$= 3$, $B_0 = 0$, $n = 1{,}71$, $\nu = 0{,}2$, $\nu_0 = 0{,}3$. На рис. 1 кривые *1—3* соответствуют значениям критерия $B = 0{,}25$; 0,75; 1. Из графиков видно, что с ростом теплоотдачи с боковых поверхностей пластинки напряжения уменьшаются.

ЛИТЕРАТУРА

1. Подстригач Я. С., Коляно Ю. М. Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках. «Наукова думка», К., 1972.
2. Jaeger I. C. Conduction of heat in a solid in condact with a thin lager of a good conductor.— Quart. I. Mech. appl. Math., 1955, 8, 1.

Львовский филиал математической физики
Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию
в сентябре 1974 г.

ОБ УРАВНЕНИЯХ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ ИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИН

В. А. Волос

Рассмотрим изотропную однородную пластину толщины 2δ (рисунок). Для определения температурного поля $t\ (x,\ y,\ z,\ \tau)$ в данной пластинке имеем уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial^2 t}{\partial z^2} + p^2 t = 0, \quad p^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial \tau}, \tag{1}$$

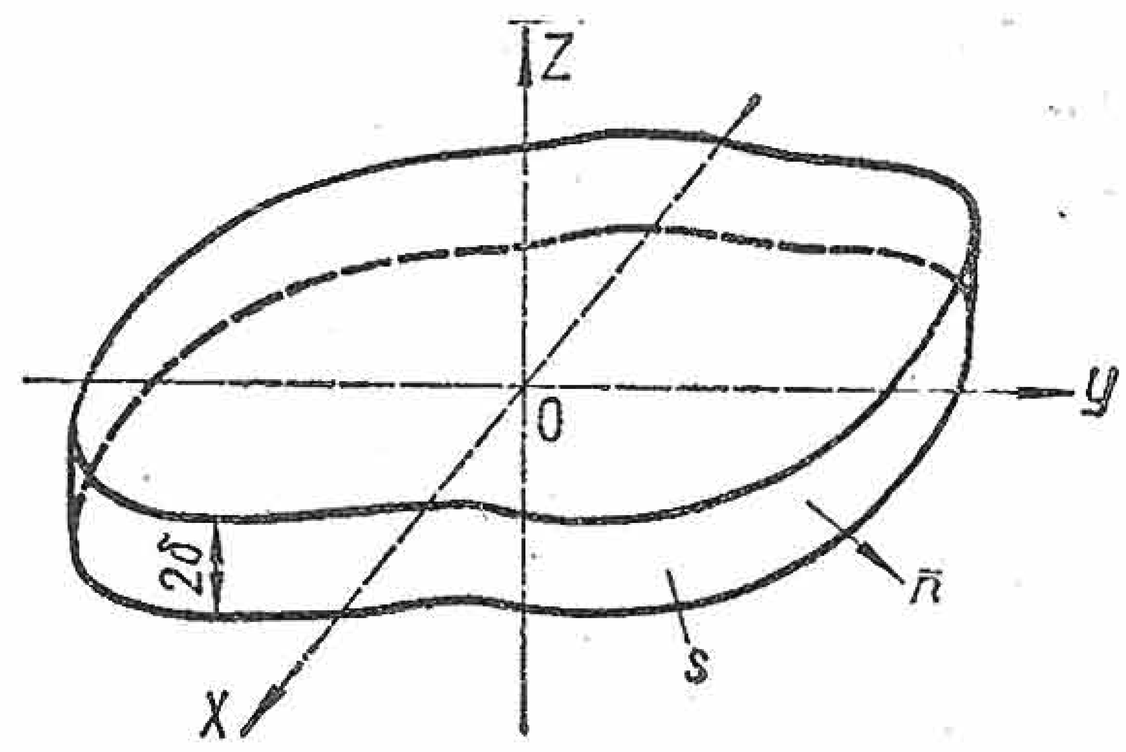
граничные условия

$$\beta^{\pm}\left(\lambda \frac{\partial t}{\partial z} \mp q^{\pm}\right) \pm \alpha^{\pm}\,(t - t_c^{\pm}) = 0 \quad \text{при } z = \pm\,\delta, \tag{2}$$

$$\beta_s\left(\lambda \frac{\partial t}{\partial n} - q_s\right) + \alpha_s\,(t - t_c^s) = 0 \quad \text{на } S \tag{3}$$

и начальное условие

$$t\ (x,\ y,\ z,\ \tau) = t_0\ (x,\ y,\ z) \quad \text{при } \tau = 0. \tag{4}$$



Здесь λ, a — коэффициенты теплопроводности и температуропроводности, $\beta^{\pm}$ — безразмерные коэффициенты; $\alpha^{\pm}$, α_s — коэффициенты теплоотдачи с поверхностей $z = \pm\,\delta$ и S пластинки; $t_c^{\pm}$, t_c^s — температуры сред, омывающих эти поверхности, τ — время.

