максимальные растягивающие напряжения достигаются не на поверхности спая $z = 0 - 0$, а на основании $z = -\frac{l}{2}$.

Распределение температурных напряжений по толщине биметаллического слоя сталь Х18Н9Т — сталь 10 представлено на рис. 3: при $\mathrm{Bi} = 0{,}1$ — рис. 3, *а* и $\mathrm{Bi} = 1$ — рис. 3, *б*. Кривые *1—4* на рис. 3, *а* соответствуют времени $t = 1, 10, 30, \infty$ *сек*, а кривые *1—3* на рис. 3, *б* — $t = 1, 10, 30$ *сек*. Из графиков видно, что максимальные растягивающие напряжения достигаются во втором слое на поверхности контакта $z = 0 + 0$.

Проведенный анализ показывает, что для исследуемых случаев максимальные напряжения достигаются в установившемся режиме. При этом наибольшие растягивающие напряжения в случае биметаллического слоя сталь 10 — сталь Х18Н9Т при $\mathrm{Bi} = 0{,}1$ будут в составном слое для $z = 0 - 0$, при $\mathrm{Bi} = 1$ — во втором слое на основании $z = \frac{l}{2}$, а в случае биметаллического слоя сталь Х18Н9Т — сталь 10 — во втором составном слое на поверхности $z = 0 + 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бурак Я. И., Гачкевич А. Р., Колодий Б. И. Определение температурных полей и напряжений в биметаллическом слое при индукционном нагреве.— Прикладная механика, 1973, **9**, 9.
2. Григолюк Э. И. Тонкие биметаллические оболочки и пластины.— Инженерный сборник, 1953, **17**, 69.
3. Лыков А. В. Теория теплопроводности. «Высшая школа», М., 1967.
4. Подстригач Я. С., Колодий Б. И. Температурные поля и напряжения при индукционном нагреве упругого слоя.— В кн.: Тепловые напряжения в элементах конструкций, 10. «Наукова думка», К., 1970.
5. Тамм И. Е. Основы теории электричества. Гостехиздат, М., 1956.

Львовский филиал математической физики
Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию
в сентябре 1974 г.

МЕТОДИКА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТИ РАЗРУШЕНИЯ ОБОЛОЧЕК ЭЛЕКТРОВАКУУМНЫХ ПРИБОРОВ

Ю. И. Койфман, Ю. С. Токарь

Увеличение сложности и многообразия электровакуумных приборов (ЭВП), вызванные интенсивным внедрением их в различные области народного хозяйства, придает исключительное значение проблеме качества этих приборов. Машинное проектирование узлов и ЭВП в целом, позволяющее оптимизировать конструкцию, в определенной степени решает эту проблему, если при модельном описании приборов будет учтен стохастический характер протекающих в них физических процессов.

Пусть $\Omega = \{z\}$ представляет фазовое пространство значений характеристик узла прибора. С течением времени в узле происходит старение. Пусть $z(t)$ — траектория случайного процесса старения в фазовом пространстве Ω, где $\Omega_1 \subset \Omega$ — подпространство допустимых значений характеристик. Характеристики надежности узла, в частности вероятность его отказа, трактуются как функционал, определенный на каждой траектории $z(t)$. Отказ узла наступает при выходе траектории из подпространства Ω_1. На основе такого подхода ставится задача определения вероятности отказа (разрушения) оболочки ЭВП.

В любой оболочке ЭВП под действием внешних полей (силовых, температурных и др.) возникает поле напряжений, характеристики которого определяются геометрией оболочки и свойствами материала. Это поле является причиной развития очагов разрушения.

Конструкционными материалами для оболочек ЭВП служат хрупкоразрушающиеся материалы, прочность которых есть некоторая случайная величина [5], а разрушение представляет собой стохастический процесс накопления повреждений, причем время τ от момента приложения постоянной механической нагрузки σ к элементу конструкции до его разрушения удовлетворительно описывается во многих случаях предложенной С. Н. Журковым [3] температурно-временной зависимостью прочности

$$\tau = \tau_0 \exp\left\{\frac{u_0 - \gamma\sigma}{RT}\right\}, \tag{1}$$

где u_0, γ, τ_0 — константы материала.

Уравнение (1) принципиально неприменимо для области $\sigma \to 0$, так как, описывая термофлуктуационный процесс разрыва межатомных связей в твердом теле, оно не учитывает возрастающую вероятность их рекомбинации при малых напряжениях.

