5. Подстригач Я. С., Осадчук В. А. Исследование напряженного состояния цилиндрических оболочек, обусловленного заданным тензором несовместных деформаций, и его приложения к определению сварочных напряжений.— ФХММ, 1968, 4, 4.

Львовский филиал математической физики
Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию
в декабре 1974 г.

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЗАДАЧИ О НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ ЗАМКНУТОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ТРЕЩИНОЙ ПРИ АНТИСИММЕТРИЧНОЙ НАГРУЗКЕ

М. М. Николишин

Задача о напряженном состоянии замкнутой бесконечной цилиндрической оболочки с трещиной, расположенной вдоль отрезка образующей $\beta = 0$, $|\alpha| \leqslant \alpha_0$, рассматривалась в работе [3]. При этом предполагалось, что напряженно-деформированное состояние оболочки без трещины симметрично относительно координатных линий $\alpha = 0$, $\beta = 0$. В данной работе рассматривается аналогичная задача для случая антисимметричной нагрузки оболочки.

Представляя компоненты тензора $\{e_{ij}\}$ геометрически малой деформации в виде

$$e_{ij} = e_{ij}^{(s)} + \overset{0}{e}_{ij} \qquad (i,\ j = \alpha,\ \beta), \tag{1}$$

где $\overset{0}{e}_{ij}$ — компоненты тензора дисторсии, $e_{ij}^{(s)}$ — компоненты тензора упругой деформации, систему уравнений в перемещениях для круговой цилиндрической оболочки в случае технической теории [1] запишем так [3]:

$$L_{k1}u + L_{k2}v + L_{k3}w = q_k \qquad (k = 1,\ 2,\ 3). \tag{2}$$

Здесь u, v, w — компоненты перемещений срединной поверхности оболочки, L_{km} — известные линейные дифференциальные операторы, q_k — функции, зависящие от осредненных по толщине оболочки компонентов тензора дисторсии $\overset{0}{\varepsilon}_j$, $\overset{0}{\varkappa}_j$ $(j = 1,\ 2,\ 3)$.

Для бесконечной оболочки решение системы уравнений (2), затухающее на бесконечности, запишем в виде

$$u^{(1)} = \sum_{j=1}^{3} L_{ju}\varphi_j + P_{ju}\psi_j,\ v^{(1)} = \sum_{j=1}^{3} L_{jv}\varphi_j + P_{jv}\psi_j,\ w^{(1)} = \sum_{j=1}^{3} L_{jw}\varphi_j + P_{jw}\psi_j. \tag{3}$$

Здесь L_{ju}, P_{ju}, L_{jv}, P_{jv}, L_{jw}, P_{jw} — линейные дифференциальные операторы порядка, не выше седьмого [3], а функции φ_j, ψ_j удовлетворяют уравнениям

$$D\varphi_j = \overset{0}{\varepsilon}_j,\ D\psi_j = \overset{0}{\varkappa}_j, \tag{4}$$

где

$$D = \nabla^2\nabla^2\nabla^2\nabla^2 + c^{-2}\frac{\partial^4}{\partial\alpha^4},\quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial\beta^2},\quad c^2 = \frac{h^2}{3(1-\nu^2)R^2},$$

R, h — соответственно радиус и полутолщина оболочки, ν — коэффициент Пуассона.

При приведенных выше предположениях о нагрузке оболочки и ориентации трещины поле дисторсии, характеризующее скачки перемещений и углов поворота, примет вид

$$\begin{gathered}\overset{0}{\varepsilon}_3(\alpha,\ \beta) = \varepsilon(\alpha)\,\delta(\beta),\ \overset{0}{\varkappa}_3(\alpha,\ \beta) = -\frac{1}{R}\varkappa(\alpha)\,\delta(\beta)\ \text{при}\ |\alpha| < \alpha_0,\\ \overset{0}{\varepsilon}_3(\alpha,\ \beta) = \overset{0}{\varkappa}_3(\alpha,\ \beta) = 0\ \text{при}\ |\alpha| \geqslant \alpha_0,\\ \overset{0}{\varepsilon}_1(\alpha,\ \beta) = \overset{0}{\varepsilon}_2(\alpha,\ \beta) = \overset{0}{\varkappa}_1(\alpha,\ \beta) = \overset{0}{\varkappa}_2(\alpha,\ \beta) = 0\ \text{при всех}\ \alpha.\end{gathered} \tag{5}$$

где $\varepsilon(\alpha) = 1/R(u^+ - u^-)$, $\varkappa(\alpha) = \theta_1^+ - \theta_1^-$, $\delta(\beta)$ — функция Дирака, θ_1 — угол поворота [4], а индексами «+» и «—» обозначены граничные значения соответствующей величины слева и справа от линии трещины (при движении вдоль положительного направления по образующей).