Известно [1], что температура пластинки через ее интегральные характеристики выражается так:

$$t = \frac{p\delta \cos pz}{\sin p\delta}\, T + \frac{1}{3}\, \frac{p^2\delta^2 \sin pz}{\sin p\delta - p\delta \cos p\delta}\, T^*, \tag{5}$$

где

$$T = \frac{1}{2\delta}\int_{-\delta}^{\delta} t dz, \quad T^* = \frac{3}{2\delta^2}\int_{-\delta}^{\delta} z t dz. \tag{6}$$

Подставляя формулу (5) в (2), после некоторых преобразований для определения интегральных характеристик T и T^* получаем следующую систему дифференциальных уравнений бесконечно высокого порядка:

$$(\beta^+ + \beta^-)\,(p\delta)^2\, T - p\delta\,(\alpha^+ + \alpha^-)\,\frac{\delta}{\lambda}\,\operatorname{ctg} p\delta T - \frac{1}{3}\,\frac{(p\delta)^2}{1 - p\delta \operatorname{ctg} p\delta}\Big[(\beta^+ -$$

$$- \beta^-)\, p\delta \operatorname{ctg} p\delta + (\alpha^+ - \alpha^-)\,\frac{\delta}{\lambda}\Big]\, T^* = -\,(\beta^- q^- + \beta^+ q^+)\,\frac{\delta}{\lambda} -$$

$$- (\alpha^- t_c^- + \alpha^+ t_c^+) \frac{\delta}{\lambda},$$

$$(\beta^+ + \beta^-)(p\delta)^2 T^* - \frac{(p\delta)^2}{1 - p\delta \operatorname{ctg} p\delta} \left[(\beta^+ + \beta^-) + (\alpha^+ + \alpha^-) \frac{\delta}{\lambda} \right] \times$$
$$\times T^* + 3p\delta \left[(\beta^+ - \beta^-) p\delta + (\alpha^- - \alpha^+) \frac{\delta}{\lambda} \operatorname{ctg} p\delta \right] T =$$
$$= -3 (\beta^+ q^+ - \beta^- q^-) \frac{\delta}{\lambda} - 3 (\alpha^+ t_c^+ - \alpha^- t_c^-) \frac{\delta}{\lambda}. \quad (7)$$

Условие теплообмена (3) на поверхности пластинки и начальное условие (4) после интегрирования по z в соответствии с T и T^* запишутся так:

$$\beta_s \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial n} - q_s \right) + \alpha_s (T - T_s) = 0, \quad \beta_s \left(\lambda \frac{\partial T^*}{\partial n} - q_s^* \right) + \alpha_s (T^* - T_s^*) =$$
$$= 0 \quad \text{на } S, \quad (8)$$
$$T(x, y, z, \tau) = T_0 (x, y, z), \quad T^* (x, y, z, \tau) = T_0^* (x, y, z) \text{ при } \tau = 0,$$

где T_s, T_s^*, T_0, T_0^* — интегральные характеристики температур t_s, t_0.

Полагая в системе уравнений (7) $\beta^- = 1$, $\beta^+ = \alpha^- = 0$, $\alpha^+ = \frac{\lambda}{\delta}$, $q^+ = t_c^- = 0$, получаем уравнения теплопроводности

$$(p\delta)^2 T - p\delta \operatorname{ctg} p\delta T - \frac{1}{3} (p\delta)^2 T^* = - \frac{q}{\lambda} \delta - t_c,$$
$$(p\delta)^2 T^* - 2 \frac{(p\delta)^2}{1 - p\delta \operatorname{ctg} p\delta} T^* - 3p\delta (p\delta + \operatorname{ctg} p\delta) T = 3 \left(\frac{q\delta}{\lambda} - t_c \right), \quad (9)$$

соответствующие случаю, когда на поверхности $z = +\delta$ задается температура $t_c (x, y, \tau)$, а на поверхности $z = -\delta$ тепловой поток $q (x, y, \tau)$.

Положив в системе уравнений (7) $\beta^- = \beta^+ = 1$, $q^+ = q^- = 0$, получим уравнения теплопроводности [1] для пластин, через боковые поверхности которых осуществляется теплообмен с внешней средой по закону Ньютона. Разлагая фигурирующие в (7) операторы в ряд и сохраняя члены разложения не выше третьей степени относительно $p\delta$, получаем приближенную систему уравнений

