

Если начальное распределение температуры в полубесконечной пластинке такое, что внутри системы симметрично расположенных прямоугольников температура равняется $t_H^{(1)}$, а вне их — $t_H^{(2)}$ (рис. 4), т. е.

$$t_H(x, y) = t_H^{(2)} + t_p \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N \{ [S(x^-) - S(x_+)] [S(y_-) - S(y_+)] \}, \quad (27)$$

где $x_{\pm}^+ = x + nl + (2n + 2 \pm 1)d$, $x_{\pm}^- = x - nl - (2n + 2 \pm 1)d$,
 $y_{\pm} = y - mk - (2m \pm 1)c$,

$$M = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, N = +1, +2, +3, \dots,$$

то

$$\Theta(x, y, \tau) = t_H^{(2)} + \frac{t_p}{4} \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N \left[\operatorname{erf} \left(\frac{x_{\pm}^+}{2\sqrt{a\tau}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{x_{\pm}^-}{2\sqrt{a\tau}} \right) + \right. \\ \left. + \operatorname{erf} \left(\frac{x_{\pm}^-}{2\sqrt{a\tau}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{x_{\pm}^+}{2\sqrt{a\tau}} \right) \right] \left[\operatorname{erf} \left(\frac{y_-}{2\sqrt{a\tau}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{y_+}{2\sqrt{a\tau}} \right) \right]. \quad (28)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. «Наука», М., 1968.
2. Лыков А. В. Теория теплопроводности. «Высшая школа», М., 1967.
3. Снеддон И. Преобразование Фурье. ИЛ, М., 1955.

Львовский филиал математической физики
 Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию
 в ноябре 1974 г.

ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПАНЕЛИ ПРИ ВНЕЗАПНОМ НАГРЕВЕ

Р. Н. Швец, В. М. Флячок

Рассмотрим термоупругие колебания прямоугольной в плане трансверсально-изотропной цилиндрической панели толщины $2h$, длины l , с углом раствора β_0 и радиусом кривизны R , срединная поверхность которой отнесена к ортогональным безразмерным координатам α_1, α_2 . Пусть поверхность $z = h$ рассматриваемой оболочки подвергается внезапному тепловому воздействию среды, температура которой мгновенно повышается до значения t_0 . Между средой и поверхностью оболочки происходит конвективный теплообмен. На краях $\alpha_1 = 0, l_1$ ($l_1 = \frac{l}{R}$) поддерживается нулевая температура, края $\alpha_2 = 0, \beta_0$ и поверхность $z = -h$ оболочки предполагаются теплоизолированными. При указанных условиях теплообмена нестационарное температурное поле описывается уравнением [1]

$$k^2 \frac{\partial^2 t}{\partial \alpha_1^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial \alpha_2^2} + k \frac{\partial t}{\partial \zeta} = \frac{1}{4} \frac{\partial t}{\partial \tau}, \quad (1)$$

которое учитывает кривизну оболочки. Здесь $\tau = \frac{a\tau_1}{4h^2}$, $k = \frac{h}{R}$, $\zeta = \frac{z}{h}$, τ_1 — время, t — приращение температуры, a — коэффициент теплопроводности.

Применяя конечное синус-преобразование Фурье по переменной α_1 и преобразование Лапласа по переменной τ при однородном начальном условии и граничных условиях

$$\frac{\partial t}{\partial \zeta} + \gamma(t - t_0) = 0 \quad \text{при } \zeta = 1, \\ \frac{\partial t}{\partial \zeta} = 0 \quad \text{при } \zeta = -1 \text{ и } \alpha_2 = 0, \beta_0, \\ t = 0 \quad \text{при } \alpha_1 = 0, l_1, \quad (2)$$

температурное поле в оболочке

$$t(\alpha_1, \zeta, \tau) = \frac{4t_0\gamma}{\pi} e^{\frac{k}{2}(1-\zeta)} \sum_{n=1,3}^{\infty} \frac{\sin \lambda_n \alpha_1}{n} \times$$

$$\times \left\{ \frac{1}{E_n} \left[s_n \operatorname{ch} \frac{s_n}{2} (1 + \zeta) + k \operatorname{sh} \frac{s_n}{2} (1 + \zeta) \right] - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2\beta_j^3}{(s_n^2 + \beta_j^2) A_j} \times \right.$$

$$\left. \times \left[\cos \frac{\beta_j}{2} (1 + \zeta) + \frac{k}{\beta_j} \sin \frac{\beta_j}{2} (1 + \zeta) \right] e^{-(s_n^2 + \beta_j^2)\tau} \right\}. \quad (3)$$

$$A_j = [\beta_j^2 (1 + \gamma) - k(k - \gamma)] \sin \beta_j + \beta_j [\beta_j^2 + k(k - \gamma)] \cos \beta_j,$$

$$E_n = s_n \gamma \operatorname{ch} s_n + (\gamma k + 4k^2 \lambda_n^2) \operatorname{sh} s_n, \quad \lambda_n = \frac{\pi n}{l_1},$$