Подставляя выражения (5) в уравнения (4), для определения функций $\varphi_3(\alpha, \beta)$, $\psi_3(\alpha, \beta)$ получаем формулы

$$\begin{aligned}\varphi_3(\alpha, \beta) &= \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n \cos n\beta \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \varepsilon(\zeta)\,\Phi_n(\zeta-\alpha)\,d\zeta,\\ \psi_3(\alpha, \beta) &= -\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n \cos n\beta \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \varkappa(\zeta)\,\Phi_n(\zeta-\alpha)\,d\zeta.\end{aligned} \tag{6}$$

Здесь

$$\Phi_0(z) = \frac{c^2|z|^3}{12} - \frac{c^3\sqrt{2c}}{4} e^{-|z|/\sqrt{2c}}\left(\cos\frac{z}{\sqrt{2c}} + \sin\frac{|z|}{\sqrt{2c}}\right),$$

$$\Phi_n(z) = \frac{1}{L_n}\sum_{j=1}^{2}\frac{e^{-a_{jn}|z|}}{g_{jn}(a_{jn}^2 + b_{jn}^2)}[(b_{jn}C_{jn} - a_{jn}B_{jn})\cos b_{jn}z +$$

$$+ (a_{jn}C_{jn} + b_{jn}B_{jn})\sin b_{jn}|z|], \qquad n \geqslant 1,$$

$$P_{jn} = a_{jn}^2 - b_{jn}^2,\ g_{jn} = 2a_{jn}b_{jn},\ C_{1n} = (p_{2n} - p_{1n})^2 + g_{2n}^2 - g_{1n}^2,$$

$$C_{2n} = (p_{1n} - p_{2n})^2 + g_{1n}^2 - g_{2n}^2,\ B_{1n} = 2(p_{2n} - p_{1n})g_{1n},\ B_{2n} =$$

$$= 2(p_{1n} - p_{2n})g_{2n},$$

$$L_n = 2(C_{1n}^2 + B_{1n}^2),\ a_{1n,2n} = \frac{1}{2\sqrt{2c}}(\sqrt{A_n + 4cn^2} \mp 1),\ \lambda_0 = \frac{1}{2},$$

$$b_{1n,2n} = \frac{1}{2\sqrt{2c}}|\sqrt{A_n - 4cn^2} \mp 1|,\ A_n = \sqrt{1 + 16c^2n^4},\ \lambda_n = 1,\ n \geqslant 1.$$

Обозначим через u^0, v^0, w^0 перемещения в оболочке без трещины, а через $u^{(1)}$, $v^{(1)}$, $w^{(1)}$ перемещения, обусловленные полем (5), и потребуем, чтобы суммарные перемещения

$$u = u^0 + u^{(1)},\ v = v^0 + v^{(1)},\ w = w^0 + w^{(1)} \tag{7}$$

и соответствующие суммарные усилия в сечении $\beta = 0$ удовлетворяли условиям антисимметрии и свободных берегов трещины

$$\begin{aligned}&N_2(\alpha, 0) = 0,\ M_2(\alpha, 0) = 0 \quad \text{для всех } \alpha,\\ &u(\alpha, 0) = 0,\ w(\alpha, 0) = 0 \qquad \text{для } |\alpha| \geqslant \alpha_0,\\ &S(\alpha, 0) = 0,\ Q_2^*(\alpha, 0) = 0 \qquad \text{для } |\alpha| < \alpha_0,\end{aligned} \tag{8}$$

где Q_2^* — обобщенное перерезывающее усилие [4]. Полученное суммарное напряженно-деформированное состояние будет соответствовать искомому напряженному состоянию в замкнутой оболочке с трещиной.

Используя формулы (3), (6) и соотношения для определения усилий и моментов [4], а также некоторые результаты работы [2], для определения функций $\varepsilon(\alpha)$ и $\varkappa(\alpha)$ на основании (8) получаем систему интегральных уравнений

$$a_m\int_{-1}^{1}\frac{\Omega_m(\tau)}{\tau - t}\,d\tau = \pi G_m(t),\ |t| < 1 \qquad (m = 1, 2). \tag{9}$$