Ряд авторов [4] высказывают гипотезу о существовании некоторой безопасной нагрузки σ_0, к которой зависимость $\ln \tau = f(\sigma)$ асимптотически приближается, искривляясь в области малых σ. Искривление зависимости $\ln \tau = f(\sigma)$ наблюдается также в области больших напряжений, где характер разрушения, по-видимому, атермический.

Следует отметить, что описанная общая картина процесса разрушения усложнена влиянием внешней агрессивной среды и специфичностью протекания его в каждом отдельном материале. Так, на зависимость прочности стекла от времени влияет действие атмосферной влаги на дефекты в материале и гетерогенная структура стекла.

Учитывая сказанное о характере хрупкого разрушения, можно предположить, что линейному участку кривой длительной прочности, где справедлива зависимость (1), соответствуют постепенные отказы, а области больших напряжений — катастрофические.

Аппроксимируем логарифмы времени разрушения элементов оболочки ЭВП при небольших напряжениях линейной случайной функцией

$$\ln \tau = A + B(\sigma - \sigma_0), \tag{2}$$

предполагая постоянство механической нагрузки и характеристик внешней среды (температуры, влажности). Коэффициенты A и B являются случайными величинами, так как материал представляет собой систему, в элементах которой встречаются разнообразные дефекты с различным пространственным расположением. Скорости протекания процесса накопления нарушений механической прочности в различных элементах, естественно, будут отличаться в случайном смысле.

Из теории линейных случайных функций следует, что среднее значение ν_1 случайной функции $\ln \tau$ выражается через средние значения коэффициентов $\bar{A}$ и $\bar{B}$ следующим образом:

$$\nu_1 = \bar{A} + \bar{B}(\sigma - \sigma_0). \tag{3}$$

Логарифмы времен безотказной работы элементов оболочки ЭВП распределены по закону

$$G(x) = 1 - e^{\mu} e^{-\mu e^{x}} \frac{\Gamma(n, Cx^{\alpha})}{\Gamma(n)}, \tag{4}$$

$$C = \left[\frac{\Gamma(n + 1/\alpha)}{\Gamma(n)\,\nu_1}\right]^{\alpha}, \quad \Gamma(a, z) = \int_{z}^{\infty} t^{a-1} e^{-t} dt,$$

$$\Gamma(a) = \int_{0}^{\infty} t^{a-1} e^{-t} dt, \quad x = \ln(\tau + 1).$$

Если в результате статистической обработки данных об отказах элементов оболочки, испытанных на l различных уровнях напряжений, будут получены оценки параметров α, n, μ, ν_1 распределения (4), то, как вытекает из (3),

$$\sum_{i=1}^{l} [\nu_1(\sigma_i) - \overline{A} - \overline{B}(\sigma_i - \sigma_0)]^2 = \min. \quad (5)$$

Продифференцировав (5) по неизвестным $\overline{A}$ и $\overline{B}$, получим систему уравнений и определим $\overline{A}$ и $\overline{B}$.

Сравнение выражений (1) и (2) показывает, что

$$\gamma = -BRT, \quad A = \ln \tau_0 + \frac{u_0}{RT} + B\sigma_0. \quad (6)$$

Значения коэффициентов A_i и B_i, полученные по результатам исследований элементов оболочки при l значениях температуры внешней среды T_i, позволяют определить средние значения параметров материала оболочки $\overline{u}_0$, $\overline{\gamma}$ и $\overline{\tau}_0$. Для этого необходимо продифференцировать уравнения

$$\sum_{i=1}^{l} [\overline{\gamma} + \overline{B}_i RT_i]^2 = \min,$$

$$\sum_{i=1}^{l} \left[\overline{A}_i - \overline{B}_i\sigma_0 - \overline{\ln \tau_0} - \frac{\overline{u}_0}{RT_i}\right]^2 = \min \quad (7)$$

по $\overline{u}_0$, $\overline{\gamma}$, $\overline{\ln \tau_0}$ и решить полученную систему уравнений.

Все изложенные соображения предполагают постоянство параметров u_0, τ_0, γ. Однако есть основания считать [6], что показатель концентрации напряжений γ зависит от уровня напряжений. Уравнение (1) в этом случае принимает вид

$$\tau = \tau_0 \exp\left\{\frac{u_0 - \gamma(\sigma)}{RT}\right\}. \quad (8)$$

Предположим, что скорость изменения показателя концентрации напряжений γ_σ характеризуется зависимостью

$$\gamma_\sigma = \gamma_0 \left(k + e^{-\frac{\sigma}{\sigma_n}}\right), \quad (9)$$

где γ_0 — стационарное значение коэффициента γ; σ_n — напряжение, характеризующее границу линейного участка $\ln \tau = f(\sigma)$; k — коэффициент стационарности.