$\beta_j = k^2 (1 + 4\lambda_n^2)$, β_j — корни уравнения $\operatorname{tg} \beta = \frac{\gamma \beta}{\beta^2 + k(k - \gamma)}$, γ — относи-

тельный коэффициент теплоотдачи на поверхности $z = h$ оболочки.

Движение трансверсально-изотропных пологих цилиндрических оболочек, подвергнутых воздействию температурного поля (3), можно описать уравнениями [2—5]

$$D \nabla^4 w - R(1 - \varepsilon \nabla^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha_1^2} + \frac{a^2 \rho R}{8k^3} (1 - \varepsilon \nabla^2) \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} + \frac{(1 + \nu) DR \alpha_t}{k} \nabla^2 T_3 = 0, \quad (4)$$

$$\nabla^4 \varphi - 2hER \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1^2} + 2hER^2 \alpha_t \nabla^2 T_1 = 0,$$

$$\nabla^2 \psi - \frac{2}{(1 - \nu) \varepsilon} \psi = 0.$$

Здесь

$$T_1 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 t d\zeta, \quad T_2 = \frac{3}{2} \int_{-1}^1 t \zeta d\zeta, \quad (5)$$

$$D = \frac{2Eh^3}{3(1 - \nu^2)}, \quad \varepsilon = \frac{k^2}{3k'(1 - \nu^2)} \frac{E}{G'}, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2},$$

w — прогиб оболочки, φ — функция напряжений, ψ — функция углов поворота. E, ν — упругие характеристики оболочки в направлении α_1, α_2 ; G' — модуль сдвига в нормальных к срединной поверхности площадках, k' — коэффициент сдвига, ρ — плотность материала, α_t — коэффициент линейного расширения.

Исключая поочередно функции w и φ из первых двух уравнений системы (4), а также учитывая, что T_1 и T_2 зависят только от α_1 и τ , находим

$$\nabla^8 w + \frac{2h}{D} (1 - \varepsilon \nabla^2) \left(ER^2 \frac{\partial^4}{\partial \alpha_1^4} + \frac{a^2 \rho}{16k^4} \nabla^4 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) w -$$

$$- \frac{2hER^3 \alpha_t}{D} \left(1 - \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} \right) \frac{\partial^4 T_1}{\partial \alpha_1^4} + \frac{(1 + \nu) R \alpha_t}{k} \frac{\partial^6 T_2}{\partial \alpha_1^6} = 0, \quad (6)$$

$$\nabla^8 \varphi + \frac{2h}{D} (1 - \varepsilon \nabla^2) \left(ER^2 \frac{\partial^4}{\partial \alpha_1^4} + \frac{a^2 \rho}{16k^4} \nabla^4 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) \varphi +$$

$$+ 2hER^2 \alpha_t \left[\frac{\partial^4}{\partial \alpha_1^4} + \frac{a^2 h \rho}{8k^4 D} \left(1 - \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right] \frac{\partial^2 T_1}{\partial \alpha_1^2} +$$

$$+ 2(1 + \nu) R^3 E \alpha_t \frac{\partial^4 T_2}{\partial \alpha_1^4} = 0, \quad (7)$$

$$\nabla^2 \psi - \frac{2}{(1 - \nu) \varepsilon} \psi = 0. \quad (8)$$

Формулы для углов поворота нормали, усилий и моментов, возникающих в цилиндрической оболочке вследствие неравномерного ее нагрева, имеют вид

