m \pm 1)\,c,$$

$$M = \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \ldots,\ N = +1,\ +2,\ +3,\ \ldots,$$

то

$$\Theta(x,\ y,\ \tau) = t_H^{(2)} + \frac{t_p}{4} \sum_{m=0}^{M} \sum_{n=0}^{N} \left[\operatorname{erf}\left(\frac{x_+^+}{2\sqrt{a\tau}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x_-^+}{2\sqrt{a\tau}}\right) + \right.$$

$$\left. + \operatorname{erf}\left(\frac{x_-^-}{2\sqrt{a\tau}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x_+^-}{2\sqrt{a\tau}}\right)\right]\left[\operatorname{erf}\left(\frac{y_-}{2\sqrt{a\tau}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{y_+}{2\sqrt{a\tau}}\right)\right]. \qquad (28)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. К о р н Г., К о р н Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. «Наука», М., 1968.
2. Л ы к о в А. В. Теория теплопроводности. «Высшая школа», М., 1967.
3. С н е д д о н И. Преобразование Фурье. ИЛ, М., 1955.

Львовский филиал математической физики
Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию
в ноябре 1974 г.

ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПАНЕЛИ ПРИ ВНЕЗАПНОМ НАГРЕВЕ

Р. Н. Швец, В. М. Флячок

Рассмотрим термоупругие колебания прямоугольной в плане трансверсально-изотропной цилиндрической панели толщины $2h$, длины l, с углом раствора β_0 и радиусом кривизны R, срединная поверхность которой отнесена к ортогональным безразмерным координатам α_1, α_2. Пусть поверхность $z = h$ рассматриваемой оболочки подвергается внезапному тепловому воздействию среды, температура которой мгновенно повышается до значения t_0. Между средой и поверхностью оболочки происходит конвективный теплообмен. На краях $\alpha_1 = 0$, l_1 $\left(l_1 = \frac{l}{R}\right)$ поддерживается нулевая температура, края $\alpha_2 = 0$, β_0 и поверхность $z = -h$ оболочки предполагаются теплоизолированными. При указанных условиях теплообмена нестационарное температурное поле описывается уравнением [1]

$$k^2 \frac{\partial^2 t}{\partial \alpha_1^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial \zeta^2} + k \frac{\partial t}{\partial \zeta} = \frac{1}{4} \frac{\partial t}{\partial \tau}, \qquad (1)$$

которое учитывает кривизну оболочки. Здесь $\tau = \frac{a\tau_1}{4h^2}$, $k = \frac{h}{R}$, $\zeta = \frac{z}{h}$, τ_1 — время, t — приращение температуры, a — коэффициент температуропроводности.

Применяя конечное синус-преобразование Фурье по переменной α_1 и преобразование Лапласа по переменной τ при однородном начальном условии и граничных условиях

$$\begin{aligned} &\frac{\partial t}{\partial \zeta} + \gamma (t - t_0) = 0 && \text{при} \quad \zeta = 1, \\ &\frac{\partial t}{\partial \zeta} = 0 && \text{при} \quad \zeta = -1 \text{ и } \alpha_2 = 0,\ \beta_0, \\ &t = 0 && \text{при} \quad \alpha_1 = 0,\ l_1, \end{aligned} \qquad (2)$$