Учитывая зависимость (9), получаем

$$\gamma(\sigma) = \int_0^\sigma \gamma_\sigma d\sigma = \gamma_0 \left[k\sigma + \sigma_n \left(1 - e^{-\frac{\sigma}{\sigma_n}}\right)\right]. \quad (10)$$

Из уравнения (8) следует, что

$$\ln \tau = A_1 + B_0(\sigma_1 - \sigma_0), \quad (11)$$

где $A_1 = \ln \tau_0 + \frac{u_0}{RT} + B_0\sigma_0$, $\sigma_1 = k\sigma + \sigma_n\left(1 - e^{-\frac{\sigma}{\sigma_n}}\right)$, $B_0 = -\frac{\gamma_0}{RT}$.

Составим уравнение, аналогичное уравнению (5):

$$\sum_{i=1}^{l} [\nu_1(\sigma_i) - \overline{A}_1 - \overline{B}_0(\sigma_{1i} - \sigma_0)]^2 = \min. \quad (12)$$

Дифференцирование его по неизвестным $\overline{A}_1$, $\overline{B}_0$, k и σ_n приводит к системе уравнений

$$\sum_{i=1}^{l} [\nu_1(\sigma_i) - \overline{A}_1 - \overline{B}_0(\sigma_{1i} - \sigma_0)] = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{l} [\nu_1(\sigma_i) - \overline{A}_1 - \overline{B}_0(\sigma_{1i} - \sigma_0)] \left[1 - e^{-\frac{\sigma_i}{\sigma_n}} \left(1 + \frac{\sigma_i}{\sigma_n}\right)\right] = 0, \qquad (13)$$

$$\sum_{i=1}^{l} [\nu_1(\sigma_i) - \overline{A}_1 - \overline{B}_0(\sigma_{1i} - \sigma_0)](\sigma_{1i} - \sigma_0) = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{l} [\nu_1(\sigma_i) - \overline{A}_1 - \overline{B}_0(\sigma_{1i} - \sigma_0)]\sigma_i = 0,$$

решение которой можно получить, применяя численные методы. Средние значения параметров материала $\overline{\gamma}_0$, $\overline{\ln \tau_0}$ и $\overline{u}_0$ получим, решив систему, аналогичную системе (7):

$$\sum_{i=1}^{l} \left[\overline{A}_{1i} - \overline{B}_{0i}\sigma_0 - \overline{\ln \tau_0} - \frac{\overline{u}_0}{RT_i}\right] = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{l} \left[\overline{A}_{1i} - \overline{B}_{0i}\sigma_0 - \overline{\ln \tau_0} - \frac{\overline{u}_0}{RT_i}\right] \frac{1}{T_i} = 0, \quad \overline{\gamma}_0 = -\frac{R \sum_{i=1}^{l} B_{0i} T_i}{l}. \qquad (14)$$

Приведенные выражения для параметров материала оболочки ЭВП предполагают те же значения влажности окружающей среды при испытаниях элементов оболочки, что и при реальной эксплуатации прибора. Так как режимы эксплуатации или хранения могут быть различными, целесообразно найти способы расчета статистических характеристик в зависимости от заданного режима.

Для оболочек ЭВП определенного назначения имеет смысл принять стандартные условия испытаний. При этом скорость износа B является функцией влажности E и может быть разложена в ряд Тейлора в окрестности точки E_0:

$$B = \varphi(E) \approx B_s + u_1 \Delta E + \frac{1}{2} u_2 (\Delta E)^2 + \ldots, \qquad (15)$$

где B_s — скорость износа при $E = E_0$, $\Delta E = E - E_0$, $u_i = \left(\frac{d^i\varphi}{dE^i}\right)_{E=E_0}$ — чувствительность i-го порядка к влажности, E_0 — значение влажности при стандартных условиях испытаний.

Известно [2], что аппроксимирующая случайная функция случайного аргумента типа (15) на практике может применяться в довольно широком диапазоне значений ΔE, причем достаточно сохранять в разложении два-три члена.

Учитывая, что $B = -\frac{\gamma}{RT}$, и применяя к выражению (15) теоремы о числовых характеристиках случайных величин, получаем

$$\overline{\gamma} = \overline{\gamma}_s - \overline{u}_1 \Delta E. \qquad (16)$$

Здесь учтено, что при лабораторных исследованиях $\overline{\Delta E} = \Delta E$.