$$\left\{ \left[(\beta^+ + \beta^-) + \frac{\alpha^+ + \alpha^-}{3} \frac{\delta}{\lambda} \right] (p\delta)^2 - \frac{\alpha^+ + \alpha^-}{\lambda} \delta \right\} T + \left\{ \left[(\alpha^- - \alpha^+) \times \right. \right.$$
$$\left. \left. \times \frac{\delta}{\lambda} + (\beta^- - \beta^+) \right] - \left[\frac{\alpha^- - \alpha^+}{15} \frac{\delta}{\lambda} + \frac{2}{5} (\beta^- - \beta^+) \right] (p\delta)^2 \right\} T^* =$$
$$= -(\beta^+ q^+ + \beta^- q^-) \frac{\delta}{\lambda} - (\alpha^+ t_c^+ + \alpha^- t_c^-) \frac{\delta}{\lambda},$$
$$\left\{ \left[\frac{\alpha^- - \alpha^+}{3} \frac{\delta}{\lambda} - (\beta^+ - \beta^-) \right] (p\delta)^2 + (\alpha^+ - \alpha^-) \frac{\delta}{\lambda} \right\} T +$$
$$+ \left\{ 2 (\beta^+ + \beta^-) - \frac{1}{15} \left[6 (\beta^+ + \beta^-) + (\alpha^+ + \alpha^-) \frac{\delta}{\lambda} \right] (p\delta)^2 \right\} T^* =$$
$$= (\beta^+ q^+ - \beta^- q^-) \frac{\delta}{\lambda} + (\alpha^+ t_c^+ - \alpha^- t_c^-) \frac{\delta}{\lambda}, \quad (10)$$

соответствующую кубическому закону распределения температуры по толщине пластинки:

$$t = \left[1 + \frac{(p\delta)^2}{6} - \frac{(pz)^2}{2} \right] T + \left[\left(1 + \frac{(p\delta)^2}{10} \right) \frac{z}{\delta} - \frac{p^2 z^3}{6\delta} \right] T^*. \quad (11)$$

Уравнения (7) дают возможность получить уравнения теплопроводности для пластин при любых комбинациях линейных граничных условий.

Полагая в системе (10) $\beta^- = 1$, $\beta^+ = \alpha^- = 0$, $\alpha^+ = \frac{\lambda}{\delta}$, $q^+ = t_c^- = 0$, получаем систему уравнений теплопроводности для случая, когда на поверхности $z = +\delta$ задается температура $t_c(x, y, \tau)$, а на поверхности $z = -\delta$ — тепловой поток:

$$\left(\frac{4}{3}(p\delta)^2 - 1\right)T - \frac{(p\delta)^2}{3}T^* = -\frac{q}{\lambda}\delta - t_c,$$
$$\left(\frac{2}{3}(p\delta)^2 + 1\right)T + \left(2 - \frac{7}{15}(p\delta)^2\right)T^* = -\frac{q}{\lambda}\delta + t_c. \tag{12}$$

Система (12) приводится к такой разрешающей системе уравнений:

$$\Lambda\Delta\varphi_i - \alpha^*\varkappa_i^+\varphi_i = C\frac{\partial\varphi_i}{\partial\tau} - Q_i,$$

где $\Lambda = 2\delta\lambda$, $C = 2\delta c_V$, $Q_i = \alpha^*\varkappa_i^+ t_c + \frac{2}{3}\varkappa_i^- q$, $\varphi_i = T + \mu_i T^*$, $\varkappa_i^- = 1 - 5\mu_i$, $\varkappa_i^+ = 1 + \frac{5}{2}\mu_i$, $\alpha^* = \frac{4\lambda}{\delta}$, $\mu_{1,2} = \frac{7 \pm 2\sqrt{31}}{15}$, $i = 1, 2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Подстригач Я. С., Коляно Ю. М. Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках. «Наукова думка», К., 1972.

Львовский филиал математической физики
Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию
в сентябре 1974 г.

О ДИФФУЗИОННОМ ПРОНИКНОВЕНИИ РАСТВОРА В КУСОЧНО-ОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

О. Р. Мисьвиг

Для определения и изучения горных пород и полезных ископаемых в разрезах скважин в геофизике практическое применение находят решения задач о диффузионном проникновении бурового раствора в слоистых средах. Рассмотрим случай кусочно-однородной слоистой среды, когда мощности пластов достаточно велики. В связи с этим для исследования диффузионных явлений в окрестности поверхности контакта пластов в качестве расчетной модели примем полубесконечную среду $y \geqslant 0$, состоящую из однородных пластов бесконечной мощности, каждый из которых представляет собой двухкомпонентный твердый раствор, характеризующийся в начальный момент химическими потенциалами $\overset{0}{\mu}_1$ и $\overset{0}{\mu}_2$ соответственно; границей раздела этих пластов есть плоскость $z = 0$. Внешняя к телу среда (буровой раствор) имеет химический потенциал $\overset{0}{\mu}_c$.

Рассмотрим задачу о диффузионном проникновении бурового раствора в пласты из внешней среды через поверхность $y = 0$. Поток диффундирующего компонента в тело вызывает в нем изменение химического потенциала. Образующийся в процессе диффузии твердый раствор в системе будем считать слабым $\left(c_i = \frac{m_c}{m_c + m_i} \ll 1\right.$, где m_c — масса диффундирующего компонента, m_i — масса вещества исследуемых пластов, $\left. i = 1, 2\right)$. Поэтому связь между химическим потенциалом растворителя в растворе и концентрацией примем линейной:

$$\mu_i = \overset{0}{\mu}_i + a_i c_i, \qquad i = 1, 2. \tag{1}$$

Предположим, что внешняя среда имеет идеальную массопроводность и характеризуется постоянным химическим потенциалом $\overset{0}{\mu}_c$. Так как