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= -\frac{1}{kR} \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_2} \right), \quad \gamma_2 = -\frac{1}{R} \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_1} \right), \\ N_1 &= \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha_2^2}, \quad N_2 = \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha_1^2}, \quad S_{12} = -\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2}, \\ Q_1 &= -\frac{D}{\varepsilon R^3} \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_2} \right), \quad Q_2 = -\frac{D}{\varepsilon R^3} \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_1} \right), \\ M_1 &= -\frac{D}{R^2} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha_1^2} + \nu \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha_2^2} - (1 - \nu) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} + \frac{(1 + \nu) R \alpha_t}{k} T_2 \right], \\ M_2 &= -\frac{D}{R^2} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha_2^2} + \nu \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha_1^2} + (1 - \nu) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} + \frac{(1 + \nu) R \alpha_t}{k} T_2 \right], \\ H_{12} &= -(1 - \nu) \frac{D}{R^2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} + \frac{1}{2} \nabla^2 \psi - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha_2^2} \right), \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$f = w + \varepsilon \left[\nabla^2 w - \frac{R\varepsilon}{D} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha_1^2} + \frac{a^2 \rho}{8k^3} \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} \right) + \frac{(1 + \nu) R \alpha_t}{k} T_2 \right].$$

Интегральные температурные характеристики $T_1(\alpha_1, \tau)$ и $T_2(\alpha_1, \tau)$, входящие в уравнения (6), (7), (9), согласно выражению (3) принимают вид

$$\begin{aligned} T_1(\alpha_1, \tau) &= \frac{4t_0\gamma}{\pi} \sum_{n=1,3}^{\infty} \frac{\sin \lambda_n \alpha_1}{n} \left[H_n - \sum_{j=1}^{\infty} F(\beta_j) e^{-(s_n^2 + \beta_j^2)\tau} \right], \\ T_2(\alpha_1, \tau) &= \frac{24t_0\gamma}{\pi} \sum_{n=1,3}^{\infty} \frac{\sin \lambda_n \alpha_1}{n} \left[L_n - \sum_{j=1}^{\infty} \Phi(\beta_j) e^{-(s_n^2 + \beta_j^2)\tau} \right]. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned} H_n &= \frac{1}{4k^2 \lambda_n^2 E_n} [2ks_n (\operatorname{ch} s_n - e^k) + (s_n^2 + k^2) \operatorname{sh} s_n], \\ F(\beta_j) &= \frac{2\beta_j^2 [2k\beta_j (e^k - \cos \beta_j) + (\beta_j^2 - k^2) \sin \beta_j]}{(s_n^2 + \beta_j^2) (k^2 + \beta_j^2) A_j}, \\ L_n &= \frac{1}{4k^2 \lambda_n^2 E_n} \left[s_n k (e^k + \operatorname{ch} s_n) + \frac{s_n (3k^2 + s_n^2)}{4k^2 \lambda_n^2} (e^k - \operatorname{ch} s_n) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{s_n^2 + k^2}{2} - \frac{k(3s_n^2 + k^2)}{4k^2 \lambda_n^2} \right) \operatorname{sh} s_n \right], \\ \Phi(\beta_j) &= \frac{2\beta_j^2}{(s_n^2 + \beta_j^2) (k^2 + \beta_j^2) A_j} \left[\frac{3k^2 - \beta_j^2}{k^2 + \beta_j^2} (e^k - \cos \beta_j) \beta_j - \right. \\ &\quad \left. - k\beta_j (e^k + \cos \beta_j) + \left(\frac{\beta_j^2 - k^2}{2} + \frac{k(3\beta_j^2 - k^2)}{k^2 + \beta_j^2} \right) \sin \beta_j \right]. \end{aligned}$$

Для определения однозначного решения системы (4) или (6), (7) и (8) при известных значениях температурных характеристик (10) необходимо задать соответствующие граничные и начальные условия [1, 3].

Пусть края $\alpha_2 = 0$; β_0 оболочки заземлены, а края $\alpha_1 = 0$; l_1 шарнирно оперты. Тогда

$$\begin{aligned} w = 0, \quad v = 0, \quad M_1 = 0, \quad N_1 = 0, \quad \gamma_2 = 0 \quad \text{при} \quad \alpha_1 = 0, \quad l_1; \\ w = 0, \quad u = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} = 0, \quad N_2 = 0, \quad \gamma_1 = 0 \quad \text{при} \quad \alpha_2 = 0, \quad \beta_0. \end{aligned} \quad (11)$$

Граничные условия (11) после некоторых преобразований через искомые функции ω , φ и ψ можно записать в виде

$$\omega \Big|_{\substack{\alpha_1=0, l_1 \\ \alpha_2=0, \beta_0}} = 0, \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha_1^2} \Big|_{\alpha_1=0, l_1} = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial \alpha_2} \Big|_{\alpha_2=0, \beta_0} = 0; \quad (12)$$

$$\varphi \Big|_{\substack{\alpha_1=0, l_1 \\ \alpha_2=0, \beta_0}} = 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha_1^2} \Big|_{\alpha_1=0, l_1} = 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha_2^2} \Big|_{\alpha_2=0, \beta_0} = -2hER^2 \alpha_t T_1; \quad (13)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \alpha_1} \Big|_{\alpha_1=0, l_1} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_2} \Big|_{\alpha_2=0, \beta_0} = \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\varepsilon \frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha_2^2} + \frac{(1+\nu) R \alpha_t}{k} T_2 \right). \quad (14)$$