Здесь

$$G_m(t) = \frac{1}{1 - \lambda^2t^2}\left\{f_m(t) - \frac{\lambda}{\pi}\sum_{j=1}^{2}\int_{-1}^{1}\Omega_j(\tau)\,\psi_{mj}[\omega(\tau, t)]\,d\tau\right\},$$

$$\Omega_m(t) = \frac{F_m(t)}{1-\lambda^2 t^2}, \quad F_1(\alpha) = \frac{\partial}{\partial\alpha}\varepsilon(\alpha), \quad F_2(\alpha) = \frac{\partial}{\partial\alpha}\varkappa(\alpha),$$

$$f_1 = -\frac{1}{Eh}S_0(\alpha, 0), \quad f_2 = \frac{1}{Eh}\int Q_{20}^*(\alpha, 0)\,d\alpha + C, \quad a_1 = \frac{1}{2},$$

$$a_2 = \frac{3-2\nu-\nu^2}{2}c^2, \quad t = \frac{1}{\lambda}\operatorname{th}\frac{\alpha}{2}, \quad \tau = \frac{1}{\lambda}\operatorname{th}\frac{3}{2},$$

$$\lambda = \operatorname{th}\frac{\alpha_0}{2}, \quad \omega(\tau, t) = 2\operatorname{Arth}\frac{\lambda(\tau - t)}{1-\lambda^2\tau t},$$

S_0, Q_{20}^* — сдвигающее и обобщенное перерезывающее усилия в оболочке без трещины, C — константа интегрирования.

Функции ψ_{mj} имеют вид

$$\psi_{11}(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{z}{\operatorname{sh} z} - 1\right)\operatorname{cth}\frac{z}{2} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{n^2}{L_n}\sum_{j=1}^{2}\frac{e^{-a_{jn}|z|}}{g_{jn}}(C_{jn}^{(1)}\cos b_{jn}z\operatorname{sgn} z + \right.$$

$$\left. + C_{jn}^{(2)}\sin b_{jn}z) - \frac{1}{4}nze^{-n|z|}\right],$$

$$\psi_{12}(z) = \psi_{21}(z) = 4\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{n^2}{L_n}\sum_{j=1}^{2}\frac{e^{-a_{jn}|z|}}{g_{jn}}(B_{jn}^{(1)}\cos b_{jn}z\operatorname{sgn} z + B_{jn}^{(2)}\sin b_{jn}z)\right],$$

$$\psi_{22}(z) = c^2\left\{\frac{(1-\nu)^2}{2}\left(1 - \frac{z}{\operatorname{sh} z}\right)\operatorname{cth}\frac{z}{2} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{L_n}\frac{e^{-a_{jn}|z|}}{q_{jn}}\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times(D_{jn}^{(1)}\cos b_{jn}z\operatorname{sgn} z + D_{jn}^{(2)}\sin b_{jn}z) + (1-\nu)e^{-n|z|}\left(\frac{1-\nu}{4}nz - \operatorname{sgn} z\right)\right]\right\},$$

где

$$C_{jn}^{(1)} = -(s_{jn}C_{jn} + r_{jn}B_{jn}) + 2n^2E_{jn} - n^4B_{jn},$$

$$D_{jn}^{(1)} = 2(1-\nu)(r_{jn}E_{jn} - s_{jn}H_{jn}) - n^2(5-4\nu-\nu^2)(s_{jn}C_{jn} + r_{jn}B_{jn}) +$$

$$+ 2n^4(2-\nu-\nu^2)E_{jn} - n^6(1-\nu^2)B_{jn} + 2(1-\nu)E_{jn} - n^2B_{jn},$$

$$B_{jn}^{(1)} = -2(1-\nu)E_{jn} + n^2B_{jn}, \quad s_{jn} = 2p_{jn}g_{jn}, \quad r_{jn} = p_{jn}^2 - g_{jn}^2,$$

$$H_{jn} = g_{jn}B_{jn} - p_{jn}C_{jn}, \quad E_{jn} = p_{jn}B_{jn} + g_{jn}C_{jn},$$

$C_{jn}^{(2)}$, $D_{jn}^{(2)}$, $B_{jn}^{(2)}$ получим из выражений для $C_{jn}^{(1)}$, $D_{jn}^{(1)}$, $B_{jn}^{(1)}$, заменяя в последних C_{jn}, B_{jn}, E_{jn}, H_{jn} соответственно на B_{jn}, $-C_{jn}$, H_{jn}, $-E_{jn}$.

Аналогично можно получить систему интегральных уравнений для случая, когда трещина расположена вдоль отрезка направляющей $\alpha = 0$, $|\beta| \leqslant \beta_0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Власов В. З. Избранные труды. Т. I. Изд-во АН СССР, М., 1962.
2. Даревский В. М. Решение некоторых вопросов теории цилиндрической оболочки.— ПММ, 1952, 16, 2.
3. Осадчук В. А., Подстригач Я. С. К определению напряженного состояния в замкнутой цилиндрической оболочке и бесконечной пластине с трещинами.— МТТ, 1973, 3.
4. Підстригач Я. С., Ярема С. Я. Температурні напруження в оболонках. Вид-во АН УРСР, К., 1961.

Львовский филиал математической физики
Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию
в сентябре 1974 г.