Числовые характеристики $\overline{\gamma}_s$ и $\overline{u}_1$ определяются по экспериментальным данным исследований элементов оболочки при l различных уровнях E. Для этого необходимо решить систему уравнений

$$\frac{\partial I}{\partial \overline{\gamma}_s} = 0, \quad \frac{\partial I}{\partial \overline{u}_1} = 0, \quad I = \sum_{i=1}^{l} [\overline{\gamma}_s - \overline{u}_1 \Delta E_i - \gamma_i]^2. \qquad (17)$$

Используя дифференциальную функцию распределения прочности конструкции в заданный момент времени t_0 [4]

$$f_{x_0}(\sigma) = D \exp\left\{-\int_N \left[\mu(e^{x_0} - 1) - \ln\frac{\Gamma(n, Cx_0^\alpha)}{\Gamma(n)}\right] dN \int_N \frac{\alpha\,|B|\,(Cx_0^\alpha)^n e^{-Cx_0^\alpha}}{\nu_1 \Gamma(n, Cx_0^\alpha)}\, dN\right\},$$

$$x_0 = \ln(t_0 + 1)$$

и соотношение (11), получаем выражение для вероятности разрушения оболочки ЭВП в заданный момент времени:

$$F_{x_0}(\sigma) = \frac{1 - \exp\left\{\int\limits_N \ln \frac{\Gamma(n, W)}{\Gamma(n, W_0)} dN\right\}}{1 - \exp\left\{\int\limits_N \ln \frac{\Gamma(n, W_1)}{\Gamma(n, W_0)} dN\right\}}, \tag{18}$$

где

$$W = \frac{Lx_0^\alpha}{\left[\overline{\ln \tau_0} + \frac{\bar{u}_0}{RT} - \frac{\bar{\gamma}_0\sigma_1^*}{RT} f(N)\right]^\alpha}, \quad W_0 = \frac{Lx_0^\alpha}{\left[\overline{\ln \tau_0} + \frac{\bar{u}_0}{RT} - \frac{\bar{\gamma}_0\sigma_0}{RT} f(N)\right]^\alpha},$$

$$W_1 = \frac{Lx_0^\alpha}{\left[\overline{\ln \tau_0} + \frac{\bar{u}_0}{RT}\right]^\alpha [1 - f(N)]^\alpha}, \quad L = \left[\frac{\Gamma(n + 1/\alpha)}{\Gamma(n)}\right]^\alpha, \quad \sigma_1^* = \sigma^* +$$

$$+ \sigma_n \left(1 - e^{-\frac{\sigma^*}{\sigma_n}}\right),$$

σ^* — эффективное напряжение, $f(N)$ — безразмерная функция координат, конкретный вид которой следует из расчета поля напряжений в конструкции данной оболочки ЭВП.

Следовательно, для определения вероятности разрушения оболочки ЭВП в заданный момент времени необходимо: провести исследования элементов оболочки в условиях равномерного поля напряжений на нескольких уровнях σ и T; определить параметры α, n, μ, ν_1 закона распределения времени безотказной работы элемента оболочки; определить параметры материала оболочки γ_s, u_0 и $\ln \tau_0$; провести расчет параметра γ_s применительно к значению влажности внешней среды при эксплуатации (хранении) оболочки ЭВП; рассчитать поле напряжений в конструкции данной оболочки.

Непосредственная экспериментальная оценка надежности оболочек различных классов ЭВП требует проведения исследований большого объема и большой длительности. Применение квазистатических методов [1], которые основаны на формулах теории вероятности и предполагают предварительное решение соответствующих детерминистических задач, позволяет, как видим, определять характеристики качества прибора, базируясь на относительно небольшом объеме экспериментального материала, полученного в результате форсированных испытаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин В. В. Статистические методы в нелинейной теории упругих оболочек.— Изв. АН СССР. ОТН, 1958, 3, 1.
2. Дружинин Г. В. Надежность систем автоматики. «Энергия», М., 1967.
3. Журков С. Н. Кинетическая концепция прочности твердых тел (термофлуктуационный механизм разрушения).— Изв. АН СССР. Неорг. материалы, 1967, 10.
4. Одинг И. А. и др. Теория ползучести и длительной прочности материалов. Металлургиздат, М., 1959.
5. Писаренко Г. С., Трощенко В. Т. Статистичні теорії міцності та їх застосування до металокерамічних матеріалів. Вид-во АН УРСР, К., 1961.
6. Регель В. Г., Санфирова Т. П., Слуцкер А. И. Об эффекте «смещение полюса» при изучении температурно-силовой зависимости долговечности.— Проблемы прочности, 1974, 2.

Львовский филиал математической физики
Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию
в ноябре 1974 г.