Условия (12) будут удовлетворены, если решение уравнения (6) искать в форме [6, 7]

$$\omega(\alpha_1, \alpha_2, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \bar{\omega}_{nm}(\tau) \chi_{nm}(\alpha_2) \sin \lambda_n \alpha_1, \quad (15)$$

где $\bar{\omega}_{nm}(\tau)$ — неизвестная функция,

$$\chi_{nm} = C_{nm} \left[\frac{\delta_{nm} \sin \eta_{nm} \alpha_2 - \eta_{nm} \operatorname{sh} \delta_{nm} \alpha_2}{\delta_{nm} \sin \eta_{nm} \beta_0 - \eta_{nm} \operatorname{sh} \delta_{nm} \beta_0} - \frac{\cos \eta_{nm} \alpha_2 - \operatorname{ch} \delta_{nm} \alpha_2}{\cos \eta_{nm} \beta_0 - \operatorname{ch} \delta_{nm} \beta_0} \right],$$

$$\delta_{nm} = \sqrt{\mu_{nm}^2 + \lambda_n^2}, \quad \eta_{nm} = \sqrt{\mu_{nm}^2 - \lambda_n^2}, \quad \mu_{nm} > \lambda_n.$$

Величины μ_{nm} являются корнями трансцендентного уравнения

$$\cos \sqrt{\mu^2 - \lambda_n^2} \beta_0 \operatorname{ch} \sqrt{\mu^2 + \lambda_n^2} \beta_0 - \frac{\lambda_n^2}{\sqrt{\mu^4 - \lambda_n^4}} \times \\ \times \sin \sqrt{\mu^2 - \lambda_n^2} \beta_0 \operatorname{sh} \sqrt{\mu^2 + \lambda_n^2} \beta_0 = 1. \quad (16)$$

Неизвестные постоянные C_{nm} найдем из условия ортогональности функций $\chi_{nm}(\alpha_2)$:

$$\int_0^{\beta_0} \chi_{nm}(\alpha_2) \chi_{ni}(\alpha_2) d\alpha_2 = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq i, \\ 1 & \text{при } m = i. \end{cases} \quad (17)$$

Для определения функции $\bar{\omega}_{nm}(\tau)$ подставляем выражения (10) и (15) в уравнение (6), умножаем его на $\chi_{nm}(\alpha_2) \sin \lambda_n \alpha_1$ и интегрируем в пределах поверхности оболочки с учетом свойств ортогональности функций $\chi_{nm}(\alpha_2)$, $\sin \lambda_n \alpha_1$ и квазиортогональности $\chi_{nm}(\alpha_2)$ и ее второй производной.

Применяя интегральное преобразование Лапласа по времени к полученному уравнению на функцию $\bar{\omega}_{nm}(\tau)$ при $\omega = \dot{\omega} = 0$, находим

$$\bar{\omega}_{nm}^*(p) = \frac{K_{nm} \Omega_{nm}^2 B^4}{p^2 + \Omega_{nm}^2 B^4} \left[\frac{L_n + Q_n H_n}{p} - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\Phi(\beta_j) + Q_n F(\beta_j)}{p + s_n^2 + \beta_j^2} \right], \quad (18)$$

где p — параметр преобразования Лапласа,

$$K_{nm} = \frac{24ht_0 \gamma \alpha_t (1+\nu) \lambda_n^6 D_{nm}}{\pi n [k^2 \mu_{nm}^8 + 3(1-\nu^2)(1 - \varepsilon \mu_{nm}^2 b_{nm}) \lambda_n^4]},$$

$$Q_n = \frac{(1-\nu)(1 + \varepsilon \lambda_n^2)}{2k \lambda_n^2}, \quad B = \frac{2h}{R \sqrt{a}} \left(\frac{D}{2h\rho} \right)^{\frac{1}{4}},$$

$$D_{nm} = \int_0^{\beta_0} \chi_{nm}(\alpha_2) d\alpha_2, \quad b_{nm} = \int_0^{\beta_0} \chi_{nm}(\alpha_2) \bar{\chi}_{nm}(\alpha_2) d\alpha_2,$$

$$\bar{\chi}_{nm} = C_{nm} \left[\frac{\cos \eta_{nm} \alpha_2 + \operatorname{ch} \delta_{nm} \alpha_2}{\cos \eta_{nm} \beta_0 - \operatorname{ch} \delta_{nm} \beta_0} - \frac{\delta_{nm} \sin \eta_{nm} \alpha_2 + \eta_{nm} \operatorname{sh} \delta_{nm} \alpha_2}{\delta_{nm} \sin \eta_{nm} \beta_0 - \eta_{nm} \operatorname{sh} \delta_{nm} \beta_0} \right].$$

Величины Ω_{nm} связаны с частотами собственных колебаний ω_{nm} соотношением

$$\Omega_{nm}^2 = \frac{2h\rho R^4}{D} \omega_{nm}^2 = \frac{\mu_{nm}^4}{1 - \varepsilon\mu_{nm}^2 b_{nm}} + \frac{3(1 - \nu^2)\lambda_n^4}{k^2\mu_{nm}^4}.$$

Применяя теорему разложений к формуле (18), находим динамический прогиб цилиндрической панели

$$\begin{aligned} w(\alpha_1, \alpha_2, \tau) = & \sum_{n=1,3}^{\infty} \sum_{m=1,2}^{\infty} K_{nm} \chi_{nm}(\alpha_2) \sin \lambda_n \alpha_1 \times \\ & \times \left\{ L_n + Q_n H_n - B^4 \Omega_{nm}^2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\Phi(\beta_j) + Q_n F(\beta_j)}{(s_n^2 + \beta_j^2)^2 + B^4 \Omega_{nm}^2} \times \right. \\ & \times \left. \left[\frac{(s_n^2 + \beta_j^2)^2}{B^4 \Omega_{nm}^2} \cos B^2 \Omega_{nm} \tau + \frac{s_n^2 + \beta_j^2}{B^2 \Omega_{nm}} \sin B^2 \Omega_{nm} \tau + e^{-(s_n^2 + \beta_j^2)\tau} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (19)$$

Соответствующий квазистатический прогиб равен

$$\begin{aligned} w_s(\alpha_1, \alpha_2, \tau) = & \sum_{n=1,3}^{\infty} \sum_{m=1,2}^{\infty} K_{nm} \chi_{nm}(\alpha_2) \sin \lambda_n \alpha_1 \times \\ & \times \left\{ L_n + Q_n H_n - \sum_{j=1}^{\infty} |\Phi(\beta_j) + Q_n F(\beta_j)| e^{-(s_n^2 + \beta_j^2)\tau} \right\}. \end{aligned} \quad (20)$$

Для определения функции $\varphi(\alpha_1, \alpha_2, \tau)$ неоднородную задачу (7), (13) приведем к однородной, используя при этом свойства $\delta(\alpha_2)$ -функции Дирака [7]:

$$\begin{aligned} \nabla^8 \varphi + (1 - \varepsilon \nabla^2) \left(\frac{3(1 - \nu^2)}{k^2} \frac{\partial^4}{\partial \alpha_1^4} + \frac{1}{B^4} \nabla^4 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) \varphi + \\ + 2hER^2 \alpha_1 \left[\frac{\partial^4}{\partial \alpha_1^4} + \frac{1}{B^4} (1 - \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2}) \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right] \frac{\partial^2 T_1}{\partial \alpha_1^2} + 2(1 + \nu) ER^3 \alpha_1 \frac{\partial^4 T_2}{\partial \alpha_1^4} = \\ = -2hER^2 \alpha_1 \left[\nabla^4 + \frac{1}{B^4} (1 - \varepsilon \nabla^2) \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right] T_1 \frac{\partial}{\partial \alpha_2} [\delta(\alpha_2) - \delta(\alpha_2 - \beta_0)]; \end{aligned} \quad (21)$$

$$\varphi|_{\alpha_1=0, \alpha_2=0, \beta} = 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha_1^2}|_{\alpha_1=0, \alpha_2=0, \beta} = 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha_2^2}|_{\alpha_1=0, \alpha_2=0, \beta} = 0. \quad (22)$$

Применяя интегральное преобразование Лапласа при однородных начальных условиях и представляя решение уравнения (21) в виде

$$\varphi(\alpha_1, \alpha_2, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \bar{\varphi}_{nm}(\tau) \sin \lambda_n \alpha_1 \sin \bar{\mu}_m \alpha_2, \quad (23)$$

находим окончательное выражение для функции напряжений:

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha_1, \alpha_2, \tau) = & \sum_{n=1,3}^{\infty} \sum_{m=1,2}^{\infty} \bar{K}_{nm} \left\{ (L_n - \bar{Q}_n H_n) (\cos B^2 \bar{\omega}_{nm} \tau - 1) + \right. \\ & + B^4 \bar{\omega}_{nm} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\Phi(\beta_j) - P_{nm} F(\beta_j)}{(s_n^2 + \beta_j^2)^2 + B^4 \bar{\omega}_{nm}^2} \left[\frac{s_n^2 + \beta_j^2}{B^2 \bar{\omega}_{nm}} \sin B^2 \bar{\omega}_{nm} \tau - \right. \\ & \left. \left. - \cos B^2 \bar{\omega}_{nm} \tau + e^{-(s_n^2 + \beta_j^2)\tau} \right] \right\} \sin \lambda_n \alpha_1 \sin \bar{\mu}_m \alpha_2. \end{aligned} \quad (24)$$

Здесь

$$\bar{K}_{nm} = \frac{192I_0 \alpha_1 \gamma E h^2 R (1 + \nu)}{\pi^2 n m [k^2 \chi_{nm}^8 + 3(1 - \nu^2) \lambda_n^4 (1 + \varepsilon \chi_{nm}^2)]}, \quad \chi_{nm} = \lambda_n^2 + \bar{\mu}_m^2$$

$$P_{nm} = \bar{Q}_{nm} + \frac{(s_n^2 + \beta_j^2)^2 k}{6(1+\nu)B^4} [\kappa_{nm}^2 + \varepsilon(\lambda_n^4 + \bar{\mu}_{nm}^2 \kappa_{nm}^2)], \quad \bar{\mu}_m = \frac{\pi m}{\beta_0},$$

$$\bar{Q}_{nm} = \frac{(\lambda_n^6 + \bar{\mu}_m^2 \kappa_{nm}^4) k}{6(1+\nu)}, \quad \bar{\omega}_{nm} = \frac{\kappa_{nm}^4}{1 + \varepsilon \kappa_{nm}^2} + \frac{3(1-\nu^2)\lambda_n^4}{k^2 \kappa_{nm}^4}.$$

Функцию углов поворота ψ представим в виде ряда

$$\psi(\alpha_1, \alpha_2, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\psi}_n(\alpha_2, \tau) \cos \lambda_n \alpha_1. \quad (25)$$

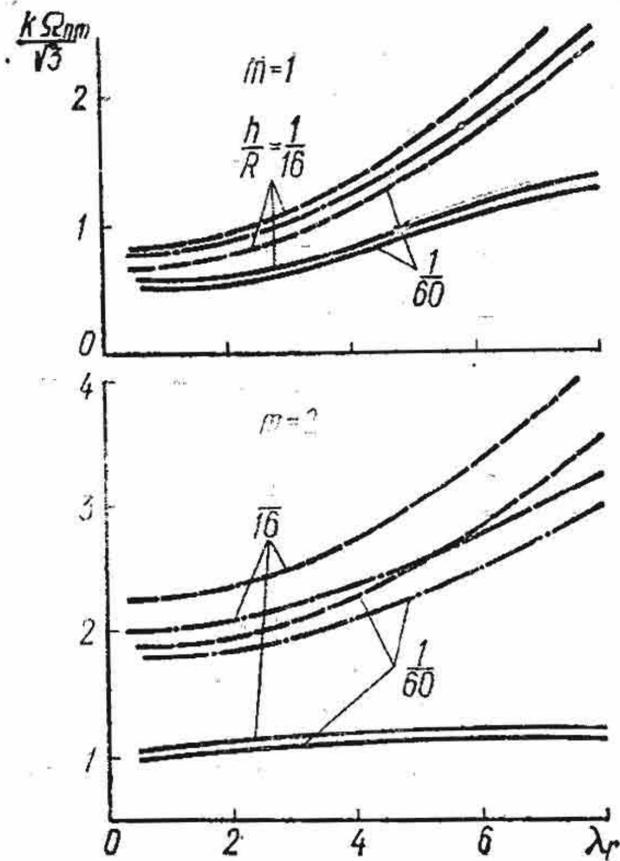


Рис. 1

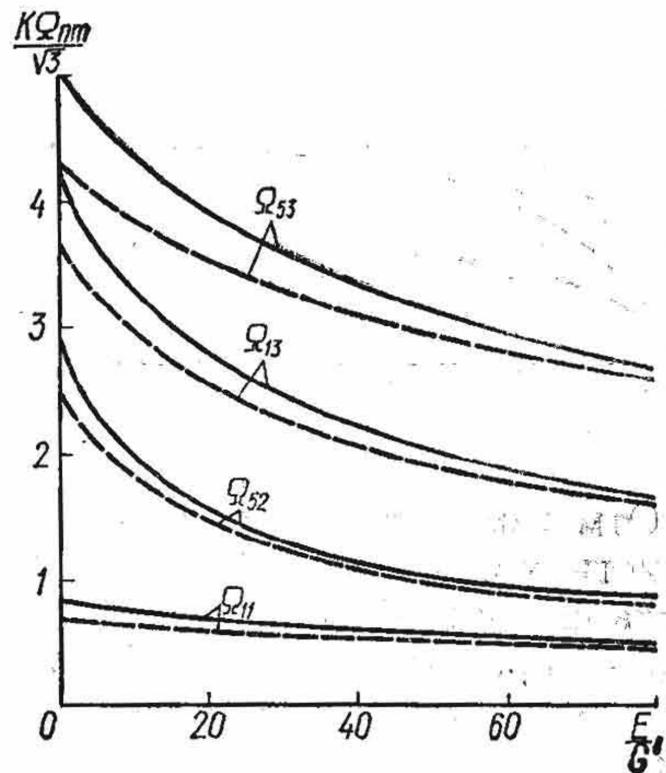


Рис. 2

Подставляя (25) в уравнение (8) и используя граничные условия (13) для нахождения постоянных интегрирования, находим функцию $\bar{\psi}_n(\alpha_2, \tau)$. В результате получаем

$$\begin{aligned} \psi(\alpha_1, \alpha_2, \tau) = \sum_{n=1,3}^{\infty} \frac{\lambda_n \cos \lambda_n \alpha_1}{r_n} \left\{ \frac{(1+\nu)\alpha_1 h}{k} T_2(\tau) \left(\text{sh } r_n \alpha_2 - \right. \right. \\ \left. \left. - \text{th } \frac{r_n \beta_0}{2} \text{ch } r_n \alpha_2 \right) + \varepsilon \sum_{m=1,2}^{\infty} \bar{\mu}_{nm}^2 \bar{\omega}_{nm}(\tau) \left[\bar{\chi}_{nm}(0) \text{sh } r_n \alpha_2 + \right. \right. \\ \left. \left. + (\bar{\chi}_{nm}(\beta_0) - \bar{\chi}_{nm}(0) \text{ch } r_n \beta_0) \frac{\text{ch } r_n \alpha_2}{\text{sh } r_n \beta_0} \right] \right\}, \quad (26) \end{aligned}$$

где

$$r_n^2 = \lambda_n^2 + \frac{2}{(1-\nu)\varepsilon}.$$

Подставляя найденные функции $w(\alpha_1, \alpha_2, \tau)$, $\varphi(\alpha_1, \alpha_2, \tau)$ и $\psi(\alpha_1, \alpha_2, \tau)$ в формулы (9), находим углы поворота нормали, компоненты динамических усилий и моментов для цилиндрической панели, обусловленных внезапным тепловым воздействием внешней среды. В пределе при $\varepsilon = 0$ из (19), (24) и (26) получаем решение задачи для изотропной оболочки на основе классической теории.

На рис. 1 показаны изменения безразмерных собственных частот $\frac{k\Omega_{nm}}{\sqrt{3}}$ в зависимости от λ_n и различных значений $\frac{h}{R}$ при $m = 1; 2$ и $k' = \frac{5}{6}$; $\beta_0 = 1$; $\nu = 0,3$. Сплошные кривые соответствуют решению для transversально-изотропного материала $\frac{E}{G'} = 40$, штрихпунктирные — для изотропного $\frac{E}{G'} = 2,6$ и штриховые линии соответствуют решению в рамках

классической теории $\frac{E}{G'} = 0$. Зависимость этих частот от степени трансверсальной изотропии материала оболочки $\left(\frac{E}{G'}\right)$ показана на рис. 2 для $\frac{h}{R} = \frac{1}{16}$ (сплошные линии), $\frac{h}{R} = \frac{1}{60}$ (штриховые) и $\frac{\pi R}{l} = 1$.

Из анализа полученных результатов и рис. 1, 2 следует, что влияние анизотропии материала на собственные частоты для защемленных вдоль прямолинейных краев оболочек больше, чем для шарнирно-опертых [2], а параметра k — меньше.

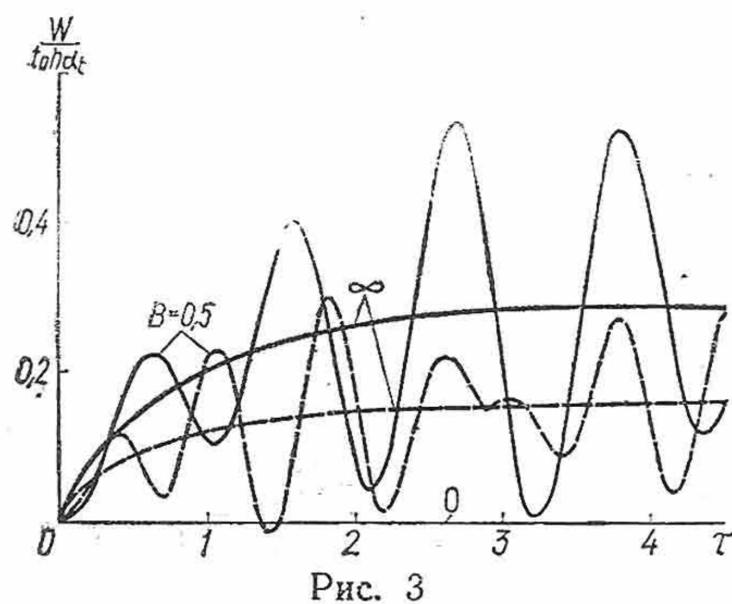


Рис. 3

Изменение безразмерного динамического прогиба $\frac{w}{t_0 h \alpha_1}$ в центре оболочки

$\left(\alpha_1 = \frac{l_1}{2}; \alpha_2 = \frac{\beta_0}{2}\right)$ в зависимости от времени τ для $B = 0,5$ приведено на рис. 3. Расчеты проведены при $\frac{E}{G'} = 40$ (сплошные линии), $\frac{E}{G'} = 2,6$ (штриховые) и $k = \frac{1}{16}$; $\beta_0 = 1$; $\frac{R}{l} = 0,2$; $\gamma = 1$; $\nu = 0,3$.

Отметим, что прогиб оболочки обусловлен интегральными характеристиками T_1, T_2 и, как видно из соотношений (19), (20), зависит от параметра инерции B , геометрических размеров оболочки, частотного параметра Ω_{nm} и краевых условий. При возрастании τ квазистатический прогиб ($B = \infty$) увеличивается и, когда $\tau = \infty$, достигает установившегося состояния.

Динамическое решение колеблется около квазистатического, причем, как видно из рис. 3, пики у изотропной оболочки появляются раньше, чем у трансверсально-изотропной. Это объясняется тем, что с увеличением отношения $\frac{E}{G'}$ жесткость оболочек уменьшается, соответственно уменьшается частота колебаний и увеличивается период. Период колебаний возрастает также с убыванием параметра инерции B . В предельном случае, когда $B = 0$, период равен бесконечности и прогиб оболочки отсутствует.

Отметим, что влияние деформаций поперечного сдвига на прогибы оболочек с защемленными прямолинейными краями больше, чем в случае шарнирно-опертых краев [4, 5].

ЛИТЕРАТУРА

1. Підсирігач Я. С., Ярема С. Я., Температурні напруження в оболонках. Вид-во АН УРСР, К., 1961.
2. Флячок В. М. Про вільні коливання трансверсально-ізоотропних пологих циліндричних оболонок.— Вісн. Львівського ун-ту. Сер. мех.-мат., 1974, 9.
3. Швець Р. Н., Лунь Е. И. Некоторые вопросы теории термоупругости ортотропных оболочек с учетом инерции вращения и поперечного сдвига.— Прикладная механика, 1971, 7, 10.
4. Швець Р. Н., Флячок В. М. Динамическое поведение ортотропной цилиндрической оболочки при внезапном нагреве.— Проблемы прочности, 1975.
5. Швець Р. Н., Флячок В. М. Термоупругие колебания пологих оболочек при тепловом ударе.— В кн.: Тепловые напряжения в элементах конструкций, 15. «Наукова думка», К., 1975.
6. Nowacki W. Some problems of rectangular plates.— Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. sci. techn., 1961, 9, 4.
7. Cukić R. Transversal vibrations of the thin shell of revolution produced by the thermal shock.— Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. sci. techn., 1972, 20, 10.

Львовский филиал математической физики
Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию
в сентябре 1974 г.